Les deux membres de cette égalité étant deux différentielles égales, si on les intègre entre les mêmes limites, les résultats seront égaux, puisque les deux intégrales obtenues se composeront d'un même nombre d'éléments égaux chacun à chacun. On peut donc écrire

$$\int udv = \int d.uv - \int vdu$$

ou, attendu que les signes $\int$ et d se détruisent quand ils se superposent,

$$(1) \qquad \int udv = uv - \int vdu.$$

C'est sur cette relation que se fonde le procédé d'intégration par parties. Elle exprime que *si l'on a sous le signe* $\int$ *un produit de deux facteurs* u *et* dv, *dont l'un* dv *est une différentielle connue, l'intégrale de ce produit est égale au premier facteur* u, *multiplié par l'intégrale* v *du second, diminué d'une seconde intégrale dans laquelle il y a sous le signe* $\int$ *l'intégrale* v *qu'on vient d'obtenir, multipliée par la différentielle* du *du facteur qui n'avait pas été touché.*

Soit, par exemple, l'expression

$$\int xe^x dx,$$

on trouvera, en appliquant cette règle,

$$\int xe^x dx = x.e^x - \int e^x.dx = xe^x - e^x + C.$$

Il arrive dans ce cas que l'intégration proposée est ramenée à l'intégration d'une différentielle connue.

Soit encore l'expression

$$\int \text{arc tang}\, x.dx,$$

on trouvera de même

$$\int \text{arc tang}\, x.dx = \text{arc tang}\, x.x - \int x.\frac{dx}{1+x^2},$$

ce qu'on peut écrire

$$\int \text{arc tang}\, x.dx = x \text{ arc tang}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2}.$$

L'intégration proposée se trouve ainsi ramenée à une intégration plus facile. Car si l'on examine la quantité placée sous le second signe $\int$, on reconnaît que le numérateur $2xdx$ est la différentielle du dénominateur $1+x^2$; cette quantité est donc de la forme $\frac{du}{u}$, qui est la différentielle du logarithme népérien de u; on a donc ici

$$\int \text{arc tang}\, x.dx = x.\text{arc tang}\, x - \frac{1}{2}\log'(1+x^2) + C,$$

en ajoutant toujours une constante arbitraire si les limites de l'intégrale ne sont pas indiquées.

L'habitude du calcul peut seule suggérer le choix à faire dans chaque cas entre les procédés que nous venons d'exposer; et il est utile de répéter qu'on ne peut pas toujours être assuré d'avance qu'on réussira à effectuer l'intégration proposée en employant un ou plusieurs de ces procédés.

§ 2. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES LES PLUS USITÉES.

171. — *Différentielles algébriques entières.* — Considérons d'abord la différentielle monome $Ax^m dx$. Pour l'intégrer, on emploiera le procédé du n° 168, c'est-à-dire qu'on multipliera par $m+1$, sauf à diviser l'intégrale par ce facteur ; on aura ainsi (165, 168)

$$\int Ax^m dx = \frac{A}{m+1}\int (m+1)x^m dx = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \text{const.}$$

On voit que la règle à suivre consiste *à augmenter l'exposant de* x *d'une unité, et à diviser par cet exposant ainsi augmenté*. On trouvera ainsi

$$\int 10x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{10x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \text{const} = 6x^{\frac{5}{3}} + \text{const.}$$

Remarque. La règle est en défaut pour $m=-1$, parce que le dénominateur $m+1$ devient nul. Mais, dans ce cas, l'expression placée sous le signe $\int$ est une différentielle connue, celle du logarithme népérien de x, car on a

$$\int Ax^{-1}dx = A\int \frac{dx}{x} = A\log' x + \text{const.}$$

172. — Supposons maintenant que la différentielle soit polynome. En combinant la règle ci-dessus avec le principe du n° 166, on trouve aisément

$$\int (Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Tx + U)\,dx = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^m}{m} + \ldots$$
$$+ \frac{Tx^2}{2} + Ux + \text{const.}$$

Par exemple,

$$\int (x^4 - 3x^2 + 6x - 7)\,dx = \frac{x^5}{5} - x^3 + 3x^2 - 7x + \text{const.}$$

173. — *Différentielles algébriques fractionnaires.* On peut ne considérer que le cas où le numérateur est d'un degré inférieur à celui du dénominateur ; car, s'il en était autrement, on pourrait effectuer la division ; le quotient se composerait d'une partie entière et d'une fraction ayant pour numérateur le diviseur, c'est-à-dire un polynome de degré moindre que le dénominateur proposé.

Supposons d'abord que le dénominateur soit du premier degré ; et soit

$$\frac{Adx}{mx+n}$$

la différentielle proposée. On multiplie le numérateur par m, et l'on divise l'intégrale par ce même facteur ; on a ainsi

$$\int \frac{Adx}{mx+n} = \frac{A}{m}\int \frac{mdx}{mx+n}.$$

Mais alors le numérateur de l'expression placée sous le signe d'intégration est la différentielle du dénominateur ; cette expression est donc de la forme $\frac{du}{u}$, qui est la différentielle du logarithme népérien de u. On a donc

$$\int \frac{Adx}{mx+n} = \frac{A}{m}\log'(mx+n) + \text{const.}$$

Par exemple,

$$\int \frac{3dx}{4x-1} = \frac{3}{4}\log'(4x-1) + \text{const.}$$

174. — Supposons, en second lieu, que le dénominatenr soit du second degré, le numérateur sera au plus du premier, et la différentielle donnée sera de la forme

$$\frac{(mx+n)\,dx}{ax^2+bx+c}.$$

Il y a lieu de distinguer trois cas, suivant que les racines du trinome placé en dénominateur sont réelles et inégales, réelles et égales, ou imaginaires.

I. — Considérons d'abord le cas où ces racines sont réelles et inégales; en les désignant par α et β, on pourra écrire le dénominateur sous la forme

$$a(x-\alpha)(x-\beta).$$

La méthode consiste à poser

$$(1)\qquad \frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta},$$

et à déterminer A et B de manière que cette relation ait lieu quel que soit x. En chassant les dénominateurs, elle devient

$$mx+n=A(x-\beta)+B(x-\alpha).$$

Cette relation devant avoir lieu identiquement, on peut y faire successivement

$$x=\alpha \quad \text{et} \quad x=\beta,$$

ce qui donne

$$m\alpha+n=A(\alpha-\beta), \quad \text{d'où} \quad A=\frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta},$$

et

$$m\beta+n=B(\beta-\alpha), \quad \text{d'où} \quad B=-\frac{m\beta+n}{\alpha-\beta},$$

en supposant $\alpha>\beta$.

Les coefficients A et B étant ainsi déterminés, on aura, en vertu de la relation (1),

$$\int\frac{(mx+n)\,dx}{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{A}{a}\int\frac{dx}{x-\alpha}+\frac{B}{a}\int\frac{dx}{x-\beta}$$
$$=\frac{A}{a}\log'(x-\alpha)+\frac{B}{a}\log'(x-\beta)+\text{const.}$$

Par exemple, on trouvera en suivant cette marche

$$\int\frac{(4x+1)\,dx}{3x^2-15x+18}=\frac{13}{3}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{9}{3}\int\frac{dx}{x-2}$$
$$=\frac{13}{3}\log'(x-3)-\frac{9}{3}\log'(x-2)+\text{const.}$$

On traitera de même l'exemple suivant, qui se rencontre dans les applications :

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+x}+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a-x}$$
$$=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+x}-\frac{1}{2a}\int\frac{-dx}{a-x}$$
$$=\frac{1}{2a}\log'(a+x)-\frac{1}{2a}\log'(a-x)+\text{const.}$$
$$=\frac{1}{2a}\log'\frac{a+x}{a-x}+\text{const.}$$

II. — Si les racines du trinome placé en dénominateur sont réelles et égales, la différentielle proposée peut s'écrire $\frac{(mx+n)\,dx}{a(x-\alpha)^2}$, en appelant α la racine double. La méthode consiste alors à changer de variable en posant

$$x-\alpha=u, \quad \text{d'où} \quad dx=du.$$

On a ainsi

$$\int\frac{(mx+n)\,dx}{a(x-\alpha)^2}=\int\frac{(mu+m\alpha+n)\,du}{au^2}.$$
$$=\frac{m}{a}\int\frac{du}{u}+\frac{m\alpha+n}{a}\int\frac{du}{u^2}$$
$$=\frac{m}{a}\log'.u-\frac{m\alpha+n}{a}\cdot\frac{1}{u}+\text{const.}$$
$$=\frac{m}{a}\log'(x-\alpha)-\frac{m\alpha+n}{a}\cdot\frac{1}{x-\alpha}+\text{const}^{\text{e}}.$$

On trouvera, par exemple, ainsi

$$\int \frac{(4x+1)\,dx}{3(x-2)^2} = \frac{4}{3}\log'(x-2) + 3\cdot\frac{1}{x-2} + \text{const.}$$

III. Nous supposerons enfin que les racines du trinome en dénominateur soient imaginaires. On sait que dans ce cas le trinome peut se mettre sous la forme

$$a[(x-\alpha)^2+\beta^2].$$

La méthode consiste à poser $x-\alpha=\beta u$, d'où $dx=\beta du$; en substituant, on obtient

$$\int \frac{(mx+n)\,dx}{a[(x-\alpha)^2+\beta^2]} = \int \frac{(m\beta u + m\alpha + n)\,\beta du}{a(\beta^2u^2+\beta^2)} = \frac{m}{a}\int \frac{u du}{u^2+1}$$
$$+\frac{m\alpha+n}{a\beta}\int \frac{du}{u^2+1}.$$

La différentielle placée sous le second signe $\int$ est une différentielle connue; on ramène celle qui est sous le premier signe $\int$ à une différentielle connue en multipliant par 2 sous le signe et en divisant par 2 hors du signe; car on a alors sous le signe d'intégration l'expression $\frac{2udu}{u^2+1}$ dont le numérateur est la différentielle du dénominateur, et qui a par conséquent pour intégrale le logarithme népérien de ce dénominateur; on trouve ainsi

$$\int \frac{(mx+n)\,dx}{a[(x-\alpha)^2+\beta^2]} = \frac{m}{2a}\log'(u^2+1)$$
$$+\frac{m\alpha+n}{a\beta}\,\text{arc tang}\,u + \text{const} = \frac{m}{2a}\log'\left[\frac{(x-\alpha)^2}{\beta^2}+1\right]$$
$$+\frac{m\alpha+n}{a\beta}\,\text{arc tang}.\frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.}$$

Par exemple, on obtient ainsi

$$\int \frac{(4x+1)\,dx}{3x^2-30x+87} = \frac{2}{3}\log'\left[\frac{(x-5)^2}{4}+1\right]$$
$$+\frac{7}{2}\cdot\text{arc tang}\,\frac{x-5}{2} + \text{const.}$$

175. — On peut concevoir que l'on suive une marche analogue quand le dénominateur de la fraction est d'un degré quelconque. L'algèbre fournit des méthodes pour décomposer les fractions rationnelles en fractions simples; on peut donc, théoriquement du moins, ramener ainsi l'intégration d'une différentielle fractionnaire rationnelle, dont le dénominateur est un polynome en x de degré quelconque, à l'intégration de plusieurs différentielles fractionnaires plus simples. Mais cela suppose qu'on puisse trouver les racines d'une équation de degré quelconque, ce qu'on ne sait pas faire. Nous ne croyons donc pas utile pour les applications de développer ici cette méthode générale; nous nous contenterons de traiter les exemples suivants, où le dénominateur est du troisième degré.

I. Supposons d'abord que la différentielle proposée soit

$$\frac{(x^2-5x+3)\,dx}{(x+1)(x-1)(x-2)}.$$

Nous poserons

$$\frac{x^2-5x+3}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2},$$

ou

$$x^2-5x+3 = A(x-1)(x-2) + B(x+1)(x-2)$$
$$+ C(x+1)(x-1).$$

En faisant successivement $x=-1$, $x=+1$, $x=+2$, on trouvera

$$9 = 6A, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{3}{2}$$

$$-1 = -2B, \quad \text{d'où} \quad B = \frac{1}{2},$$

$$-3 = 3C, \quad \text{d'où} \quad C = -1.$$

Par conséquent, on pourra écrire

$$\int \frac{(x^2 - 5x + 3)\,dx}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}$$
$$- \int \frac{dx}{x-2} = \frac{3}{2}\log'(x+1) + \frac{1}{2}\log'(x-1)$$
$$-\log'(x-2) + \text{const.}$$

II. La méthode que nous venons d'employer est en défaut lorsque deux racines du dénominateur sont égales.

Supposons, en effet, qu'on ait à considérer la fraction $\frac{mx^2 + nx + p}{(x-a)(x-b)^2}$ et qu'on pose

$$\frac{mx^2 + nx + p}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-b};$$

en chassant les dénominateurs on obtient

$$mx^2 + nx + p = A(x-b)^2 + (B+C)(x-a)(x-b),$$

relation qui ne saurait être une identité, puisque le second membre s'annule pour $x = b$, tandis que le premier ne contient pas le facteur $x - b$, si la fraction proposée a été réduite à sa plus simple expression, ce qu'on peut toujours supposer.

Dans ce cas, au lieu de décomposer la fraction proposée en trois fractions dont les dénominateurs soient du premier degré, on la décompose en deux fractions seulement, l'une ayant un dénominateur du premier degré $(x-a)$, l'autre un dénominateur du second degré $(x-b)^2$.

Soit par exemple à intégrer $\frac{(x^2 - 5x + 3)\,dx}{(x+1)(x-2)^2}$; on posera

$$\frac{x^2 - 5x + 3}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{(x-2)^2},$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$x^2 - 5x + 3 = A(x-2)^2 + (Bx + C)(x+1);$$

et l'on déterminera les coefficients A, B, C en donnant à x trois valeurs distinctes, par exemple $x = -1$, $x = 2$ et $x = 0$: on trouve ainsi :

pour $x = -1$, $\quad 9 = 9A$, d'où $A = 1$;
pour $x = 2$, $\quad -3 = 3(2B + C)$;
pour $x = 0$, $\quad +3 = 4A + C$;

les deux dernières donnent $C = -1$, et $B = 0$.

On aura donc

$$\int \frac{(x^2 - 5x + 3)\,dx}{(x+1)(x-2)^2} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x-2)^2}$$
$$= \log'(x+1) + \frac{1}{(x-2)} + \text{const.}$$

III. On emploie encore le même ordre de décomposition quand le dénominateur a deux racines imaginaires. Soit, par exemple, à intégrer $\frac{(x^2 - 5x + 3)\,dx}{(x+1)[(x-1)^2 + 4]}$; on posera

$$\frac{x^2 - 5x + 3}{(x+1)[(x-1)^2 + 4]} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{[(x-1)^2 + 4]}$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$x^2 - 5x + 3 = A[(x-1)^2 + 4] + (Bx + C)(x+1),$$

et l'on fera successivement $x = -1$, $x = 0$, $x = +1$; on trouvera ainsi

pour $x=-1$, $9=8A$, d'où $A=\frac{9}{8}$;

pour $x=0$, $\quad 3=5A+C$, d'où $C=3-5A=-\frac{21}{8}$;

pour $x=1$, $\ -1=4A+(B+C)2$,

$$\text{d'où } B=-\frac{1}{2}-2A-C=-\frac{1}{8}.$$

On aura donc

$$\int\frac{(x^2-5x+3)\,dx}{(x+1)\,[(x-1)^2+4]}=\frac{9}{8}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{8}\int\frac{(x+21)\,dx}{[(x-1)^2+4]}.$$

La première intégrale du second membre a pour valeur $\log'(x+1)$; la seconde, traitée par la méthode du n° 174, III, donne $\frac{1}{2}\log'\left[\frac{(x-1)^2}{4}+1\right]+11$ arc tang $\frac{x-1}{2}$; il vient donc enfin

$$\int\frac{(x^2-5x+3)\,dx}{(x+1)\,[(x-1)^2+4]}=\frac{9}{8}\log'(x+1)$$
$$-\frac{1}{16}\log'\left[\frac{(x^2-1)^2}{4}+1\right]-\frac{11}{8}\,\text{arc tang}\,\frac{x-1}{2}+\text{const.}$$

IV. Nous supposerons enfin que le dénominateur ait ses trois racines égales et qu'on ait à intégrer, par exemple,

$$\frac{(x^2-5x+3)\,dx}{(x-2)^3}.$$

On posera $x-2=u$, d'où $dx=du$; et en faisant la substitution il viendra

$$\frac{(u^2-u-3)\,du}{u^3}\quad\text{ou}\quad\frac{du}{u}-\frac{du}{u^2}-3\frac{du}{u^3}.$$

La première de ces trois différentielles a pour intégrale $\log' u$,

$\frac{1}{8}-\frac{4}{8}-\frac{18}{8}=c+e$

$\frac{45}{8}$

la seconde $\frac{1}{u}$, la troisième, qui revient à $-3u^{-3}du$, a pour intégrale $+\frac{3}{2}u^{-2}$ ou $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{u^2}$. On a donc

$$\int\frac{(x^2-5x+3)\,dx}{(x-2)^3}=\log'(x-2)$$
$$+\frac{1}{x-2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+\text{const.}$$

176. *Différentielles irrationnelles du second degré.* I. On sait que l'expression $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est la différentielle de l'arc dont le sinus est x; on a donc immédiatement

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc sin}\,x+\text{const.}$$

II. Soit maintenant l'expression $dx\sqrt{1-x^2}$; pour l'intégrer, on commence par multiplier et diviser par $\sqrt{1-x^2}$, ce qui donne $\frac{(1-x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, et par conséquent

$$(1)\qquad \int dx\sqrt{1-x^2}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La première intégrale du second membre est connue. La seconde peut être mise sous la forme $+\int x.\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; on a ainsi sous le signe $\int$ deux facteurs dont l'un, le second, est une différentielle connue, car c'est celle de $\sqrt{1-x^2}$ (36). Si donc on applique à cette intégrale le procédé de l'intégration par parties (170), on aura

$$(2)\qquad +\int x.\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}.dx.$$

Substituant cette valeur dans la relation (1), on obtient

$$\int dx\sqrt{1-x^2}=\text{arc sin}\,x+x\sqrt{1-x^2}-\int dx\sqrt{1-x^2}.$$

On voit qu'on a ainsi reproduit en signe contraire dans le second membre l'intégrale qu'il s'agissait d'obtenir ; si on la fait passer dans le premier membre, celui-ci se trouvera donc doublé, et, en divisant par 2, on obtiendra finalement

$$\int dx\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}\left[\text{arc sin}\,x+x\sqrt{1-x^2}\right]+\text{const.}$$

177. — III. Pour intégrer $\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ on change de variable, et l'on pose

$$(1)\qquad \sqrt{1+x^2}=u-x.$$

Élevant au carré et réduisant, on obtient

$$1=u^2-2ux,$$

et, en différentiant et divisant par 2,

$$0=u\,du-u\,dx-x\,du,\quad \text{d'où}\quad \frac{dx}{u-x}=\frac{du}{u},$$

ou, ce qui revient au même en vertu de la relation (1),

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{du}{u}.$$

On peut donc écrire

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{du}{u}=\log' u+\text{const}$$
$$=\log'\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\text{const.}$$

On intégrerait de la même manière $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$, et l'on aurait

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\log'\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)+\text{const.}$$

IV. Soit maintenant à intégrer $dx\sqrt{1+x^2}$; on commencera par multiplier et diviser par $\sqrt{1+x^2}$, ce qui donne $\dfrac{(1+x^2)\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$. On a donc

$$(2)\qquad \int dx\sqrt{1+x^2}=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

La première intégrale du second membre est connue ; la seconde peut s'écrire

$$\int x.\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}\,;$$

la quantité sous le signe $\int$ est alors un produit de deux facteurs, dont le second est la différentielle de $\sqrt{1+x^2}$; on a donc, en appliquant le procédé de l'intégration par parties,

$$\int x.\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}\,.\,dx\,;$$

et, en substituant dans la relation (2),

$$\int dx\sqrt{1+x^2}=\log'\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$
$$+x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}\,.\,dx.$$

Le dernier terme du second membre est alors le premier membre changé de signe. Si on le fait passer dans le premier membre, et qu'on divise par 2, il viendra donc