Mais il peut arriver qu'au point que l'on considère on ait à la fois

$$\frac{df}{dx}=0, \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy}=0;$$

Dans ce cas, l'équation (a) qui donnait y' devient illusoire, et c'est alors l'équation (b) qui donne cette première dérivée, attendu que le terme en y'' disparaît, puisque $\frac{df}{dy}=0$, c'est-à-dire qu'alors y' est donné par une équation du second degré.

Si les racines sont imaginaires, on a affaire à un point conjugué.

Si les racines sont réelles et inégales, c'est un point multiple ordinaire.

Si les racines sont égales, il s'agit d'un point multiple avec contact, ou d'un point de rebroussement. Si y conserve une valeur réelle en deçà et au delà du point considéré, c'est un point multiple; si y devient imaginaire en deçà ou au delà, c'est un point de rebroussement.

Dans les deux cas, l'*espèce* du point sera donnée par y'', que l'on tirera alors de l'équation (c), attendu que y''' disparaît, puisque $\frac{df}{dy}$ est nul. Si les deux valeurs de y'' sont de signe contraire, on aura affaire à un point multiple de première espèce ou à un point de rebroussement de première espèce; si les deux valeurs de y'' sont de même signe, ce sera un point multiple de deuxième espèce ou un point de rebroussement de deuxième espèce.

Les détails qui précèdent suffisent pour les besoins de l'application.

§ 6. — COURBES A DOUBLE COURBURE

130. — Une courbe quelconque, dans l'espace, est représentée, en coordonnées rectangulaires, par deux équations

entre les trois variables x, y, z. Ces deux équations sont celles de deux surfaces dont l'intersection est la courbe considérée. Le plus souvent les deux équations ne renferment chacune que deux variables et se présentent sous la forme

$$(1) \qquad x=\varphi(z), \qquad y=\psi(z),$$

elles représentent alors les cylindres qui projettent la courbe sur le plan des xz, et sur le plan des yz.

On prend ordinairement z pour variable indépendante; cependant, pour la symétrie des formules, il est souvent commode de regarder x, y et z comme fonctions d'une variable indépendante auxiliaire; on adopte alors généralement pour variable indépendante l'arc s de la courbe; x, y, z sont considérés comme fonctions de s.

131. — *Expression d'un élément de la courbe.* Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de la courbe, et soient

$$x+\Delta x, \; y+\Delta y, \; z+\Delta z,$$

les coordonnées d'un point voisin M'. Si l représente la droite qui joint les points M et M', on aura, d'après une formule connue de Géométrie analytique à trois dimensions

$$l=\sqrt{\overline{\Delta x}^2+\overline{\Delta y}^2+\overline{\Delta z}^2}.$$

Si l'on rapproche indéfiniment le point M' du point M, la corde l de l'arc MM' tendra vers l'arc lui-même, que l'on représente par ds, en même temps que Δx, Δy, Δz tendront respectivement vers dx, dy, dz. On aura donc

$$ds=\lim.\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2},$$

ou

$$(2) \qquad ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

L'arc infiniment petit ds est ce qu'on nomme un *élément* de la courbe.

Si l'on prend z pour variable indépendante, on peut écrire

$$ds = dz\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1},$$

ou, en tirant $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ des équations (1) de la courbe

$$(3) \qquad ds = \sqrt{[\varphi'(z)]^2 + [\psi'(z)]^2 + 1}.$$

132. — *Tangente.* Les équations de la droite qui joint les points M, M' ayant pour coordonnées

$$x, y, z, \quad \text{et} \quad x + \Delta x, \; y + \Delta y, \; z + \Delta z,$$

sont, en désignant par X, Y, Z les coordonnées courantes,

$$X - x = \frac{\Delta x}{\Delta z}(Z - z), \quad \text{et} \quad Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta z}(Z - z).$$

Si l'on fait tendre M' vers M, la sécante MM' tendra vers la tangente en M ; en même temps

$$\frac{\Delta x}{\Delta z} \text{ et } \frac{\Delta y}{\Delta z}, \text{ tendront vers } \frac{dx}{dz} \text{ et } \frac{dy}{dz};$$

les équations de la tangente sont donc

$$(4) \qquad X - x = \frac{dx}{dz}(Z - z), \quad \text{et} \quad Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z).$$

On peut les écrire symétriquement sous la forme

$$(5) \qquad \frac{dx}{X - x} = \frac{dy}{Y - y} = \frac{dz}{Z - z}.$$

On remarquera que les équations (4) sont celles des tangentes aux courbes représentées par les équations (1); ainsi *la projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de cette courbe*, ce qu'il était aisé de prévoir.

Considérons les points de la courbe et de sa tangente qui correspondent à l'ordonnée $z + h$, h étant une quantité infiniment petite. Soient $x_1, y_1, z + h$ les coordonnées du premier de ces points, que nous appellerons p; et $X_1, Y_1, z + h$, celles du second, que nous appellerons P. D'après ce qui a été expliqué au n° 99, la différence $X_1 - x_1$ sera un infiniment petit du second ordre, si la courbe n'éprouve pas de discontinuité au point que l'on considère; et il en sera de même de la différence $Y_1 - y_1$. On en conclut aisément que la distance des points P et p est elle-même un infiniment petit du second ordre, car cette distance δ a pour expression

$$\delta = \sqrt{(X_1 - x_1)^2 + (Y_1 - y_1)^2 + 0}.$$

Or, d'après ce qu'on vient de dire, h étant l'infiniment petit principal, les différences $X_1 - x_1$, et $Y_1 - y_1$, sont de la forme kh^2 et $k'h^2$, k et k' étant des coefficients finis. On a donc

$$\delta = h^2\sqrt{k^2 + k'^2},$$

quantité infiniment petite du second ordre.

On ferait voir, comme au n° 99, que la tangente au point x, y, z ne passe pas par le point $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, et que si ces dernières coordonnées paraissent satisfaire aux équations de la tangente, c'est parce qu'on néglige les infiniment petits du second ordre.

132 bis. — On sait que si $x = az + p$, $y = bz + q$, sont les équations d'une droite, les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes ont respectivement pour valeur

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Si l'on applique ces formules à la tangente, on aura donc, en désignant par α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes des x, des y et des z,

$$(6)\quad \cos\alpha = \frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \frac{dx}{ds}$$

et de même

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \text{et} \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

133. — *Plan normal*. Toutes les perpendiculaires à la tangente menées par le point de contact sont des *normales;* le lieu de ces normales est un plan perpendiculaire à la tangente et auquel on donne le nom de *plan normal*.

Ce plan, passant par le point de contact dont les coordonnées sont x, y, z, son équation est de la forme

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0.$$

Pour qu'il soit perpendiculaire à la droite, représentée par les équations (4), il faut qu'on ait

$$A = C.\frac{dx}{dz}, \quad \text{et} \quad B = C.\frac{dy}{dz}.$$

Substituant dans l'équation précédente ces valeurs de A et de B, et supprimant le facteur C devenu commun, on obtient

$$(7)\quad (X-x)\frac{dx}{dz} + (Y-y)\frac{dy}{dz} + (Z-z) = 0,$$

ou

$$(X-x)\,dx + (Y-y)\,dy + (Z-z)\,dz = 0,$$

c'est l'équation du plan normal.

134. — *Plans tangents*. Tout plan mené suivant la tangente porte le nom de *plan tangent*. L'équation générale des plans tangents est évidemment de la forme

$$(8)\quad [(X-x)\,dz - (Z-z)\,dx] + \lambda[(Y-y)\,dz - (Z-z)\,dy] = 0,$$

car cette équation représente un plan, et ce plan contient la tangente, puisque l'équation (8) est satisfaite en même temps que les équations (4) de la tangente.

Nous remarquerons encore ici que ce plan, qui passe par le point x, y, z, ne passe pas par le point dont les coordonnées sont $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, et que si ces coordonnées paraissent satisfaire à l'équation (8), c'est parce qu'on néglige les infiniment petits du second ordre.

135. — *Plan osculateur*. I. Considérons trois points consécutifs M, M′, M″ sur la courbe; par ces trois points, qui ne sont pas généralement en ligne droite, on pourra faire passer un plan. Si l'on fait tendre les points M′ et M″ vers le point M, ce plan tendra vers une position limite; le plan qui occupe cette position limite est ce que l'on appelle le *plan osculateur* au point M.

Ce plan devant passer par le point M, dont les coordonnées sont x, y, z, son équation est de la forme

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0.$$

Nous supposons x, y, et z fonctions d'une variable auxiliaire indépendante.

Si $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ sont les coordonnées du point M′, elles doivent satisfaire à l'équation du plan, ce qui donne

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0.$$

Les coordonnées du point M″ étant

$$x + dx + d^2x,\ y + dy + d^2y,\ z + dz + d^2z,$$

elles doivent également satisfaire à l'équation du plan, ce qui donne, en ayant égard à la relation ci-dessus,

$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0.$$

De ces deux dernières équations on tirera les rapports

$\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$; et, en substituant pour A et B leurs valeurs en C dans l'équation du plan, et supprimant le facteur C devenu commun, on obtiendra

$$(9)\quad \left\{ \begin{array}{l} (X-x)\,(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + (Y-y)\,(dz\,d^2x - dx\,d^2z) \\ \qquad + (Z-z)\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0, \end{array} \right.$$

c'est l'équation du plan osculateur.

On en ferait disparaître les infiniment petits en divisant par ds^3, si s est la variable indépendante. Si $x', x'', y', y'', z', z''$ représentent les premières et secondes dérivées de x, y et z par rapport à s, on pourrait écrire

$$\begin{array}{l} (X-x)\,(y'z''-z'y'') + (Y-y)\,(z'x''-x'z'') \\ \qquad + (Z-z)\,(x'y''-y'x'') = 0, \end{array}$$

équation qui ne renferme plus d'infiniment petits.

II. Le plan osculateur contient la tangente en M; car si l'on remplace $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ par dx, dy, dz qui leur sont proportionnels en vertu des équations (5) de la tangente, tous les termes de l'équation (9) s'entre-détruisent. Le plan osculateur est donc compris parmi les plans tangents.

III. Si l'on prend z pour variable indépendante, il en résulte $dz =$ constante et $d^2z = 0$. L'équation du plan osculateur devient alors, en divisant par dz^3:

$$(9\,bis)\quad \left| \begin{array}{l} -(X-x)\dfrac{d^2y}{dz^2} + (Y-y)\dfrac{d^2x}{dz^2} \\ + (Z-z)\left(\dfrac{dx}{dz}\cdot\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{d^2x}{dz^2}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Sous cette forme, on reconnaît aisément que le plan osculateur au point M, dont les coordonnées sont x, y, z, est parallèle à la tangente au point M' ayant pour coordonnées $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. En effet : $\frac{dx}{dy}$ et $\frac{dy}{dz}$ étant les coefficients angulaires de la tangente en M, ceux de la tangente en M' s'obtiendront en y changeant x en $x+dx$ et y en $y+dy$, ce qui donne

$$\frac{dx}{dz} + \frac{d^2x}{dz^2}dz \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2}dz.$$

Or, on sait que pour qu'une droite, ayant pour coefficients angulaires a et b, soit parallèle au plan qui a pour équation

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

il faut et il suffit qu'on ait

$$Aa + Bb + C = 0.$$

Dans le cas qui nous occupe, cette condition devient

$$\begin{array}{l} -\dfrac{d^2y}{dz^2}\left(\dfrac{dx}{dz} + \dfrac{d^2x}{dz^2}dz\right) + \dfrac{d^2x}{dz^2}\left(\dfrac{dy}{dz} + \dfrac{d^2y}{dz^2}dz\right) \\ + \left(\dfrac{dx}{dz}\cdot\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{d^2x}{dz^2}\right) = 0, \end{array}$$

égalité qui est en effet satisfaite d'elle-même, attendu que les termes du premier membre s'entre-détruisent.

IV. On déduit encore de ce qui précède que la plus courte distance des tangentes menées en M et en M' est un infiniment petit du 3e ordre. En effet : cette distance n'est autre chose que la distance du plan osculateur à la tangente en M' qui lui est parallèle. Il faut donc démontrer que celle-ci est un infiniment petit du 3e ordre. On simplifie la démonstration en prenant la tangente en M pour axe des z, le point M pour origine, et le plan osculateur en ce point pour plan des zx. L'équation (9 *bis*) du plan osculateur se réduit alors à

$$-X\frac{d^2y}{dz^2} + Y\frac{d^2x}{dz^2} = 0,$$

car on a $x=0$, $y=0$, $z=0$, puisque l'origine est en M, et

$\frac{dx}{dz}=0$ avec $\frac{dy}{dz}=0$, puisque l'axe des z est une tangente. Pour que le plan osculateur se confonde avec le plan des zx, et que son équation se réduise à $Y=0$, il faut donc qu'on ait $\frac{d^2y}{dz^2}=0$.

Cela posé, soit $y=\Psi(z)$ l'équation de la projection de la courbe sur le plan des yz; on aura par la série de Maclaurin (69)

$$y=\Psi(0)+\Psi'(0)\frac{z}{1}+\Psi''(0)\frac{z^2}{1.2}+\Psi'''(0)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots$$

Mais $\Psi(0)$ est nul, puisque la courbe passe par l'origine; $\Psi'(0)$ est nul, puisqu'elle est tangente à l'axe des z; enfin, la condition $\frac{d^2y}{dz^2}=0$ revient à $\Psi''(0)=0$. Il reste donc

$$y=\Psi'''(0).\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots.$$

Donc si z est un infiniment petit du premier ordre, comme cela doit avoir lieu pour le point M′ infiniment voisin du point M, l'ordonnée y, qui mesure la plus courte distance du plan osculateur à la tangente en M′, est un infiniment petit du 3^e^ ordre.

Il en résulte qu'en négligeant les infiniment petits du 3^e^ ordre, on peut regarder le plan osculateur en M comme contenant les tangentes en M et M′.

135 *bis*. — *Normale principale*. On donne le nom de normale principale à la perpendiculaire à la tangente qui se trouve dans le plan osculateur. C'est l'intersection du plan osculateur avec le plan normal; et l'on pourrait obtenir ses équations par cette considération. Mais il est préférable d'employer la méthode suivante, qui conduit aisément à diverses autres conséquences utiles.

Soient M et M′ deux points infiniment voisins sur la courbe; MT et M′T′ les tangentes en ces deux points. La distance de la

tangente M′T′ au plan osculateur mené en M étant un infiniment petit du 3^e^ ordre, on peut, en négligeant les infiniment petits de cet ordre, regarder M′T′ comme contenu dans le plan osculateur. Supposons que ce soit le plan de la figure. Soit C le centre de courbure en M de l'arc MM′ considéré ainsi comme plan; menons CM et CM′; la droite MC, normale en M (113), sera la normale principale. Par l'origine des coordonnées, menons les droites Ot et Ot' parallèles à MT et à M′T′

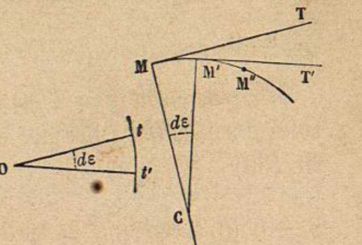

Fig. 29.

et égales à l'unité, et joignons tt'. Le triangle MCM′ peut être considéré comme un triangle rectiligne isocèle, dont l'angle en C est égal à l'angle de contingence, que nous représenterons par $d\varepsilon$, et dont les angles à la base sont aussi voisins qu'on le voudra de 90°. Or, le triangle tOt' est aussi un triangle isocèle, dont l'angle en O est égal à l'angle de contingence; il est donc semblable au triangle MCM′; et, puisque Ot et Ot' sont respectivement perpendiculaires aux normales MC et M′C′, il faut que le troisième côté tt' soit perpendiculaire à MM′, et par conséquent aussi voisin qu'on le voudra d'être parallèle à MC. La direction de la normale principale MC est donc en définitive celle de la droite tt', et tout se réduit à trouver cette dernière.

Pour cela, soient ξ, η, ζ les coordonnées du point t; $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$, $\zeta+d\zeta$ seront celles du point t'. La distance $d\sigma$ de ces deux points sera exprimée (131) par

$$d\sigma=\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2};$$

et si λ, μ, ν désignent les angles que tt' fait avec les axes, on aura (132)

$$\cos\lambda=\frac{d\xi}{d\sigma},\quad \cos\mu=\frac{d\eta}{d\sigma},\quad \cos\nu=\frac{d\zeta}{d\sigma}.$$