Mais l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$ n'est autre chose que l'équation (1) dans laquelle a est remplacé par sa valeur en x, y, z tirée de $\frac{df}{da} = 0$; on aura donc les dérivées partielles $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$, en différentiant l'équation (1), pourvu qu'on y regarde a comme une fonction de x, y, z. On trouve ainsi (29, 23)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{da} \cdot \frac{da}{dx},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{df}{dy} + \frac{df}{da} \cdot \frac{da}{dy},$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{df}{dz} + \frac{df}{da} \cdot \frac{da}{dz}.$$

Mais, en vertu de l'équation $\frac{df}{da} = 0$, qui est une des équations de la caractéristique, ces relations se réduisent à

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{df}{dy}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{df}{dz}.$$

Par conséquent, les équations (5) et (6) sont identiques. Ainsi donc, en tous les points d'une même caractéristique l'enveloppe et les surfaces enveloppées ont les mêmes plans tangents. Donc enfin *chaque enveloppée est tangente à l'enveloppe*, et *la caractéristique est la ligne de contact*.

Il serait facile de vérifier cette propriété sur les exemples traités plus haut.

§ 9. — COURBURE DES SURFACES

144. — *Courbure des surfaces*. Le mot *courbure*, appliqué aux surfaces, n'a pas en Géométrie un sens plus précis que

dans le langage ordinaire ; et il n'existe aucune quantité mathématique qui en soit la mesure. On juge de la courbure d'une surface en un de ses points par celle des différentes lignes que l'on peut faire passer sur la surface par ce point.

On peut remarquer d'abord qu'il suffit de considérer les lignes planes tracées sur la surface. Car si AB est une courbe à double courbure menée sur la surface par le point M, son plan osculateur, passant par les trois points consécutifs M, M', M'', détermine dans la surface une section plane ab qui a deux éléments consécutifs MM' et M'M'' ou trois points consécutifs M, M', M'' communs avec AB, et qui, par conséquent, a le même cercle osculateur et le même rayon de courbure.

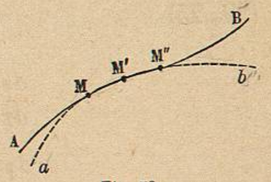

Fig. 32.

Nous allons chercher les relations qui existent entre les rayons de courbure des différentes lignes planes que l'on peut mener sur la surface par un même point M.

145. — *Théorème de Meunier*. Soit MT une tangente quelconque menée à la surface par le point M ; et soit MN la normale à la surface au point M. Le plan TMN sera un plan normal (141). Il coupera la surface suivant une courbe AB, que l'on appelle une *section normale*, et dont le centre de courbure sera en un certain point C sur MN. Nous désignerons par ρ_0 le rayon de courbure MC de la section normale AB.

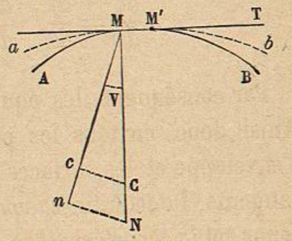

Fig. 33

Par la même tangente MT, faisons passer un second plan ; il coupera la surface suivant une courbe ab, que l'on peut appeler une *section oblique* ; son centre de courbure sera situé en un point c sur la normale Mn à cette courbe. Nous désignerons par ρ le rayon de courbure Mc de la section oblique ab.

Soit V l'angle des deux normales MN et Mn.

La première de ces normales, qui est la normale à la surface, fait avec les axes coordonnés des angles dont les cosinus ont respectivement pour valeur (140)

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad \frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

La seconde, qui est la normale principale de la courbe ab, fait avec les mêmes axes des angles qui ont pour valeur (136)

$$\rho\frac{d^2x}{ds^2},\quad \rho\frac{d^2y}{ds^2},\quad \rho\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Or, on sait que si deux droites font avec les axes, l'une des angles a, b, c, l'autre des angles a', b', c', l'angle V de ces deux droites est donné par la relation

$$\cos V = \cos a \cos a' + \cos b \cos b' + \cos c \cos c'.$$

On a donc, dans le cas actuel,

$$(1)\qquad \cos V = \frac{p\rho\dfrac{d^2x}{ds^2} + q\rho\dfrac{d^2y}{ds^2} - \rho\dfrac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{p^2+q^2+1}} = \rho\cdot\frac{p\dfrac{d^2x}{ds^2} + q\dfrac{d^2y}{ds^2} - \dfrac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Mais la courbe ab étant tracée sur la surface, dont l'équation peut être supposée donnée sous la forme $z=f(x, y)$, on peut appliquer l'équation (9) du n° 57, en prenant, au lieu d'une variable indépendante et quelconque, l'arc s de cette courbe. On peut donc écrire, en mettant s à la place de α, et s_1 à la place du coefficient différentiel s, pour éviter toute confusion,

$$\frac{d^2z}{ds^2} = r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s_1\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + p\frac{d^2x}{ds^2} + q\frac{d^2y}{ds^2}.$$

On tire de cette relation

$$p\frac{d^2x}{ds^2} + q\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{d^2z}{ds^2} = -\left[r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s_1\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right],$$

et, en substituant dans (1),

$$(2)\qquad \cos V = \rho\cdot\frac{-\left[r\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + 2s_1\left(\dfrac{dx}{ds}\cdot\dfrac{dy}{ds}\right) + t\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2\right]}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Concevons maintenant que l'on fasse varier la section oblique menée par la tangente MT, l'angle V variera ; il en sera de même de ρ ; mais les deux points M et M' ne cessant pas d'appartenir à la section oblique, les accroissements dx, dy, dz ne changeront pas; les coefficients $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ resteront donc les mêmes. D'ailleurs les coefficients p, q, r, s, t qui ne dépendent que de x, y, n'auront pas varié. Il en résulte que la quantité qui multiplie ρ dans le second membre de l'équation (2) conservera sa valeur ; en la désignant par K on peut donc écrire

$$\cos V = \rho\,.\,K.$$

Cette formule, étant générale, aura lieu encore pour $V=0$, auquel cas la section considérée se confondant avec la section normale, ρ se changera en ρ_0. On peut donc écrire aussi

$$1 = \rho_0\,.\,K.$$

En divisant ces deux égalités membre à membre on en tire

$$\cos V = \frac{\rho}{\rho_0},\quad \text{d'où}\quad \rho = \rho_0 \cos V,$$

ou

$$Mc = MC\,.\cos V,$$

ce qui montre que *le rayon de courbure de la section oblique* *est la projection, sur le plan de cette section, du rayon de courbure de la section normale.*

Cette proposition remarquable est connue sous le nom de *Théorème de Meunier*.

On peut lui donner une forme encore plus frappante. Si l'on décrit une sphère de C comme centre avec MC pour rayon, le plan TMn la coupera suivant un petit cercle dont le centre sera c. Ainsi, *les cercles suivant lesquels les divers plans qu'on peut mener par une même tangente coupent cette sphère sont les cercles osculateurs des sections correspondantes.*

146. — *Indicatrice.* Avant de comparer les courbures des sections faites suivant une même normale, il est utile d'établir une propriété des surfaces dont nous aurons à faire usage.

On nomme *indicatrice* d'une surface courbe en un point donné de cette surface, son intersection avec un plan mené parallèlement au plan tangent à une distance infiniment petite de ce plan. — Comme il s'agit d'étudier une propriété indépendante du choix des axes, on simplifie le calcul en prenant pour plan des xy le plan tangent lui-même, et pour axe des z la normale. Quant à la direction des deux axes des x et des y, nous la laisserons indéterminée pour le moment.

Soit $z=f(x, y)$ l'équation de la surface rapportée à ce système d'axes.

On a vu (71) qu'en développant la fonction $f(x, y)$ par la formule de Maclaurin on peut écrire

$$(1)\qquad z=f(0,0)+\frac{1}{1}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)_0 x+\left(\frac{df}{dy}\right)_0 y\right]$$
$$+\frac{1}{1\,.\,2}\left[\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 x^2+2\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)_0 xy+\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_0 y^2\right]+\ldots$$

Si l'on fait $z=h$, la lettre h représentant une quantité infiniment petite, positive ou négative, on aura l'équation d'un plan parallèle au plan tangent et infiniment voisin de ce plan ; son intersection avec la surface sera donc l'indicatrice ;

et comme celle-ci se projette en vraie grandeur sur le plan des xy qui lui est parallèle, on aura son équation en remplaçant z par h dans l'équation (1). Mais cette équation peut être simplifiée. En premier lieu, h étant infiniment petit, il en sera, en général, de même des coordonnées x et y des points communs à la surface et au plan $z=h$; on pourra donc négliger les termes affectés des puissances de x et de y supérieures à la seconde. En second lieu, la surface passant par l'origine, on a $f(0, 0)=0$. Enfin, le plan des xy étant le plan tangent, les dérivées partielles $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ s'annulent pour l'origine, c'est-à-dire pour $x=0$ et $y=0$. Car il faut que l'équation du plan tangent, qui, dans le cas de $z=f(x, y)$ est

$$(\mathrm{X}-x)\frac{df}{dx}+(\mathrm{Y}-y)\frac{df}{dy}-(\mathrm{Z}-z)=0,$$

se réduise à $\mathrm{Z}=0$ pour $x=0$, $y=0$, $z=0$, indépendamment de X et de Y, ce qui exige que les termes en X et Y disparaissent. Si donc on pose pour abréger

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0=r_0,\quad \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)_0=s_0,\quad \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_0=t_0,$$

il restera pour l'équation de l'indicatrice

$$2h=r_0x^2+2s_0xy+t_0y^2.$$

On peut même la simplifier encore, car, la direction des axes des x et des y étant jusqu'ici indéterminée, on peut la choisir de manière à faire disparaître le terme en xy. Il reste alors

$$(2)\qquad 2h=r_0x^2+t_0y^2.$$

147. — Si r_0 et t_0 sont de même signe, il faut, pour que cette équation représente une courbe réelle, donner le même signe à h ; ce qui veut dire qu'aux environs du point de contact la surface est tout entière d'un même côté du plan tangent. L'indicatrice est alors une *ellipse*. Elle se réduit à l'origine pour $h=0$.

L'ellipsoïde, le paraboloïde elliptique et l'hyperboloïde à deux nappes offrent l'exemple du cas dont nous parlons.

Si r_0 et t_0 sont de signe contraire, on peut donner à h le signe $+$ ou le signe $-$. Ainsi la surface s'étend alors des deux côtés du plan tangent. — Pour h positif ou pour h négatif, l'indicatrice est une *hyperbole ;* mais les deux hyperboles, projetées sur le plan des xy, sont *conjuguées ;* c'est-à-dire qu'elles ont les mêmes asymptotes ; mais que si l'une est située dans le premier et le troisième angle des asymptotes, l'autre est située dans le deuxième et le quatrième. Elles se réduisent toutes deux à leurs asymptotes pour $h=0$. L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique offrent l'exemple de ce cas.

Si l'on a $r_0=0$, l'indicatrice se compose de deux droites parallèles à l'axe des x et infiniment voisines. Elle se réduit à l'axe des x pour $h=0$.

Si l'on a $t_0=0$, l'indicatrice se compose de deux droites parallèles à l'axe des y, et elle se réduit à cet axe pour $h=0$. Le cylindre est un exemple de ce cas.

Il en est de même du cône, parce qu'un plan infiniment voisin du plan tangent coupe la surface suivant une parabole qui dégénère en deux droites parallèles.

148. — *Théorème d'Euler.* Nous pouvons maintenant reprendre l'étude de la courbure des surfaces, et comparer les courbures des sections planes faites suivant une même normale. — Supposons, comme tout à l'heure que O soit le point de la surface que l'on considère, que XOY soit le plan tangent et OZ la normale. Soit ZOU un plan quelconque mené suivant cette normale, et OA son intersection avec la surface. Soit M

un point de cette intersection très-voisin du point O ; soit MP son ordonnée. Joignons OM ; menons MH parallèle à OU, et MB perpendiculaire à OM. Enfin soit C le milieu de OB.

Le cercle qui, dans le plan ZOU, a le point C pour centre et CO pour rayon tendra vers le cercle osculateur de l'arc OA en O, quand le point M se rapprochera indéfiniment du point O. Car, dans le triangle OCM, l'angle en C tendant vers zéro, les angles égaux COM et CMO tendent vers 90° ; et par conséquent CM tend vers une perpendiculaire à la corde OM, ou vers une normale à l'arc OM.

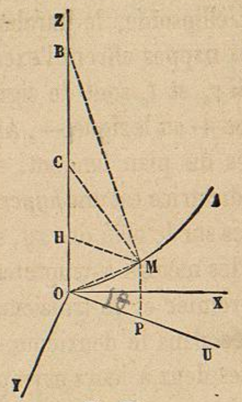

Fig. 34.

En appelant ρ le rayon de courbure de la section OA au point O, on a donc

$$\rho=\lim.\mathrm{OC}=\lim.\frac{1}{2}\mathrm{OB}=\lim.\frac{1}{2}\left(\mathrm{OH}+\frac{\overline{\mathrm{MH}}^2}{\mathrm{OH}}\right)$$

$$=\lim.\frac{1}{2}\mathrm{OH}+\lim.\frac{\overline{\mathrm{MH}}^2}{2\,\mathrm{OH}}.$$

Or

$$\lim.\frac{1}{2}\mathrm{OH}=0.$$

Donc

$$\rho=\lim.\frac{\overline{\mathrm{MH}}^2}{2\,\mathrm{OH}}$$

ou, en posant $\mathrm{OH}=h$ et $\mathrm{MH}=u$,

$$\rho=\lim.\frac{u^2}{2h}$$

Mais si θ représente l'angle XOU, θ et u peuvent être regardés comme les coordonnées polaires du point M dans un plan parallèle à XOY. Ce plan coupe la surface suivant l'indicatrice, dont l'équation est

$$r_0 x^2 + t_0 y^2 = 2h$$

ou, en coordonnées polaires,

$$u^2 (r_0 \cos^2 \theta + t_0 \sin^2 \theta) = 2h.$$

Or, à la limite, on a

$$\rho = \frac{u^2}{2h},$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2h}{u^2}.$$

Donc enfin

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho} = r_0 \cos^2 \theta + t_0 \sin^2 \theta.$$

Supposons d'abord que l'indicatrice soit une ellipse. Soient R_1 et R_2 le maximum et le minimum des valeurs de ρ, correspondantes à $\theta = 0$ et à $\theta = 90°$ ou *vice versa*, on aura

$$\frac{1}{R_1} = r_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{R_2} = t_0.$$

Par conséquent

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \theta + \frac{1}{R_2} \sin^2 \theta.$$

Changeons θ en $\theta + 90°$; et soit ρ_1 la valeur correspondante de ρ ; on aura de même

$$(5) \qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R_1} \sin^2 \theta + \frac{1}{R_2} \cos^2 \theta.$$

En ajoutant membre à membre les relations (4) et (5), on obtient

$$(6) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

c'est-à-dire que *la somme des courbures de deux sections normales perpendiculaires entre elles est une quantité constante.* La formule (6) est connue sous le nom de *théorème d'Euler*.

Dans le cas où l'on a $r_0 = t_0$, c'est-à-dire où l'indicatrice est un cercle, il en résulte $R_1 = R_2$; et l'on a $\rho = R_1$, indépendamment de l'angle θ. Les points d'une surface qui jouissent de cette propriété que la courbure des sections normales est la même dans toutes les directions portent le nom d'*ombilics*.

Dans l'ellipsoïde, par exemple, il y a quatre ombilics : ce sont les points où le plan tangent est parallèle à une section circulaire ; car, en ces points, l'indicatrice est évidemment un cercle.

149. — Supposons r_0 et t_0 de signes contraires ; en donnant à h des valeurs positives et négatives et opérant comme ci-dessus, on trouvera

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho} = \pm \left(\frac{1}{R_1} \cos^2 \theta - \frac{1}{R_2} \sin^2 \theta \right).$$

Le rayon de courbure ρ a, dans ce cas, deux minimums R_1 et R_2 répondant à $\theta = 0$ et à $\theta = 90°$; et il devient infini pour

$$\operatorname{tang} \theta = \pm \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \pm \sqrt{-\frac{r_0}{t_0}};$$

ce sont les directions asymptotiques.

En résumé, on voit, par la relation $\rho = \frac{u^2}{2h}$, que le rayon de courbure d'une section normale est proportionnel au carré du rayon vecteur de l'indicatrice.