gles égaux à i; et détermineront avec cet axe un angle trièdre dans lequel l'angle dièdre qui a pour arête OZ sera exprimé par $d\omega$. L'angle des deux perpendiculaires sera d'ailleurs $d\tau$. Si, dans la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

on fait

$$a = d\tau, \quad b = c = i \quad \text{et} \quad A = d\omega,$$

on trouve

$$\cos d\tau = \cos^2 i + \sin^2 i \,.\, \cos d\omega,$$

ou, attendu que $d\tau$ et $d\omega$ sont infiniment petits,

$$1 - \frac{d\tau^2}{2} = \cos^2 i + \sin^2 i \left(1 - \frac{d\omega^2}{2}\right),$$

relation qui se réduit à

$$\frac{d\tau^2}{2} = \sin^2 i \,.\, \frac{d\omega^2}{2};$$

d'où

$$d\tau = \sin i \,.\, d\omega.$$

Or

$$d\omega = \frac{ds \,.\, \cos i}{r};$$

il vient donc

$$d\tau = \frac{\sin i \cos i \, ds}{r},$$

d'où

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\sin i \cos i}{r} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{d\tau} = \rho_1 = \frac{r}{\sin i \cos i},$$

en appelant ρ_1 le rayon de seconde courbure.

§ 7. — SURFACES COURBES. — NOTIONS SUR LA COURBURE.

139. — *Plan tangent.* On sait qu'une surface, quand on la rapporte à des coordonnées rectangulaires, est représentée par une équation entre ces coordonnées.

Soit

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface considérée. Si par le point M, dont les coordonnées sont x, y, z, on fait passer une courbe tracée sur la surface, courbe qui sera en général à double courbure, les équations de la tangente en M à cette courbe seront (132)

$$(2) \qquad \frac{dx}{X-x} = \frac{dy}{Y-y} = \frac{dz}{Z-z}.$$

Mais, la courbe étant tracée sur la surface, les dx, dy, dz, doivent satisfaire à la relation qu'on obtient en différentiant l'équation (1), savoir (33)

$$(3) \qquad \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0.$$

Si, dans cette dernière relation, on remplace dx, dy, dz par les quantités $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ qui leur sont proportionnelles en vertu des équations (2), on trouve

$$(4) \qquad \frac{df}{dx}(X-x) + \frac{df}{dy}(Y-y) + \frac{df}{dz}(Z-z) = 0.$$

Cette relation entre les coordonnées courantes X, Y, Z de la tangente demeure la même pour toutes les tangentes que l'on peut mener à des courbes tracées sur la surface et passant par le point M. Elle représente donc le *lieu* de ces tangentes. Or, l'équation (4) étant du premier degré en X, Y, Z, représente un plan; il en résulte ce théorème : *toutes les tangentes* *menées par un même point d'une surface aux différentes courbes que l'on peut faire passer par ce point sur la surface, sont dans un même plan.* En raison de cette propriété, on donne à ce plan le nom de *plan tangent*. Son équation est facile à former quand on a l'équation de la surface.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

On trouvera

$$\frac{df}{dx}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{df}{dy}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{df}{dz}=\frac{2z}{c^2}$$

et l'équation du plan tangent sera, en supprimant le facteur 2,

$$\frac{(X-x)\,x}{a^2}+\frac{(Y-y)\,y}{b^2}+\frac{(Z-z)\,z}{c^2}=0,$$

équation que l'on peut écrire

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=1.$$

Dans le cas de la sphère, on a

$$a=b=c=R;$$

l'équation du plan tangent devient donc

$$Xx+Yy+Zz=R^2,$$

et il est facile de vérifier qu'il est perpendiculaire au rayon dont les équations sont

$$X=\frac{x}{z}Z \quad \text{et} \quad Y=\frac{y}{z}Z.$$

Les angles que le plan tangent fait avec les plans coordonnés des zy, des zx et des zy ont respectivement pour cosinus

$$\frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{df}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}}.$$

(Voy. les traités de Géométrie analytique.)

140. — *Normale.* On nomme ainsi la perpendiculaire au plan tangent menée par le point de contact. Ses équations sont faciles à établir. Comme la normale passe par le point dont les coordonnées sont x, y, z, ces équations sont de la forme

$$X-x=a\,(Z-z),\quad Y-y=b\,(Z-z).$$

D'ailleurs, le plan tangent est représenté par l'équation (4) du numéro précédent. Or on sait que si une droite a pour équations

$$x=az+m,\quad y=bz+n,$$

et si un plan est représenté par

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

les conditions de perpendicularité sont $a=\frac{A}{C}$ et $b=\frac{B}{C}$. Dans le cas actuel, on aura donc

$$a=\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dz}\right)} \quad \text{et} \quad b=\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\left(\frac{df}{dz}\right)}.$$

Par conséquent, les équations de la normale sont

$$\mathrm{X}-x=\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}(\mathrm{Z}-z) \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}-y=\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}(\mathrm{Z}-z),$$

ce qu'on peut écrire sous la forme plus symétrique

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{X}-x}{\left(\frac{df}{dx}\right)}=\frac{\mathrm{Y}-y}{\left(\frac{df}{dy}\right)}=\frac{\mathrm{Z}-z}{\left(\frac{df}{dz}\right)}.$$

Les cosinus des angles que cette droite fait avec les axes des x, des y et des z ont respectivement pour valeur

$$\frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{df}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}}.$$

REMARQUE. Lorsque l'équation de la surface est donnée sous la forme

$$z=\varphi(x,y) \quad \text{ou} \quad \varphi(x,y)-z=0,$$

la dérivée du premier membre par rapport à z se réduit à -1; et si l'on représente par p et q les dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y (57), les cosinus des angles que la normale fait avec les axes deviennent

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2-1}}.$$

En même temps, les équations de la normale deviennent elles-mêmes

$$(\mathrm{X}-x)+p(\mathrm{Z}-z)=0,$$

et

$$(\mathrm{Y}-y)+q(\mathrm{Z}-z)=0,$$

forme sous laquelle il est utile de les retenir.

141. — Tout plan mené suivant la normale à une surface porte lui-même le nom de *plan normal*. L'équation générale d'un plan normal est de la forme (6)

$$\left[(\mathrm{X}-x)\frac{df}{dz}-(\mathrm{Z}-z)\frac{df}{dx}\right]+\lambda\left[(\mathrm{Y}-y)\frac{df}{dz}-(\mathrm{Z}-z)\frac{df}{dy}\right]=0,$$

λ désignant une indéterminée. C'est bien, en effet, l'équation d'un plan; et l'on reconnaît aisément que ce plan contient la normale, car si l'on y remplace $\mathrm{X}-x$, et $\mathrm{Y}-y$ par leurs valeurs en $\mathrm{Z}-z$ tirées des équations (5) de la normale, l'équation (6) est satisfaite, quel que soit Z.

§ 8. — SURFACES ENVELOPPES.

142. — Soit $f(x, y, z, a)=0$, l'équation d'une famille de surfaces qui ne diffèrent que par la valeur du paramètre a. Si l'on change a en $a+da$, les deux courbes $f(x, y, z, a)=0$, et $f(x, y, z, a+da)=0$, seront dites infiniment voisines l'une de l'autre. Leur intersection sera une courbe à laquelle on donne le nom de *caractéristique*. Le lieu des caractéristiques ainsi déterminées par l'intersection de deux surfaces infiniment voisines, faisant partie d'une même famille, est ce que l'on appelle l'*enveloppe* de ces surfaces.

La recherche de l'équation de l'enveloppe d'une famille de surfaces est tout à fait analogue à celle de l'enveloppe d'une famille de courbes (106).

Soient

$$(1) \qquad f(x, y, z, a)=0,$$

et

$$(2) \qquad f(x, y, z, a+\Delta a)=0$$

les équations de deux surfaces de la même famille; leur intersection sera représentée par l'ensemble des équations (1) et (2). Mais on peut remplacer l'équation (2) par la suivante, qui en est une conséquence.

$$(3) \qquad \frac{f(x, y, z, a+\Delta a)-f(x, y, z, a)}{\Delta a}=0.$$

Si l'on fait tendre Δa vers zéro, l'équation (3) tendra vers

$$(4) \qquad f'_a(x, y, z, a)=0,$$

et l'intersection des deux surfaces deviendra la caractéristique qui répond à la valeur particulière a. Pour avoir le lieu des caractéristiques, ou l'enveloppe cherchée, il suffira donc d'éliminer a entre les équations (1) et (4).

Ainsi, *pour obtenir l'enveloppe d'une famille de surfaces représentées par une équation telle que* $f(x, y, z, a)=0$, *il suffit d'éliminer le paramètre* a *entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à ce paramètre.*

EXEMPLE I. *Un plan se meut en passant constamment par un point donné et en demeurant à une distance constante d'un second point donné; on demande l'enveloppe des positions de ce plan.* Prenons le premier point pour origine, et faisons passer l'axe des z par le second point; l'équation du plan mobile pourra être mise sous la forme

$$(1) \qquad X\cos\alpha + Y\sin\alpha + kZ=0.$$

On voit, en effet, que ce plan passe par l'origine. De plus, sa distance à un point situé sur l'axe des z à une distance h de l'origine est exprimée par

$$\frac{kh}{\sqrt{1+k^2}},$$

quantité constante qui peut être regardée comme donnée, ce qui détermine k. Le paramètre arbitraire est ici l'angle α. Si l'on différentie l'équation (1) par rapport à ce paramètre, on obtient

$$(2) \qquad -X\sin\alpha + Y\cos\alpha=0.$$

L'équation (1) peut d'ailleurs s'écrire

$$X\cos\alpha + Y\sin\alpha = -kZ.$$

Élevant au carré et ajoutant, on obtient

$$(3) \qquad X^2+Y^2=k^2Z^2,$$

c'est l'équation d'un cône à base circulaire, comme on pouvait s'y attendre.

II. *Touver l'enveloppe des sphères de même rayon dont les centres sont sur une circonférence donnée.* L'équation de la sphère mobile est

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2,$$

en prenant pour axe des z la perpendiculaire élevée par le centre du cercle donné sur le plan de ce cercle. En même temps on a

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

Éliminant d'abord β entre ces deux équations, on obtient

$$(2) \quad x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\sqrt{R^2-\alpha^2}.y+R^2-r^2=0.$$

Différentiant par rapport à α, on trouve, après avoir divisé par 2,

$$(3) \qquad -x+\frac{\alpha y}{\sqrt{R^2-\alpha^2}}, = 0$$

d'où

$$\alpha = \frac{Rx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

et

$$\sqrt{R^2-\alpha^2} = \frac{Ry}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Substituant dans (2) et réduisant, on obtient

$$(4) \qquad x^2+y^2-2R\sqrt{x^2+y^2}+z^2+R^2-r^2=0,$$

c'est l'équation d'un *tore*, comme on pouvait le prévoir.

143. — En chaque point d'une caractéristique, le plan tangent est le même pour l'enveloppe et pour l'enveloppée. Soient, en effet, S_1, S_2, S_3 trois surfaces consécutives de la même famille; AB l'intersection de S_1 et S_2, A'B' l'intersection de S_2 et de S_3. Les deux courbes AB et A'B' seront deux caractéristiques infiniment voisines; par conséquent, deux courbes infiniment voisines sur l'enveloppe. Soit M un point quelconque de la caractéristique AB ; joignons-le à un point M' infiniment voisin sur la caractéristique A'B', et menons MT tangent à AB en M. La droite MT, tangente à une courbe tracée sur la surface S_2 et sur l'enveloppe, est tangente à ces deux surfaces. La droite MM', corde d'un arc infiniment petit, se

confond avec sa tangente en M, c'est-à-dire avec une tangente en M à la surface S_2 ou à l'enveloppe. Donc le plan des droites MT et MM' est tangent en M à la surface S_2 et à l'enveloppe ; donc ces deux surfaces ont le même plan tangent au point commun M. Or, ce point M est un point quelconque de la caractéristique AB. Donc enfin l'enveloppe et l'enveloppée S_2 ont les mêmes plans tangents aux différents points de la courbe commune AB; donc ces deux surfaces sont tangentes le long de cette courbe. On en dirait autant d'une enveloppée quelconque.

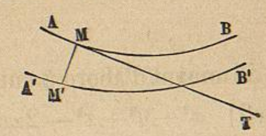

Fig. 31.

Mais on peut aussi démontrer cette propriété par l'analyse. Soit

$$(1) \qquad f(x, y, z, a) = 0$$

l'équation de la famille de surfaces considérée, et

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

l'équation de l'enveloppe résultant de l'élimination du paramètre a entre l'équation (1) $f=0$ et sa dérivée par rapport à a

$$(3) \qquad \frac{df}{da} = 0.$$

L'équation du plan tangent en un point M d'une caractéristique, point situé sur la surface (1), est (139)

$$(4) \qquad (X-x)\frac{df}{dx}+(Y-y)\frac{df}{dy}+(Z-z)\frac{df}{dz}=0,$$

et l'équation du plan tangent au même point M, considéré comme situé sur l'enveloppe, est de même

$$(5) \qquad (X-x)\frac{d\varphi}{dx}+(Y-y)\frac{d\varphi}{dy}+(Z-z)\frac{d\varphi}{dz}=0.$$

Mais l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$ n'est autre chose que l'équation (1) dans laquelle a est remplacé par sa valeur en x, y, z tirée de $\frac{df}{da} = 0$; on aura donc les dérivées partielles $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$, en différentiant l'équation (1), pourvu qu'on y regarde a comme une fonction de x, y, z. On trouve ainsi (29, 23)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{da} \cdot \frac{da}{dx},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{df}{dy} + \frac{df}{da} \cdot \frac{da}{dy},$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{df}{dz} + \frac{df}{da} \cdot \frac{da}{dz}.$$

Mais, en vertu de l'équation $\frac{df}{da} = 0$, qui est une des équations de la caractéristique, ces relations se réduisent à

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{df}{dy}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{df}{dz}.$$

Par conséquent, les équations (5) et (6) sont identiques. Ainsi donc, en tous les points d'une même caractéristique l'enveloppe et les surfaces enveloppées ont les mêmes plans tangents. Donc enfin *chaque enveloppée est tangente à l'enveloppe*, et *la caractéristique est la ligne de contact*.

Il serait facile de vérifier cette propriété sur les exemples traités plus haut.

§ 9. — COURBURE DES SURFACES

144. — *Courbure des surfaces*. Le mot *courbure*, appliqué aux surfaces, n'a pas en Géométrie un sens plus précis que

dans le langage ordinaire ; et il n'existe aucune quantité mathématique qui en soit la mesure. On juge de la courbure d'une surface en un de ses points par celle des différentes lignes que l'on peut faire passer sur la surface par ce point.

On peut remarquer d'abord qu'il suffit de considérer les lignes planes tracées sur la surface. Car si AB est une courbe à double courbure menée sur la surface par le point M, son plan osculateur, passant par les trois points consécutifs M, M', M'', détermine dans la surface une section plane *ab* qui a deux éléments consécutifs MM' et M'M'' ou trois points consécutifs M, M', M'' communs avec AB, et qui, par conséquent, a le même cercle osculateur et le même rayon de courbure.

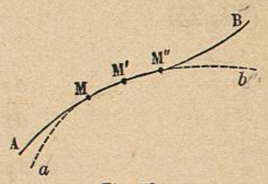

Fig. 32.

Nous allons chercher les relations qui existent entre les rayons de courbure des différentes lignes planes que l'on peut mener sur la surface par un même point M.

145. — *Théorème de Meunier*. Soit MT une tangente quelconque menée à la surface par le point M ; et soit MN la normale à la surface au point M. Le plan TMN sera un plan normal (141). Il coupera la surface suivant une courbe AB, que l'on appelle une *section normale*, et dont le centre de courbure sera en un certain point C sur MN. Nous désignerons par ρ_0 le rayon de courbure MC de la section normale AB.

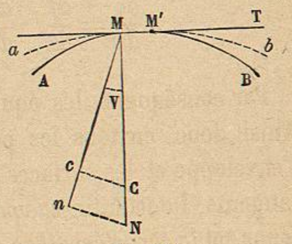

Fig. 33

Par la même tangente MT, faisons passer un second plan ; il coupera la surface suivant une courbe *ab*, que l'on peut appeler une *section oblique* ; son centre de courbure sera situé en un point *c* sur la normale M*n* à cette courbe. Nous désignerons par ρ le rayon de courbure M*c* de la section oblique *ab*.