la seconde pourra être décrite à l'aide de la même développée en faisant varier la longueur du fil d'une quantité égale à la distance des deux courbes.

§ 5. — POINTS SINGULIERS DES COURBES PLANES

121. — On appelle *points singuliers* d'une courbe plane les points qui offrent quelque particularité indépendante du choix des axes.

D'après cette définition, les points où l'ordonnée est maxima ou minima ne sont pas des points singuliers, car ils perdent leur propriété quand on fait varier la direction des axes. C'est ainsi, par exemple, que le sommet du petit axe d'une ellipse, qui répond au maximum de l'ordonnée quand on rapporte la courbe à ses axes, perd cette propriété si l'on prend pour axes deux diamètres conjugués quelconques.

Nous supposerons d'abord l'équation de la courbe résolue par rapport à y.

Nous aurons à considérer les points singuliers que peut présenter une même branche de courbe; puis ceux qui résultent de la rencontre de plusieurs branches.

122. — *Points singuliers que peut présenter une même branche.*

I. *Points d'inflexion.* Nous avons déjà eu occasion de parler de ces points au n° 111; ce sont ceux où le coefficient angulaire de la tangente $f'(x)$ passe par un maximum ou par un minimum, et où par conséquent $f''(x)$ devient nul ou infini. Nous avons donné pour exemple du premier cas la sinusoïde; on peut prendre pour exemple du second cas la courbe

$$y=h+x+\frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}}.$$

On tire de cette équation

$$y'=1+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}},$$

$$y''=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

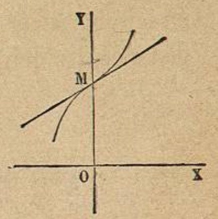

Fig. 18.

Pour $x=0$, on trouve

$$y=h,\ y'=1,\ y''=\infty.$$

Le point M qui répond aux coordonnées

$$x=0 \quad \text{et} \quad y=h,$$

est un point d'inflexion. Le coefficient angulaire y' est décroissant pour x négatif et croissant pour x positif; il passe donc par un minimum pour $x=0$; la seconde dérivée y'' prend alors une valeur infinie.

On peut remarquer que quand y'' est nul, le rayon de courbure ρ (114) devient infini; et quand y'' est infini, le rayon de courbure est nul. On voit donc qu'aux points d'inflexion le rayon de courbure devient nul ou infini.

123. — II. *Points d'arrêt ou de rupture.* Ces points sont ceux où l'ordonnée passe brusquement d'une valeur finie à une valeur infinie ou à une autre valeur finie.

I. Soit, par exemple, la courbe

$$y=1-e^{x}.$$

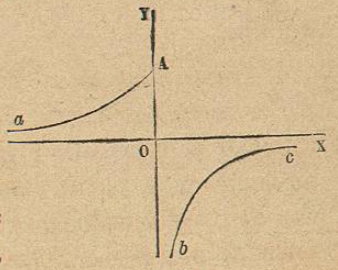

Fig. 19.

Si l'on fait varier x de $-\infty$ à 0, y est positif et augmente de 0 à 1, ce qui donne la branche aA. Si l'on fait varier x de $+\infty$ à 0, y est négatif et augmente de 0 à l'infini, ce qui donne la branche cb. Pour $x=0$, on a donc ou une ordonnée finie $0A=1$, ou une ordonnée négative infinie en valeur absolue. Ainsi l'ordonnée passe brusquement d'une valeur finie à une valeur infinie.

II. Soit en second lieu la courbe

$$y = \text{arc.tang}\,\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

Si l'on fait varier x de $-\infty$ à 0, y est négatif et varie de 0 à $-\frac{\pi}{2}$. Si l'on fait varier x de $+\infty$ à 0, y est positif et varie de à $0+\frac{\pi}{2}$. Pour $x=0$ l'ordonnée passe donc brusquement de la valeur finie $-\frac{\pi}{2}$ à la valeur finie $+\frac{\pi}{2}$.

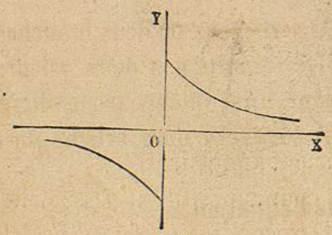

Fig. 20.

Ce genre de points singuliers ne se rencontre que dans les courbes transcendantes.

124. — III. *Points saillants.* On nomme ainsi les points où le coefficient angulaire de la tangente passe brusquement d'une valeur finie à une autre valeur finie, et où par conséquent la courbe semble se briser et former un angle dont le sommet est le point saillant.

Soit, par exemple, la courbe

$$y = h + x.\,\text{arc tang}\,\frac{1}{x}.$$

On tire de cette équation

$$y' = \text{arc tang}\,\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

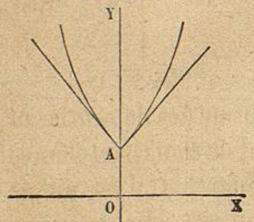

Fig. 21.

Or, on vient de voir que pour $x=0$ cette fonction passe brusquement de la valeur $-\frac{\pi}{2}$ à la

valeur $+\frac{\pi}{2}$. La courbe se brise donc au point A, qui devient le sommet de l'angle formé par les deux parties consécutives de la courbe; ce sommet est le point saillant.

Ce genre de points singuliers ne se rencontre également que dans les courbes transcendantes.

125. — *Points singuliers résultant de la rencontre de plusieurs branches.*

I. *Points multiples.* Ces points sont ceux où deux branches de courbe se croisent. Cela arrive lorsque y a deux valeurs distinctes qui se confondent pour une valeur particulière de x, et qu'en même temps y' conserve deux valeurs distinctes.

On peut prendre pour exemple l'équation

$$y = x\sqrt{\frac{x+a}{b}}; \quad \text{d'où} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{b}} \cdot \frac{3x+2a}{\sqrt{x+a}}.$$

Pour $x=0$ on trouve

$$y=0, \quad \text{et} \quad y' = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

La courbe a la forme indiquée (fig. 22); le point 0 est un point multiple.

Ces points se rencontrent dans les courbes dont l'équation contient des radicaux d'indice pair.

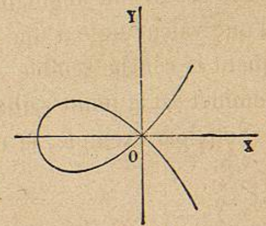

Fig. 22.

126. — Il peut arriver que les deux branches de courbe au lieu de se croiser soient tangentes. Le point de contact est alors ce qu'on appelle un *point multiple avec contact*, et il est dit *de première* ou *de deuxième espèce*, suivant que les deux branches sont situées de part et d'autre de leur tangente commune ou d'un même côté de cette tangente.

Ce qui caractérise ces points, c'est d'abord que deux valeurs distinctes de y se confondent en une seule ; que deux valeurs de y' se confondent également en une seule ; et le point est de première on de deuxième espèce, suivant que sur les deux branches y'' a des signes différents ou le même signe.

Comme exemple d'un *point multiple avec contact de première espèce*, on peut prendre la courbe (fig. 23

$$y=x^2\sqrt{1+x}.$$

On a dans ce cas

$$y'=\frac{4x+5x^2}{2\sqrt{1+x}};\qquad y''=\frac{8+24x+15x^2}{16(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour $x=0$, on trouve

$$y=0,\ y'=0,\quad \text{et}\quad y''=\pm\frac{1}{2}.$$

Les deux valeurs de l'ordonnée se réduisent à une seule ; il en est de même des deux valeurs de y' ; quant aux deux valeurs de y'', elles restent distinctes et de signe différent ; le point O est donc un point multiple avec contact de première espèce.

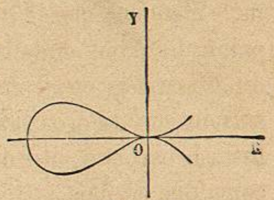

Fig. 23.

Comme exemple d'un point multiple avec contact de deuxième espèce, nous prendrons la courbe (fig. 24),

$$y=x^2+\frac{1}{2}x^2\sqrt{1+x}.$$

On a dans ce cas

$$y'=2x+\frac{4x+5x^2}{4\sqrt{1+x}},\quad y''=2+\frac{8+24x+15x}{8(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour $x=0$, on trouve

$$y=0,\ y'=0,\ y''=2\pm1;$$

les deux valeurs de y se réduisent encore à une seule, il en est de même des valeurs de y' ; mais les deux valeurs de y'' restent distinctes et ont toutes deux le même signe. Le point O est donc bien un point multiple avec contact de deuxième espèce.

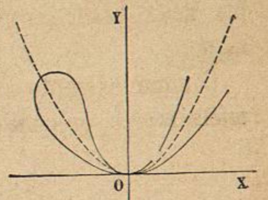

Fig. 24.

127. — II. *Points de rebroussement*. Ce qui caractérise ces points, c'est que l'ordonnée est imaginaire, soit en deçà, soit au delà ; qu'elle a deux valeurs distinctes, soit au delà, soit en deçà, qui se confondent en une seule au point considéré, et que le coefficient angulaire y' a aussi deux valeurs distinctes qui se confondent en une seule en ce point. La courbe présente donc au point de rebroussement deux branches tangentes entre elles, mais qui ne s'étendent que d'un côté de ce point. Le point de rebroussement est dit *de première* ou *de deuxième* espèce, suivant que les deux branches sont situées de part et d'autre de leur tangente commune ou d'un même côté de cette tangente, ce qu'indique le signe de y''.

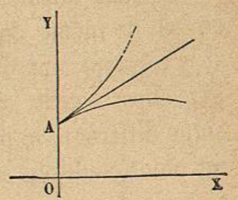

Fig. 25.

Soit (fig. 25) l'équation

$$y=h+x+\frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}},$$

on en tire

$$y'=1+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},\quad \text{et}\quad y''=\sqrt{x}.$$

Pour $x=0$ on a $y=h$, $y'=1$; d'ailleurs y devient imaginaire (ainsi que y') pour les valeurs négatives de x. De plus y'' a un signe différent sur les deux branches. On a donc au point A un *point de rebroussement de première espèce*.

Soit au contraire (fig. 26) l'équation

$$y = h + \frac{1}{2}x + x^2 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$

on en tire

$$y' = \frac{1}{2} + x + x^{\frac{3}{2}}, \quad \text{et} \quad y'' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

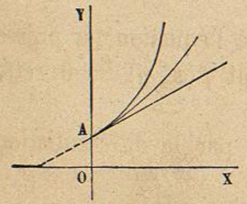

Fig. 26.

Pour $x = 0$, on a $y = h$, $y' = \frac{1}{2}$; et y est imaginaire pour les valeurs négatives de x. De plus, pour de très-petites valeurs positives de x, les deux valeurs de y'' sont de même signe. Le point A est donc un *point de rebroussement de seconde espèce*.

128. — III. *Points conjugués* (ou isolés). Ces points proviennent ordinairement d'une branche de courbe fermée qui se réduit à un point pour une valeur particulière d'un paramètre entrant dans l'équation de la courbe. Ils sont caractérisés par cette circonstance que, en deçà et au delà, l'ordonnée est imaginaire, jusqu'à une valeur convenable de x; et qu'au point lui-même y' est imaginaire.

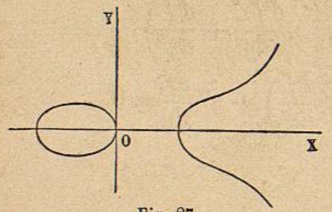

Fig. 27.

Soit, par exemple, la courbe

$$y = \frac{\sqrt{x(x+a)(x-b)}}{m},$$

qui a la forme représentée par la figure 27.

Si l'on fait l'hypothèse $a = 0$, l'équation devient

$$y = \frac{x\sqrt{x-b}}{m}, \quad \text{d'où} \quad y' = \frac{3x - 2b}{2m\sqrt{x-b}}.$$

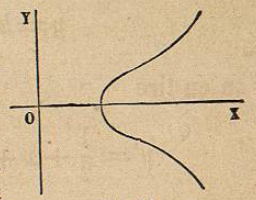

Fig. 28.

Pour $x = 0$ on a $y = 0$. Mais pour des valeurs positives de x moindres que b, ou pour des valeurs négatives de cette variable, y est imaginaire. Au point O lui-même (fig. 28), y' est imaginaire. Ce point est donc un *point conjugué*.

129. — Supposons maintenant que l'équation ne puisse pas être résolue par rapport à y; soit $f(x, y) = 0$ cette équation.

Rappelons-nous qu'on en déduit par la différentiation (30, 59)

$$(a) \qquad \frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} = 0,$$

$$(b) \qquad \left(\frac{d^2f}{dx^2} + 2y'\frac{d^2f}{dx\,dy} + y'^2\frac{d^2f}{dy^2}\right) + y''\frac{df}{dy} = 0,$$

$$(c) \qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d^3f}{dx^3} + 3y'\frac{d^3f}{dx^2dy} + 3y'^2\frac{d^3f}{dx\,dy^2} + \frac{d^3f}{dy^3}\right) \\ &\quad + 3y''\left(\frac{d^2f}{dx\,dy} + y'\frac{d^2f}{dy^2}\right) + y'''\frac{df}{dy} = 0, \end{aligned}\right.$$

. . . .

L'équation (a) donne y'; en substituant cette valeur dans l'équation (b), on en tire y''; et, en substituant les valeurs de y' et de y'' dans l'équation (c), on en tirerait y'''; et ainsi de suite.

Il n'y a rien de particulier à remarquer pour les points singuliers que peut présenter une même branche de courbe.

Mais il peut arriver qu'au point que l'on considère on ait à la fois

$$\frac{df}{dx}=0, \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy}=0;$$

Dans ce cas, l'équation (a) qui donnait y' devient illusoire, et c'est alors l'équation (b) qui donne cette première dérivée, attendu que le terme en y'' disparaît, puisque $\frac{df}{dy}=0$, c'est-à-dire qu'alors y' est donné par une équation du second degré.

Si les racines sont imaginaires, on a affaire à un point conjugué.

Si les racines sont réelles et inégales, c'est un point multiple ordinaire.

Si les racines sont égales, il s'agit d'un point multiple avec contact, ou d'un point de rebroussement. Si y conserve une valeur réelle en deçà et au delà du point considéré, c'est un point multiple; si y devient imaginaire en deçà ou au delà, c'est un point de rebroussement.

Dans les deux cas, l'*espèce* du point sera donnée par y'', que l'on tirera alors de l'équation (c), attendu que y''' disparaît, puisque $\frac{df}{dy}$ est nul. Si les deux valeurs de y'' sont de signe contraire, on aura affaire à un point multiple de première espèce ou à un point de rebroussement de première espèce; si les deux valeurs de y'' sont de même signe, ce sera un point multiple de deuxième espèce ou un point de rebroussement de deuxième espèce.

Les détails qui précèdent suffisent pour les besoins de l'application.

§ 6. — COURBES A DOUBLE COURBURE

130. — Une courbe quelconque, dans l'espace, est représentée, en coordonnées rectangulaires, par deux équations

entre les trois variables x, y, z. Ces deux équations sont celles de deux surfaces dont l'intersection est la courbe considérée. Le plus souvent les deux équations ne renferment chacune que deux variables et se présentent sous la forme

$$(1) \qquad x=\varphi(z), \qquad y=\psi(z),$$

elles représentent alors les cylindres qui projettent la courbe sur le plan des xz, et sur le plan des yz.

On prend ordinairement z pour variable indépendante; cependant, pour la symétrie des formules, il est souvent commode de regarder x, y et z comme fonctions d'une variable indépendante auxiliaire; on adopte alors généralement pour variable indépendante l'arc s de la courbe; x, y, z sont considérés comme fonctions de s.

131. — *Expression d'un élément de la courbe.* Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de la courbe, et soient

$$x+\Delta x, \; y+\Delta y, \; z+\Delta z,$$

les coordonnées d'un point voisin M'. Si l représente la droite qui joint les points M et M', on aura, d'après une formule connue de Géométrie analytique à trois dimensions

$$l=\sqrt{\overline{\Delta x}^2+\overline{\Delta y}^2+\overline{\Delta z}^2}.$$

Si l'on rapproche indéfiniment le point M' du point M, la corde l de l'arc MM' tendra vers l'arc lui-même, que l'on représente par ds, en même temps que Δx, Δy, Δz tendront respectivement vers dx, dy, dz. On aura donc

$$ds=\lim.\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2},$$

ou

$$(2) \qquad ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

L'arc infiniment petit ds est ce qu'on nomme un *élément* de la courbe.