Or l'angle φ est la différence des angles MNA et MF'A, qui ont respectivement pour tangente

$$\frac{a^2y}{b^2x}, \quad \text{et} \quad \frac{y}{x+c};$$

on a donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\frac{a^2y}{b^2x} - \frac{y}{x+c}}{1 + \frac{a^2y^2}{b^2x(x+c)}} = \frac{a^2y(x+c) - b^2xy}{a^2y^2 + b^2x^2 + b^2cx}$$
$$= \frac{c^2xy + a^2cy}{a^2b^2 + b^2cx} = \frac{cy}{b^2}.$$

Par conséquent,

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2\varphi} = \frac{b^4}{b^4 + c^2y^2} = \frac{a^2b^4}{a^4y^2 + b^4x^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de MC, on obtient

$$\mathrm{MC} = \frac{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}{a^2} \times \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^2b^4} = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = \rho,$$

ce qui justifie la construction.

Cette construction est applicable à l'hyperbole et à la parabole.

116. — II. Nous prendrons pour second exemple la cycloïde. De ses équations

$$x = \mathrm{R}(\alpha - \sin\alpha), \quad y = \mathrm{R}(1 - \cos\alpha),$$

on a tiré au n° 103, II,

$$y' = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

On en déduit

$$1 + y'^2 = \frac{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2} = \frac{2}{1-\cos\alpha},$$

on trouve ensuite

$$dy' = \frac{(1-\cos\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}\, d\alpha = -\frac{d\alpha}{1-\cos\alpha},$$

on a d'ailleurs,

$$dx = \mathrm{R}(1-\cos\alpha)\, d\alpha.$$

Par conséquent

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{\mathrm{R}} \cdot \frac{1}{(1-\cos\alpha)^2}.$$

Substituant dans l'expression du rayon de courbure, on obtient

$$\rho = +\frac{\left(\frac{2}{1-\cos\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\mathrm{R}(1-\cos\alpha)^2}} = 2\mathrm{R}\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\alpha} = 4\mathrm{R}\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Or, si l'on se reporte à la figure du n° 103, on reconnaît que l'on a

$$\mathrm{MA} = 2\mathrm{R}\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Donc

$$\rho = 2\mathrm{MA},$$

c'est-à-dire que *dans la cycloïde le rayon de courbure est le double de la normale.*

§ 4. — DÉVELOPPÉES DES LIGNES PLANES

117. — On appelle *développée* d'une courbe plane le lieu géométrique de ses centres de courbure. Soit ABCDE.. une courbe plane quelconque; et soient A, B, C, D, E,... des points très-rapprochés sur cette courbe. Menons par ces points les normales Aa, Bb, Cc, Dd, Ee;... ces normales formeront par leurs intersections successives une ligne polygonale *abc de*.... Concevons maintenant que les arcs AB, BC, CD, DE,... deviennent infiniment petits; les points a, b, c, d, e,... deviendront les centres de courbure de ces arcs (113); et la ligne polygonale *abcde*... deviendra une courbe continue, lieu de ces centres de courbure. C'est cette courbe que l'on appelle la *développée* de la courbe ABCDE,... laquelle prend le nom de *développante* par rapport à la courbe *abcde*.... Voici l'origine de ces dénominations.

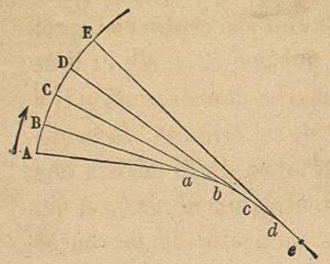

Fig. 14.

Remarquons d'abord que si les arcs AB, BC, CD, DE,... sont infiniment petits, on peut écrire (113) $aA = aB$, $bB = bC$; $cC = cD$; $dD = dE$;... Cela posé, imaginons que l'on enroule sur la courbe *abcde*... un fil flexible mais inextensible dont une extrémité aboutisse en A; puis, supposons qu'on la déroule en le tenant toujours tendu, et en faisant marcher son extrémité libre A dans le sens de la flèche, l'autre extrémité étant fixée quelque part sur la courbe *abcde*. L'extrémité A décrira d'abord un élément de cercle ayant son centre en a; cet arc de cercle passera par le point B, puisque $aA = aB$; et il se confondra avec l'élément AB de la courbe donnée, puisqu'il a pour centre le centre de courbure a de cet élément. Quand l'extrémité libre du fil sera parvenue en B, sur le prolongement de l'élément ab, le mouvement changera, et l'extrémité libre décrira un élément de cercle ayant son centre en b; cet arc de cercle passera par le point C, puisque $bB = bC$; et il se confondra avec l'élément BC de la courbe donnée, puisqu'il a pour centre le centre de courbure b de cet élément. Quand l'extrémité libre du fil sera venue en C, sur le prolongement

de l'élément bc, le mouvement changera encore; l'extrémité libre décrira un élément de cercle ayant son centre en C; cet arc de cercle passera par le point D, puisque $cC = cD$, et il se confondra avec l'élément CD de la courbe donnée, puisqu'il a pour centre le centre de courbure c de cet élément. En continuant ainsi, on voit que l'extrémité libre du fil décrira une série d'arcs de cercles ayant leurs centres sur *abcde*... et qui se confondront avec les éléments successifs de la courbe donnée ABCDE.... En définitive, elle décrira cette courbe d'un mouvement continu.

Ainsi, une courbe donnée quelconque ABCDE... peut toujours être considérée comme décrite par l'extrémité libre d'un fil enroulé sur la courbe *abcde*... lieu de ses centres de courbure. Dans ce mouvement le fil enroulé se *développe;* d'où les noms de *développée* et de *développante* donnés aux courbes *abcde*... et ABCDE....

Il résulte de ce mode de description que, dans toutes ses positions, le fil est normal à la courbe ABCDE,... puisqu'il est normal aux éléments de cercle avec lesquels elle se confond; en même temps le fil est tangent à la courbe *abcde*... puisqu'il est toujours le prolongement d'un de ses éléments. On peut donc dire que *toute tangente à la développée est normale à la développante*, et réciproquement, *toute normale à la développante est tangente à la développée.*

118. — Ces considérations géométriques pourraient suffire à la rigueur pour établir les propriétés de la développée. Néanmoins, il est utile d'en donner la démonstration analytique.

On a vu au nº 114, II, que le centre de courbure répondant au point d'une courbe donnée, dont les coordonnées sont x et y, est situé sur la normale en ce point à cette courbe, et sur la normale infiniment voisine menée par le point dont les coordonnées sont $x + dx$ et $y + dy$, c'est-à-dire que le lieu des centres de courbure est le lieu des intersections successives des normales à la courbe proposée, ou, en d'autres termes, que la développée est l'enveloppe des normales à cette courbe. Or, on a démontré, au n° 107, que l'enveloppe est tangente à chacune des enveloppées. Il est donc démontré que la développée d'une courbe est tangente à chacune des normales à cette courbe, et le point de contact est le centre de courbure répondant à chaque normale.

Cela posé, soient X, Y les coordonnées du centre de courbure répondant au point x, y de la courbe proposée, et soit ρ le rayon de courbure en ce point. On aura

$$\rho^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2.$$

Différentions les deux membres, il viendra, après avoir divisé par 2,

$$\rho d\rho = (X - x)\,dX + (Y - y)\,dY - [(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy].$$

Mais la quantité entre crochets est nulle, attendu que le point X, Y est situé sur la normale [104 (9)]; il reste donc, en divisant par ρ

$$(1) \qquad d\rho = dX.\frac{X - x}{\rho} + dY.\frac{Y - y}{\rho}.$$

Appelons ω l'angle que la normale fait avec l'axe des x, nous aurons

$$\frac{X - x}{\rho} = \cos\omega \quad \text{et} \quad \frac{Y - y}{\rho} = \sin\omega,$$

et l'équation (1) pourra s'écrire

$$(2) \qquad d\rho = dX \cos\omega + dY \sin\omega.$$

En même temps, si dS représente l'élément de la développée, nous aurons aussi, attendu que cet élément a la direction de la normale à la courbe donnée,

$$\frac{dX}{dS} = \cos\omega \quad \text{et} \quad \frac{dY}{dS} = \sin\omega.$$

Si l'on met pour $\cos\omega$ et $\sin\omega$ ces valeurs dans la relation (2), elle devient

$$(3) \qquad d\rho = \frac{dX^2}{dS} + \frac{dY^2}{dS} = \frac{dS^2}{dS}, \quad \text{ou} \quad d\rho = dS.$$

Cette relation exprime que la longueur de l'élément de la développée est précisément égale à l'accroissement infiniment petit du rayon de courbure, ce qui justifie le mode de description de la courbe indiqué plus haut, et la dénomination de *développée* employée pour désigner le lieu des centres de courbure.

119. — C'est en considérant la développée comme l'enveloppe des normales à la courbe donnée qu'on obtient l'équation de cette développée.

Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe donnée. On a vu (102) que l'équation de la normale à cette courbe est

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

ou

$$(1) \qquad [Y - f(x)]\,f'(x) + (X - x) = 0.$$

Cette équation est l'équation commune de toutes les normales; l'abscisse x du point de contact doit y être considérée comme un paramètre variable qui particularise la normale. Pour avoir l'équation de l'enveloppe des normales il faut donc, conformément à la règle exposée au n° 107, éliminer x entre l'équation (1) et sa dérivée prise par rapport à x.

Au lieu de remplacer y et y' en fonction de x, dans l'équation de la normale, il peut être parfois plus commode d'introduire partout y; il faut alors éliminer y entre l'équation de la normale ainsi préparée, et sa dérivée prise par rapport à y, regardée comme variable indépendante.

Nous donnerons quelques exemples du calcul qui conduit à l'équation de la développée.

120. — I. Nous prendrons d'abord pour exemple la parabole $y^2 = 2px$.

L'équation de la normale est

$$Y - y = -\frac{y}{p}(X - x),$$

ou, en remplaçant x en fonction de y,

$$(1) \qquad Y - y = -\frac{y}{p}\left(X - \frac{y^2}{2p}\right),$$

ou bien

$$y^3 + 2p(p - X)y - 2p^2Y = 0.$$

Différentiant par rapport à y, on a

$$(2) \qquad 3y^2 + 2p(p - X) = 0.$$

Il reste à éliminer y entre les équations (1) et (2). Pour cela on tire de (2)

$$2p(p - X) = -3y^2,$$

et en substituant dans (1), il vient

$$2y^3 = -2p^2Y, \quad \text{d'où} \quad y^2 = \sqrt[3]{p^4Y^2}.$$

Substituant dans (2) on obtient

$$(1) \qquad 3\sqrt[3]{p^4Y^2} = 2p(X - p),$$

ou

$$Y^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{(X - p)^3}{p},$$

c'est l'équation de la développée. Elle a la forme représentée par la figure 15.

Nous ne nous arrêterons pas à sa discussion.

II. Nous prendrons pour second exemple l'ellipse, parce que, pour obtenir l'équation de la développée sous une forme simple, il convient de suivre une marche particulière.

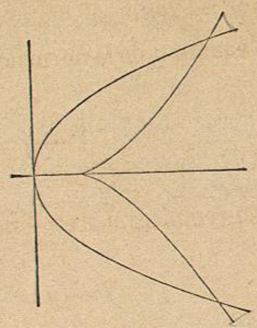

Fig. 15.

L'équation de la normale est

$$(1) \qquad Y - y = \frac{a^2y}{b^2x}(X - x),$$

ou

$$Y = \frac{a^2X}{b^2} \cdot \frac{y}{x} + y - \frac{a^2y}{b^2} = \frac{a^2X}{b^2} \cdot \frac{y}{x} - \frac{c^2}{b^2}y.$$

Prenons la dérivée par rapport à x, en regardant y comme fonction de x; nous aurons

$$0 = \frac{a^2X}{b^2}\left(\frac{xy' - y}{x^2}\right) - \frac{c^2}{b^2}y',$$

ou

$$0 = a^2X(xy' - y) - c^2x^2y'.$$

Mettant pour y' sa valeur $-\frac{b^2x}{a^2y}$, il vient

$$0 = a^2X\left(-\frac{b^2x^2}{a^2y} - y\right) + \frac{c^2x^2 \cdot b^2x}{a^2y} = -\frac{a^2X \cdot a^2b^2}{a^2y} + \frac{c^2b^2x^3}{a^2y},$$

d'où

$$\frac{x^3}{a^3} = \frac{aX}{c^2},$$

et par suite

$$\frac{x^2}{a^2} = \left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Or on trouverait par un calcul analogue

$$\frac{y^2}{b^2} = \left(-\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}};$$

il suffit pour cela de remplacer x par y, X par Y, a par b, b par a, et de changer par conséquent le signe de c^2. Ces valeurs, mises dans l'équation de l'ellipse, donnent

$$\left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

ou

$$(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}.$$

Telle est l'équation de la développée de l'ellipse; cette courbe a la forme indiquée par la figure 16.

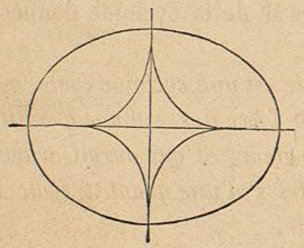

Fig. 16.

III. Nous chercherons encore la développée de la cycloïde, parce qu'elle peut s'obtenir par des considérations géométriques très-simples. Soit OHB (fig. 17) la cycloïde considérée; M l'un de ses points; C la position correspondante du centre du cercle générateur; A son point de contact avec l'axe OX. Traçons le cercle C′ symétrique du cercle C par rapport à OX; et tirons MA, qui rencontrera le cercle C′ en M′. A cause de la symétrie on aura évidemment AM′ = AM, et par conséquent MM′ = 2MA. Le point M′ sera donc (116) le centre de courbure de la cycloïde correspondant au point M.

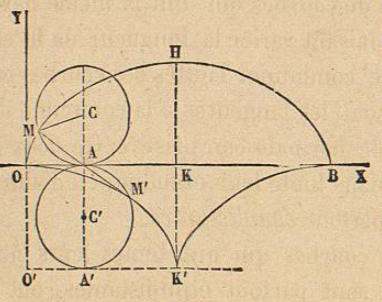

Fig. 17.

Cela posé, prenons OK $= \pi$R, et menons HKK′ parallèle à l'axe des y; menons encore OO′ parallèle à KK′, et O′K′ parallèle à l'axe OX, et tangent en A′ au cercle C′. Nous aurons

$$\text{O'K'} = \text{OK} = \pi\text{R}, \quad \text{et} \quad \text{O'A'} = \text{OA}.$$

Or on a

$$\text{arc AM} = \text{OA} = \text{arc AM'},$$

puisque les cordes AM et AM′ sont égales à cause de la symétrie. Il en résulte

$$\text{arc A'M'} = \pi\text{R} - \text{AM'} = \text{O'K'} - \text{O'A'} = \text{A'K'}.$$

Donc le point M′ est sur une cycloïde OM′K′ ayant pour cercle générateur le cercle C′; et qui serait engendrée par un point de la circonférence de ce cercle C′ roulant sur OX en sens inverse du roulement du cercle C. Or la courbe ainsi décrite, lieu des centres de courbure M′ de la cycloïde donnée, est la développée de cette cycloïde.

Donc *la développée de la cycloïde est une cycloïde égale, qui se serait abaissée parallèlement à l'axe des* y *d'une quantité égale au diamètre du cercle générateur, et qui aurait avancé ou reculé parallèlement à l'axe des* x *d'une quantité égale à une demi-circonférence de ce cercle.*

120 *bis.* — On peut remarquer que, d'après le mode de description d'une courbe fondé sur l'emploi de sa développée, il y a toujours une infinité de courbes qui ont la même développée; on les obtient en faisant varier la longueur du fil enroulé sur cette développée commune. Toutes ces courbes ont les mêmes normales; ce sont les tangentes à la commune développée; et la portion de normale comprise entre deux de ces courbes est constante dans toute leur étendue; en d'autres termes, ces courbes sont partout *équidistantes*.

Réciproquement, deux courbes qui ont toutes leurs normales communes et qui sont partout équidistantes, ont la même développée. Car si la première peut être décrite à l'aide de sa développée, en adoptant une certaine longueur de fil, la seconde pourra être décrite à l'aide de la même développée en faisant varier la longueur du fil d'une quantité égale à la distance des deux courbes.

§ 5. — POINTS SINGULIERS DES COURBES PLANES

121. — On appelle *points singuliers* d'une courbe plane les points qui offrent quelque particularité indépendante du choix des axes.

D'après cette définition, les points où l'ordonnée est maxima ou minima ne sont pas des points singuliers, car ils perdent leur propriété quand on fait varier la direction des axes. C'est ainsi, par exemple, que le sommet du petit axe d'une ellipse, qui répond au maximum de l'ordonnée quand on rapporte la courbe à ses axes, perd cette propriété si l'on prend pour axes deux diamètres conjugués quelconques.

Nous supposerons d'abord l'équation de la courbe résolue par rapport à y.

Nous aurons à considérer les points singuliers que peut présenter une même branche de courbe; puis ceux qui résultent de la rencontre de plusieurs branches.

122. — *Points singuliers que peut présenter une même branche.*

I. *Points d'inflexion.* Nous avons déjà eu occasion de parler de ces points au n° 111; ce sont ceux où le coefficient angulaire de la tangente $f'(x)$ passe par un maximum ou par un minimum, et où par conséquent $f''(x)$ devient nul ou infini. Nous avons donné pour exemple du premier cas la sinusoïde; on peut prendre pour exemple du second cas la courbe

$$y = h + x + \frac{9}{10} x^{\frac{5}{3}}.$$

On tire de cette équation

$$y' = 1 + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}},$$

$$y'' = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

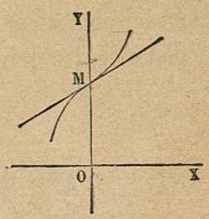

Fig. 18.

Pour $x = 0$, on trouve

$$y = h,\ y' = 1,\ y'' = \infty.$$

Le point M qui répond aux coordonnées

$$x = 0 \quad \text{et} \quad \cancel{x} = h,$$

est un point d'inflexion. Le coefficient angulaire y' est décroissant pour x négatif et croissant pour x positif; il passe donc par un minimum pour $x = 0$; la seconde dérivée y'' prend alors une valeur infinie.

On peut remarquer que quand y'' est nul, le rayon de courbure ρ (114) devient infini; et quand y'' est infini, le rayon de courbure est nul. On voit donc qu'aux points d'inflexion le rayon de courbure devient nul ou infini.

123. — II. *Points d'arrêt ou de rupture.* Ces points sont ceux où l'ordonnée passe brusquement d'une valeur finie à une valeur infinie ou à une autre valeur finie.

I. Soit, par exemple, la courbe

$$y = 1 - e^{x}.$$

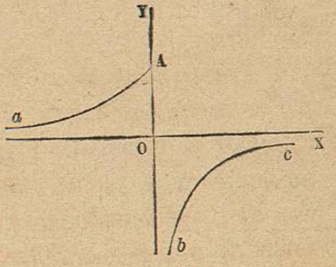

Fig. 19.

Si l'on fait varier x de $-\infty$ à 0, y est positif et augmente de 0 à 1, ce qui donne la branche aA. Si l'on fait varier x de $+\infty$ à 0, y est négatif et augmente de 0 à l'infini, ce qui donne la branche cb. Pour $x = 0$, on a donc ou une ordonnée finie $0A = 1$, ou une ordonnée négative infinie en valeur ab-