ou

$$U = \sin\theta \int y\,dx,$$

c'est-à-dire qu'il suffirait de multiplier par $\sin\theta$ l'expression précédemment obtenue pour l'aire de la courbe.

II. *Une intégrale peut avoir des éléments négatifs.* Soit, par exemple, la courbe ABMCD, qui coupe deux fois l'axe des x ; l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x, et les ordonnées AO et DD′, présente une partie BMC, située au-dessous de l axe des x. Dans cette partie de la courbe, l'ordonnée étant négative, on regarde l'aire de cette portion de courbe comme négative elle-même.

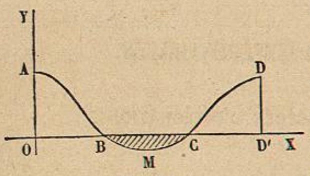

Fig. 36.

S'il arrivait que la partie négative fût égale en valeur absolue à la partie positive, l'aire totale serait regardée comme nulle.

III. *Les signes* $\int$ *et* d *représentant des opérations inverses, se détruisent lorsqu'ils se superposent.* Ainsi $\int du = u$, sauf la constante arbitraire. Ainsi encore

$$d.\int f'(x)\,dx = f'(x)\,dx.$$

IV. a vu que l'on a gén éralement

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

On convient d'écrire de même

$$\int_b^a f'(x)\,dx = f(a) - f(b),$$

d'où il résulte

$$\int_b^a f'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)\,dx,$$

c'est-à-dire que *l'on change le signe d'une intégrale en intervertissant ses limites.* Cette convention est quelquefois commode.

II. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES.

§ I. — PRINCIPES ET PROCÉDÉS D'INTÉGRATION

165. — I. *Lorsque la quantité placée sous le signe* $\int$ *est affectée d'un facteur constant, ce facteur peut être mis hors du signe.* Soit, par exemple, l'expression

$$(1) \qquad \int A\,f(x)\,dx.$$

Le facteur A affectant tous les éléments de l'intégrale est un facteur commun à tous les termes d'une somme, et peut, par conséquent, être mis en évidence ; on peut donc écrire

$$(2) \qquad A\int f(x)\,dx.$$

Réciproquement : *lorsqu'un facteur commun est placé devant le signe d'intégration, on peut le faire passer sous le signe.* Dans l'expression (2), par exemple, le facteur A affecte une somme ; on peut donc effectuer la multiplication, ce qui revient à affecter du facteur A chacun des termes de la somme, et peut s'écrire sous la forme (1).

166. — II. *L'intégrale d'une somme de différentielles est égale à la somme des intégrales de ces différentielles.*

Soit, par exemple, l'expression

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\, dx.$$

Elle revient à la somme des quantités suivantes (162) :

$$\begin{aligned} & f(a)\, dx + \varphi(a)\, dx \\ & + f(a + dx)\, dx + \varphi(a + dx)\, dx \\ & + f(a + 2\, dx)\, dx + \varphi(a + 2\, dx)\, dx \\ & + f(a + 3\, dx)\, dx + \varphi(a + 3\, dx)\, dx \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + f[a + (n-1)\, dx]\, dx + \varphi[a + (n-1)\, dx]\, dx, \end{aligned}$$

en supposant $b = a + n\,dx$. Or la somme des termes qui forment la première colonne est égale à $\int_a^b f(x)\, dx$, et la somme des termes qui forment la seconde colonne est égale à $\int_a^b \varphi(x)\, dx$. On peut donc écrire

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

On étendrait sans peine la démonstration à la somme d'un nombre quelconque de différentielles.

167. — III. *L'intégrale de la différence de deux différentielles est égale à la différence entre les intégrales de ces différentielles.* C'est-à-dire que l'on a

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

La démonstration est la même qu'au numéro précédent; il suffit de remplacer les signes + qui séparaient les deux termes de chaque élément de l'intégrale proposée par des signes —.

Il résulte de cette proposition et de la précédente que *l'intégrale de la somme algébrique d'autant de différentielles qu'on voudra est égale à la somme algébrique des intégrales de ces différentielles.* Ces intégrales se trouvent ainsi affectées des mêmes signes que les différents termes d'un même élément de l'intégrale proposée. On aurait, par exemple,

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

168. — On a vu, dans le calcul différentiel, qu'il existe une règle générale pour la différentiation des fonctions (13). Il n'existe malheureusement pas de règle générale analogue pour l'intégration des différentielles. Si l'expression qui est sous le signe $\int$ est une différentielle connue, l'intégration se trouve immédiatement effectuée; si cela n'a pas lieu, on peut, en employant divers procédés, chercher à ramener l'expression donnée à une différentielle connue; mais on ne peut pas toujours être certain à l'avance qu'un de ces procédés réussira.

Ces procédés sont au nombre de trois. Le plus simple consiste à *multiplier et diviser par un facteur constant* convenablement choisi.

Soit, par exemple, l'intégrale $\int x^m\, dx$.

Telle qu'elle se présente, l'expression sous le signe $\int$ n'est pas une différentielle connue; mais on voit aisément qu'on la ramènerait à une différentielle connue en multipliant sous le signe par $m+1$; car $(m+1)\, x^m\, dx$ est la différentielle de x^{m+1}. Or on peut effectuer cette multiplication sous le signe, à la condition de diviser par $m+1$ hors du signe (165), car ce sont deux opérations contraires effectuées sur l'intégrale proposée. On peut donc écrire

$$\int x^m\,dx = \frac{1}{m+1}\int (m+1)\,x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \mathrm{C},$$

en ajoutant une constante arbitraire C si les limites de l'intégrale ne sont pas indiquées.

Soit encore l'expression $\int a^x\,dx$.

La quantité sous le signe $\int$ n'est pas une différentielle connue, mais elle deviendrait une différentielle connue si elle était multipliée par $\frac{\log a}{\log e}$. Or on peut effectuer cette multiplication sous le signe, à la condition de multiplier hors du signe par la quantité inverse $\frac{\log e}{\log a}$; on aura donc

$$\int a^x\,dx = \frac{\log e}{\log a}\int \frac{\log a}{\log e}\,a^x\,dx = \frac{\log e}{\log a}.\,a^x + \mathrm{C}.$$

169. — Le second procédé d'intégration consiste à *changer de variable*, c'est-à-dire à établir entre la variable qui figure sous le signe $\int$ et une variable auxiliaire une relation telle qu'en remplaçant la variable donnée par sa valeur tirée de cette relation, l'expression placée sous le signe d'intégration se change en une différentielle connue.

Soit, par exemple, l'expression $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

La quantité placée sous le signe $\int$ n'est pas une différentielle connue ; mais si l'on pose $x = au$, d'où $dx = a\,du$, et

qu'on fasse la substitution, on trouve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\,du}{\sqrt{a^2-a^2u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arc}.\sin u + \mathrm{C},$$

ou, en remettant pour u sa valeur $\frac{x}{a}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc}.\sin\frac{x}{a} + \mathrm{C}.$$

Soit encore l'expression $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

La quantité placée sous le signe n'est pas une différentielle connue ; mais si l'on pose $x = \frac{1}{u}$, d'où $dx = -\frac{du}{u^2}$ et qu'on substitue, on trouve

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}} = \int \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$= \text{arc}.\cos y + \mathrm{C},$$

ou, en remettant pour y sa valeur $\frac{1}{x}$,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc}.\cos\frac{1}{x} + \mathrm{C}.$$

170. — Le troisième procédé est connu sous le nom d'*intégration par parties*, locution inexacte mais consacrée. On sait que si u et v sont deux fonctions d'une même variable x, on a (21)

$$d.uv = u\,dv + v\,du.$$

On en tire

$$u\,dv = d.uv - v\,du.$$

Les deux membres de cette égalité étant deux différentielles égales, si on les intègre entre les mêmes limites, les résultats seront égaux, puisque les deux intégrales obtenues se composeront d'un même nombre d'éléments égaux chacun à chacun. On peut donc écrire

$$\int udv = \int d.uv - \int vdu$$

ou, attendu que les signes $\int$ et d se détruisent quand ils se superposent,

$$(1) \qquad \int udv = uv - \int vdu.$$

C'est sur cette relation que se fonde le procédé d'intégration par parties. Elle exprime que *si l'on a sous le signe* $\int$ *un produit de deux facteurs* u *et* dv, *dont l'un* dv *est une différentielle connue, l'intégrale de ce produit est égale au premier facteur* u, *multiplié par l'intégrale* v *du second, diminuée d'une seconde intégrale dans laquelle il y a sous le signe* $\int$ *l'intégrale* v *qu'on vient d'obtenir, multipliée par la différentielle* du *du facteur qui n'avait pas été touché.*

Soit, par exemple, l'expression

$$\int xe^x dx,$$

on trouvera, en appliquant cette règle,

$$\int xe^x dx = x.e^x - \int e^x.dx = xe^x - e^x + C.$$

Il arrive dans ce cas que l'intégration proposée est ramenée à l'intégration d'une différentielle connue.

Soit encore l'expression

$$\int \text{arc tang}\, x.dx,$$

on trouvera de même

$$\int \text{arc tang}\, x.dx = \text{arc tang}\, x.x - \int x.\frac{dx}{1+x^2},$$

ce qu'on peut écrire

$$\int \text{arc tang}\, x.dx = x \text{ arc tang}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2}.$$

L'intégration proposée se trouve ainsi ramenée à une intégration plus facile. Car si l'on examine la quantité placée sous le second signe $\int$, on reconnaît que le numérateur $2xdx$ est la différentielle du dénominateur $1+x^2$; cette quantité est donc de la forme $\frac{du}{u}$, qui est la différentielle du logarithme népérien de u; on a donc ici

$$\int \text{arc tang}\, x.dx = x.\text{arc tang}\, x - \frac{1}{2}\log'(1+x^2) + C,$$

en ajoutant toujours une constante arbitraire si les limites de l'intégrale ne sont pas indiquées.

L'habitude du calcul peut seule suggérer le choix à faire dans chaque cas entre les procédés que nous venons d'exposer; et il est utile de répéter qu'on ne peut pas toujours être assuré d'avance qu'on réussira à effectuer l'intégration proposée en employant un ou plusieurs de ces procédés.

§ 2. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES LES PLUS USITÉES.

171. — *Différentielles algébriques entières.* — Considérons d'abord la différentielle monome $Ax^m dx$. Pour l'intégrer, on