DEUXIÈME PARTIE

PREMIERS ÉLÉMENTS DU CALCUL INTÉGRAL

I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES

159. — Le calcul intégral est l'inverse du calcul différentiel. Dans ce dernier, les questions se ramènent toujours en définitive à trouver la dérivée d'une fonction ; dans le calcul intégral, au contraire, les questions sont toujours ramenées à trouver une fonction connaissant sa dérivée. Les notions fondamentales du calcul intégral peuvent être présentées de diverses manières ; la plus simple est celle qui s'appuie sur les considérations géométriques suivantes.

160. — Soit $y=f(x)$ l'équation, en coordonnées rectangulaires, d'une courbe plane AB ; et proposons-nous d'évaluer l'aire AA′B′B comprise entre cette courbe, l'axe des x et les deux ordonnées AA′ et BB′, répondant aux abscisses OA′$=a$ et OB′$=b$.

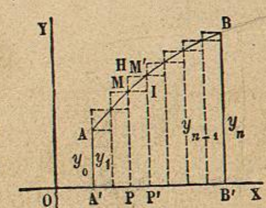

Fig. 35.

Pour cela, divisons l'intervalle A′B′ en n parties égales, et par tous les points de division menons des ordonnées ; l'aire à évaluer se trouvera divisée en n petits trapèzes curvilignes tels que MPP′ M′. Par les points M et M′ menons les droites MI et M′ H parallèles à l'axe des x ; nous formerons deux rectangles : l'un MPP′ I plus petit que le trapèze correspondant MPP′ M′, l'autre HPP′ M′ plus grand que ce trapèze. Si nous opérons de même pour les autres, nous formerons deux séries de rectangles, les uns intérieurs et dont la somme sera moindre que l'aire à évaluer, les autres extérieurs et dont la somme sera plus grande que l'aire à évaluer.

Si donc on désigne par U cette aire, par $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ les ordonnées successives tracées sur la figure, depuis AA' jusqu'à BB', et h l'intervalle PP' compris entre deux ordonnées consécutives, on aura

$$U > y_0 h + y_1 h + y_2 h \ldots + y_{n-1} h$$

et

$$U < y_1 h + y_2 h \ldots + y_{n-1} h + y_n h.$$

Les seconds membres de ces inégalités diffèrent de $y_n h - y_0 h$ ou de $(y_n - y_0) h$.

Or le facteur $y_n - y_0$ est constant, et le facteur h peut devenir aussi petit que l'on voudra en prenant n suffisamment grand. L'aire U est donc comprise entre deux sommes dont la différence peut être rendue aussi petite que l'on voudra ; ce qui revient à dire que U est la limite commune vers laquelle tendent ces deux sommes ; on peut donc écrire, par exemple,

$$U = \lim . \Sigma\, yh,$$

la caractéristique Σ représentant une somme de quantités analogues au produit yh écrit à sa droite.

Lorsqu'on passe à la limite, c'est-à-dire lorsque n devient infiniment grand, h devient infiniment petit ; et on peut le représenter par dx, puisque ce n'est autre chose alors que l'accroissement infiniment petit de l'abscisse. En même temps, on remplace la caractéristique Σ, qui se rapporte à une somme de quantités variant d'une manière discontinue, par la caractéristique $\int$, qui se rapporte à une somme de quantités variant d'une manière continue, ou par degrés infiniment petits.

Et, comme la somme Σ n'indiquait qu'une valeur approchée de l'aire AA'B'B, tandis que la somme $\int$ indique l'aire exacte, ou la *somme intégrale* des éléments de cette aire, on donne le nom d'*intégrale* à cette seconde somme. On écrit donc

$$(1) \qquad U = \int y\,dx,$$

égalité qu'on énonce : U *égale l'intégrale de* ydx.

Chacun des produits analogues à ydx est ce que l'on appelle un *élément* de l'intégrale.

Cette intégrale est dite *indéfinie*, lorsque l'on n'indique pas entre quelles limites elle est prise, c'est-à-dire lorsque l'on n'indique pas les abscisses extrêmes. Si l'on veut indiquer les limites, on écrit au bas du signe $\int$ l'abscisse répondant à la limite inférieure, et au haut de ce signe l'abscisse répondant à la limite supérieure ; si, par exemple, on veut indiquer que l'intégrale est prise depuis l'abscisse a jusqu'à l'abscisse x, on écrit

$$(2) \qquad U = \int_a^x y\,dx,$$

et l'intégrale est dite *définie*. Si l'intégrale est prise de AA' à BB', c'est-à-dire depuis l'abscisse a jusqu'à l'abscisse b, on écrit de même

$$(3) \qquad U = \int_a^b y\,dx,$$

ce qui s'énonce : U *égale l'intégrale de* a *à* b *de* ydx, ou U *égale somme de* a *à* b *de* ydx. L'intégrale définie prend dans ce cas une valeur particulière au lieu de conserver la forme générale représentée par (2).

Le calcul d'une intégrale définie est ce que l'on nomme une *quadrature*, parce que cette intégrale exprime une aire, ou le carré équivalent à cette aire.

161. — Il s'agit maintenant de faire voir comment ce calcul peut être effectué.

Considérons d'abord l'aire AA′PM limitée à l'ordonnée fixe AA′, et à une ordonnée quelconque MP ou y. Cette aire est évidemment une fonction de x ; car elle varie avec l'abscisse OP et prend une valeur déterminée pour chaque valeur attribuée à cette abscisse. Nous pouvons donc poser

$$U = F(x).$$

Le trapèze MPP′M′ est l'accroissement ΔU de l'aire considérée. Mais ce trapèze est compris entre les rectangles MPP′I et HPP′M′ ; si donc on désigne PP′ par Δx, on pourra écrire

$$y\,\Delta x < \Delta U < (y + \Delta y)\,\Delta x,$$

$y + \Delta y$ représentant l'ordonnée M′P′. En divisant les trois membres par Δx, on a

$$y < \frac{\Delta U}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Si maintenant on fait tendre Δx vers zéro, il en sera de même de Δy, et le rapport $\frac{\Delta U}{\Delta x}$ tendra vers $F'(x)$; à la limite on aura donc

$$F'(x) = y \quad \text{ou} \quad F'(x) = f(x),$$

c'est-à-dire que *la fonction* f (x) *qui représente l'ordonnée est la dérivée de la fonction* F (x), *qui représente l'aire de la courbe.* En mettant donc pour y sa valeur dans la relation (1), il vient

$$(4) \qquad U = \int F'(x)\,dx.$$

On pourrait égaler le second membre à $F(x)$, qui est la valeur de U ; mais il y a ici une remarque importante à faire. On a vu que la dérivée d'une constante est nulle ; en sorte que si l'on ajoute une constante à une fonction quelconque, sa dérivée ne change pas. Lors donc que l'on remonte de la dérivée à la fonction primitive qui l'a produite, on doit, si l'on veut que le résultat ait toute la généralité désirable, ajouter à cette fonction une constante arbitraire. On devra donc écrire

$$(5) \qquad \int F'(x)\,dx = F(x) + C,$$

C désignant une constante arbitraire. Cette constante se détermine quand on considère l'intégrale définie. Car si l'on prend, par exemple, pour limites de l'intégrale a et x et que l'on pose

$$\int_a^x F'(x)\,dx = F(x) + C,$$

l'intégrale devra s'annuler pour $x = a$, puisque alors l'aire U est réduite à zéro. Ceci exige qu'on ait

$$C = -F(a).$$

On doit donc écrire

$$(6) \qquad \int_a^x F'(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Pour $x = b$, on aurait

$$(7) \qquad \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

On voit que, pour obtenir l'aire cherchée, il faut *déterminer la fonction* F (x) *dont* f (x) *est la dérivée, y remplacer* x *par la limite supérieure, puis par la limite inférieure, et retrancher le second résultat du premier.*

Remarque. Dans le raisonnement que nous avons fait pour trouver la limite de $\frac{\Delta U}{\Delta x}$, nous avons supposé l'ordonnée croissante ; si elle était décroissante, ces raisonnements subsisteraient encore ; il n'y aurait de changé que le sens des inégalités.

162. — Les équations (6) et (7) constituent un théorème de calcul qui est indépendant de toute considération géométrique. Car si l'on donne une fonction dérivée quelconque $F'(x)$, en la supposant continue, on peut toujours la prendre pour l'ordonnée d'une courbe, et poser

$$y = F'(x) ;$$

dès lors le premier membre de l'équation (7) représentera l'aire de cette courbe, depuis l'abscisse a jusqu'à l'abscisse b ; et l'équation (7) montre elle-même comment cette aire pourra être calculée. On peut donc dire, sans avoir égard aux considérations géométriques : *si* F′(x) *désigne la dérivée d'une fonction continue, la limite vers laquelle tend la somme des produits* F′(x).dx, *quand on y fait varier* x *d'une manière continue depuis une valeur* a *jusqu'à la valeur* b, *s'obtient en cherchant la fonction dont* F′(x) *est la dérivée, remplaçant dans cette fonction la variable* x *par la limite supérieure* b *de* x, *puis par sa limite inférieure* a, *et retranchant le second résultat du premier*. On verra que ce théorème trouve des applications fréquentes. C'est le *théorème fondamental* du calcul intégral ; et l'on aperçoit que ce calcul est l'inverse du calcul différentiel puisqu'il consiste à remonter à une fonction dont on a la dérivée.

Remonter ainsi de la dérivée à une fonction est ce que l'on appelle *intégrer* cette dérivée ; cette locution est abrégée ; elle signifie qu'il faut préalablement multiplier cette dérivée par dx, et chercher la limite vers laquelle tend la somme des

produits analogues quand on fait varier x d'une manière continue entre des limites données.

Remarque. Tout ce qui précède suppose que la fonction $f(x)$ ou $F'(x)$ conserve une valeur finie depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$. On peut avoir à considérer des limites infinies, et, dans ce cas, il peut se faire que la fonction $f(x)$ croisse indéfiniment à mesure que x augmente en valeur absolue ; l'intégrale se compose alors d'éléments qui croissent indéfiniment eux-mêmes. Néanmoins, il peut arriver que cette intégrale conserve une valeur finie ; on en verra des exemples plus loin.

163. — Afin de donner sur-le-champ un exemple de ce genre de calcul, supposons qu'il s'agisse de trouver l'aire comprise entre la courbe $y = 3x^2$, l'axe des x, et les ordonnées répondant aux abscisses 1 et 3. En appelant U cette aire, on aura

$$U = \int_1^3 3x^2\,dx.$$

Il s'agit donc de trouver la fonction dont $3x^2$ est la dérivée ; il est aisé de voir que c'est x^3. Si, dans cette fonction x^3, on remplace x par 3, on obtient 27 ; si l'on remplace x par 1, on obtient 1 ; le résultat est donc 27 — 1 ou 26. Ainsi

$$\int_1^3 3x^2\,dx = 26.$$

164. — Avant d'aller plus loin, il y a quelques remarques utiles à faire.

I. Nous avons supposé jusqu'ici les axes rectangulaires ; s'ils faisaient entre eux un angle θ différent de 90°, les rectangles élémentaires, tels que yh, seraient remplacés par des parallélogrammes ayant pour mesure $yh \sin\theta$. On aurait donc

$$U = \lim.\Sigma\, yh \sin\theta = \sin\theta . \lim \Sigma\, yh$$

ou

$$U = \sin\theta \int y\,dx,$$

c'est-à-dire qu'il suffirait de multiplier par $\sin\theta$ l'expression précédemment obtenue pour l'aire de la courbe.

II. *Une intégrale peut avoir des éléments négatifs.* Soit, par exemple, la courbe ABMCD, qui coupe deux fois l'axe des x ; l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x, et les ordonnées AO et DD′, présente une partie BMC, située au-dessous de l axe des x. Dans cette partie de la courbe, l'ordonnée étant négative, on regarde l'aire de cette portion de courbe comme négative elle-même.

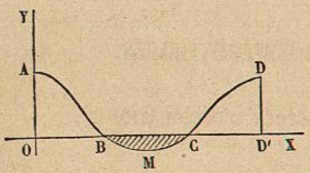

Fig. 36.

S'il arrivait que la partie négative fût égale en valeur absolue à la partie positive, l'aire totale serait regardée comme nulle.

III. *Les signes* $\int$ *et* d *représentant des opérations inverses, se détruisent lorsqu'ils se superposent.* Ainsi $\int du = u$, sauf la constante arbitraire. Ainsi encore

$$d.\int f'(x)\,dx = f'(x)\,dx.$$

IV. a vu que l'on a généralement

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

On convient d'écrire de même

$$\int_b^a f'(x)\,dx = f(a) - f(b),$$

d'où il résulte

$$\int_b^a f'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)\,dx,$$

c'est-à-dire que *l'on change le signe d'une intégrale en intervertissant ses limites.* Cette convention est quelquefois commode.

II. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES.

§ I. — PRINCIPES ET PROCÉDÉS D'INTÉGRATION

165. — I. *Lorsque la quantité placée sous le signe* $\int$ *est affectée d'un facteur constant, ce facteur peut être mis hors du signe.* Soit, par exemple, l'expression

$$(1) \qquad \int A\,f(x)\,dx.$$

Le facteur A affectant tous les éléments de l'intégrale est un facteur commun à tous les termes d'une somme, et peut, par conséquent, être mis en évidence ; on peut donc écrire

$$(2) \qquad A\int f(x)\,dx.$$

Réciproquement : *lorsqu'un facteur commun est placé devant le signe d'intégration, on peut le faire passer sous le signe.* Dans l'expression (2), par exemple, le facteur A affecte une somme ; on peut donc effectuer la multiplication, ce qui revient à affecter du facteur A chacun des termes de la somme, et peut s'écrire sous la forme (1).

166. — II. *L'intégrale d'une somme de différentielles est égale à la somme des intégrales de ces différentielles.*