Or, α, β, γ désignant les angles de la tangente MT ou de la parallèle Ot avec les axes, on a

$$\xi = Ot \, . \cos\alpha, \quad \eta = Ot \, . \cos\beta, \quad \zeta = Ot \, . \cos\gamma,$$

ou simplement, puisque $Ot = 1$,

$$\xi = \cos\alpha, \quad \eta = \cos\beta, \quad \zeta = \cos\gamma.$$

Mais on a trouvé au n° 132

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

On a donc

$$\xi = \frac{dx}{ds}, \quad \eta = \frac{dy}{ds}, \quad \zeta = \frac{dz}{ds},$$

et, par suite,

$$d\xi = d \, . \frac{dx}{ds}, \quad d\eta = d \, . \frac{dy}{ds}, \quad d\zeta = d \, . \frac{dz}{ds}.$$

Il est commode de prendre s pour variable indépendante ; on peut écrire alors

$$d\xi = \frac{d^2x}{ds^2} ds, \quad d\eta = \frac{d^2y}{ds^2} ds, \quad d\zeta = \frac{d^2z}{ds^2} ds.$$

La valeur de $d\sigma$ devient alors

$$d\sigma = ds \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

et l'on trouve enfin, pour les angles λ, μ, ν, les valeurs

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{\dfrac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}, \\ \cos\mu &= \frac{\dfrac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}, \\ \cos\nu &= \frac{\dfrac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2}} \end{aligned} \right.$$

La direction de la normale principale se trouve ainsi déterminée.

136. — *Rayon de courbure*. L'arc $d\sigma$ mesure l'angle tOt' dans le cercle dont le rayon est 1 ; c'est donc la mesure de l'angle de contingence MCM'. On a donc, en désignant par ρ le rayon de courbure MC du cercle osculateur en M (114),

$$(10) \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\rho}, \text{ d'où } \rho = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}.$$

Remarque I. On remarquera qu'à l'aide de cette valeur on peut écrire les valeurs des cosinus des angles λ, μ, ν de la normale principale avec les axes sous la forme

$$(11) \quad \cos\lambda = \rho \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \cos\mu = \rho \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \cos\nu = \rho \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Remarque II. On peut observer aussi que les formules qui précèdent sont applicables aux lignes planes; il n'y a de différence qu'en ce que, dans ce cas, les résultats du calcul sont généralement plus simples.

137. — *Seconde courbure.* Deux plans osculateurs consécutifs font entre eux un angle dièdre infiniment petit, que nous désignerons par $d\theta$, et que l'on appelle l'angle de *torsion* ou de *seconde courbure*. On assimile cette seconde courbure à la courbure d'un cercle, et l'on nomme *rayon de seconde courbure* le rayon d'un cercle dont la courbure serait équivalente à la torsion de la courbe considérée. Si ρ_1 désigne ce rayon de courbure, on pose par analogie

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\rho_1},\quad \text{d'où}\quad \rho_1=\frac{ds}{d\theta}.$$

Pour obtenir l'angle $d\theta$, il faudrait, dans l'équation du plan osculateur, changer x, y, z en $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, et chercher l'angle des deux plans ainsi obtenus. Cet angle, que nous désignerons par $d\tau$, est l'angle de torsion correspondant à l'arc ds; la torsion par unité de longueur de la courbe est donc, au point considéré, $\frac{d\tau}{ds}$; et son inverse $\frac{ds}{d\tau}$ est le *rayon de torsion* ou rayon de seconde courbure.

On peut encore suivre une autre méthode et employer des considérations analogues à celles qui nous ont servi aux nos 135 et 136. Nous renverrons pour cette question, qui a peu d'utilité dans la pratique, à des traités plus étendus.

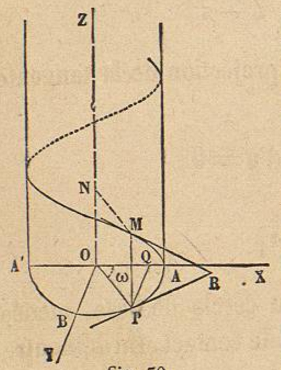

Fig. 50.

138. — *Application à l'hélice.* Nous supposerons que l'on prenne pour axe des z l'axe de l'hélice, et que l'on fasse passer l'axe des x par un point A pris sur la courbe. Soit ABA' la trace sur le plan des xy du cylindre sur lequel l'hélice est tracée; soit

r son rayon. Soit h le pas de l'hélice; nous poserons

$$\frac{h}{2\pi r}=\operatorname{tang} i.$$

Soient $x=\mathrm{OQ}$, $y=\mathrm{PQ}$, $z=\mathrm{MP}$ les coordonnées d'un point de la courbe, et soit ω l'angle que le rayon OP fait avec OX. Les équations de l'hélice seront

$$(12)\qquad x=r\cos\omega,\quad y=r\sin\omega,\quad z=\frac{h}{2\pi}\omega=r\operatorname{tang} i\,.\,\omega.$$

On en tire

$$dx=-r\sin\omega\,d\omega,\quad dy=+r\cos\omega\,d\omega,\quad dz=r\operatorname{tang} i\,.\,d\omega,$$

ou

$$dx=-y\,d\omega,\quad dy=+x\,d\omega,\quad dz=r\operatorname{tang} i\,.\,d\omega.$$

Par suite

$$ds=d\omega\sqrt{r^2+r^2\operatorname{tang}^2 i}=\frac{r\,d\omega}{\cos i}.$$

Les équations de la tangente sont, en supprimant le facteur $d\omega$,

$$(13)\qquad \frac{-y}{\mathrm{X}-x}=\frac{x}{\mathrm{Y}-y}=\frac{r\operatorname{tang} i}{\mathrm{Z}-z}.$$

On voit, en premier lieu, que la projection de la tangente sur le plan XOY a pour équation

$$(\mathrm{X}-x)\,x+(\mathrm{Y}-y)\,y=0$$

ou

$$\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y=r^2;$$

c'est l'équation de la tangente PR au cercle de base, menée par le pied P de l'ordonnée du point de contact. On démontre cette propriété dans les Éléments.

On voit, en second lieu, que le cosinus de l'angle que la tangente fait avec l'axe OZ de l'hélice, c'est-à-dire $\frac{dz}{ds}$, a pour valeur le quotient de $r \tang i$ par $\frac{r}{\cos i}$, c'est-à-dire $\sin i$, quantité constante. C'est encore une propriété connue.

Si l'on fait $Z=0$ dans les équations de la tangente, on trouve

$$X-x=\frac{yz}{r \tang i}, \quad Y-y=-\frac{xz}{r \tang i},$$

X et Y désignant alors les coordonnées du point R où la tangente perce le plan XOY.

On a donc

$$PR=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}=\frac{z}{\tang i}=r\omega;$$

c'est-à-dire que la distance PR est égale à l'arc AP ; cette propriété se démontre aussi dans les Éléments.

Des valeurs trouvées plus haut pour dx, dy, dz, ds, on tire

$$\frac{dx}{ds}=-\frac{y\cos i}{r}, \quad \frac{dy}{ds}=+\frac{x\cos i}{r}, \quad \frac{dz}{ds}=\sin i;$$

on en déduit

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{\cos i}{r}\cdot\frac{dy}{ds}=-\frac{\cos^2 i}{r^2}\cdot x;$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{\cos i}{r}\cdot\frac{dx}{ds}=-\frac{\cos^2 i}{r^2}y;$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=0.$$

Cette dernière relation montre que la normale principale a une direction perpendiculaire à l'axe des z ; car elle revient

à $\cos\nu=0$. Les deux premières donnent

$$\cos\lambda=-\frac{-\frac{\cos^2 i}{r^2}x}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2 i}{r^2}x\right)^2+\left(\frac{\cos^2 i}{r^2}y\right)^2}}=-\frac{x}{r}=-\cos\omega$$

et

$$\cos\mu=-\frac{\frac{\cos^2 i}{r^2}y}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2 i}{r^2}x\right)^2+\left(\frac{\cos^2 i}{r^2}y\right)^2}}=-\frac{y}{r}=-\sin\omega;$$

ce qui montre que la projection de la normale principale sur le plan des xy coïncide avec le rayon OP. La normale principale MN rencontre donc l'axe de l'hélice et lui est perpendiculaire.

Le plan osculateur se trouve dès lors déterminé par la tangente MR et par la normale principale MN ; il fait donc un angle constant avec cet axe.

Enfin, le rayon de courbure est donné par la formule

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}}=\frac{1}{\frac{\cos^2 i}{r^2}\cdot r}=\frac{r}{\cos^2 i};$$

c'est une quantité constante. Il est facile d'en déduire que le lieu des centres de courbure est une hélice de même pas que la proposée, mais tracée sur un cylindre de même axe ayant pour rayon $\rho-r$ ou $r\tang^2 i$.

Dans l'hélice, l'angle de torsion et le rayon de seconde courbure peuvent s'obtenir directement comme il suit. Soient M et M′ deux points infiniment voisins sur la courbe. Concevons que par l'origine des coordonnées on mène deux droites respectivement perpendiculaires aux plans osculateurs en M et en M′ ; ces perpendiculaires feront avec l'axe de l'hélice des angles égaux à i; et détermineront avec cet axe un angle trièdre dans lequel l'angle dièdre qui a pour arête OZ sera exprimé par $d\omega$. L'angle des deux perpendiculaires sera d'ailleurs $d\tau$. Si, dans la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

on fait

$$a = d\tau, \quad b = c = i \quad \text{et} \quad A = d\omega,$$

on trouve

$$\cos d\tau = \cos^2 i + \sin^2 i \,.\, \cos d\omega,$$

ou, attendu que $d\tau$ et $d\omega$ sont infiniment petits,

$$1 - \frac{d\tau^2}{2} = \cos^2 i + \sin^2 i \left(1 - \frac{d\omega^2}{2}\right),$$

relation qui se réduit à

$$\frac{d\tau^2}{2} = \sin^2 i \,.\, \frac{d\omega^2}{2};$$

d'où

$$d\tau = \sin i \,.\, d\omega.$$

Or

$$d\omega = \frac{ds \,.\, \cos i}{r};$$

il vient donc

$$d\tau = \frac{\sin i \cos i \, ds}{r},$$

d'où

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\sin i \cos i}{r} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{d\tau} = \rho_1 = \frac{r}{\sin i \cos i},$$

en appelant ρ_1 le rayon de seconde courbure.

§ 7. — SURFACES COURBES. — NOTIONS SUR LA COURBURE.

139. — *Plan tangent.* On sait qu'une surface, quand on la rapporte à des coordonnées rectangulaires, est représentée par une équation entre ces coordonnées.

Soit

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface considérée. Si par le point M, dont les coordonnées sont x, y, z, on fait passer une courbe tracée sur la surface, courbe qui sera en général à double courbure, les équations de la tangente en M à cette courbe seront (132)

$$(2) \qquad \frac{dx}{X - x} = \frac{dy}{Y - y} = \frac{dz}{Z - z}.$$

Mais, la courbe étant tracée sur la surface, les dx, dy, dz, doivent satisfaire à la relation qu'on obtient en différentiant l'équation (1), savoir (33)

$$(3) \qquad \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = 0.$$

Si, dans cette dernière relation, on remplace dx, dy, dz par les quantités $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ qui leur sont proportionnelles en vertu des équations (2), on trouve

$$(4) \qquad \frac{df}{dx}(X - x) + \frac{df}{dy}(Y - y) + \frac{df}{dz}(Z - z) = 0.$$

Cette relation entre les coordonnées courantes X, Y, Z de la tangente demeure la même pour toutes les tangentes que l'on peut mener à des courbes tracées sur la surface et passant par le point M. Elle représente donc le *lieu* de ces tangentes. Or, l'équation (4) étant du premier degré en X, Y, Z, représente un plan ; il en résulte ce théorème : *toutes les tangentes*