$$\int dx\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}\left[\log'\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x\sqrt{1+x^2}\right]+\text{const.}$$

On intégrerait de même $dx\sqrt{x^2+k}$, et l'on trouverait

$$\int dx\sqrt{x^2+k}=\frac{1}{2}\left[k\log'\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)+x\sqrt{x^2+k}\right]+\text{const.}$$

Mais si l'on avait à intégrer $dx\sqrt{x^2-k}$, on aurait

$$\int dx\sqrt{x^2-k}=\frac{1}{2}\left[-k\log'\left(x+\sqrt{x^2-k}\right)+x\sqrt{x^2-k}\right].$$

Ce résultat ne diffère du précédent, comme on pouvait s'y attendre, qu'en ce que $k$ est changé en $-k$.

**178.** — V. Si, dans les exemples qui précèdent, le radical portait sur un trinome du second degré, ce cas pourrait être ramené aux précédents; mais les résultats seraient de nature différente, selon que le terme en $x^2$ serait affecté d'un coefficient positif ou négatif.

Supposons-le d'abord négatif, et soit $c+bx-ax^2$ le trinome placé sous le radical. Ce trinome pourra s'écrire

$$a\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{a}x-x^2\right),$$

ou, en ajoutant et retranchant dans la parenthèse $\frac{b^2}{4a^2}$,

$$a\left[\left(\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2\right],$$

quantité qui est de la forme

$$a\left[\beta^2-(x-\alpha)^2\right];$$

car on doit admettre que $\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$ est positif, autrement le radical serait imaginaire pour toutes les valeurs de $x$. On



pourra donc poser

$$x=\alpha+\beta u,\quad \text{d'où}\quad dx=\beta du;$$

et, en faisant la substitution, on donnera au trinome la forme $a\beta^2(1-u^2)$, et le radical portera sur $1-u^2$. On sera donc ramené aux cas traités au n° 176.

Soit, par exemple, à intégrer $\frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}$; en ajoutant et retranchant sous le radical le carré de la moitié du coefficient de $x$, c'est-à-dire 9, on pourra écrire $\frac{dx}{\sqrt{16-(x-3)^2}}$.

On posera

$$x=3+4u,\quad \text{d'où}\quad dx=4du,$$

et l'on aura

$$\frac{4\,du}{\sqrt{16-16u^2}},\quad \text{ou simplement}\quad \frac{du}{\sqrt{1-u^2}};$$

on aura donc

$$\int\frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\text{arc}.\sin u+\text{const.}$$

$$=\text{arc}.\sin\frac{x-3}{4}+\text{const.}$$

Soit encore à intégrer

$$dx\sqrt{6x-x^2};$$

on pourra écrire

$$dx\sqrt{9-(x-3)^2}.$$

On posera donc

$$x=3+3u,\quad \text{d'où}\quad dx=3du,$$

et il viendra

$$3du\sqrt{9-9u^2},\quad \text{ou}\quad 9du\sqrt{1-u^2}.$$

On aura donc

$$\int dx\sqrt{6x-x^2}=9\int du\sqrt{1-u^2}$$

$$=\frac{9}{2}\left[\arcsin u+u\sqrt{1-u^2}\right]+\text{const.}$$

$$=\frac{9}{2}\left[\arcsin\frac{x-3}{3}+\frac{x-3}{3}\sqrt{1-\frac{(x-3)^2}{9}}\right]+\text{const.}$$

$$=\frac{9}{2}\left[\arcsin\frac{x-3}{3}+\frac{1}{9}(x-3)\sqrt{6x-x^2}\right]+\text{const.}$$

**179.** — VI. Supposons en second lieu que le coefficient de $x^2$ soit positif, et soit $ax^2+bx+c$ le trinome. On pourra l'écrire

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

ou, en ajoutant et retranchant dans la parenthèse le terme $\frac{b^2}{4a^2}$,

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

quantité de la forme

$$a\left[(x-\alpha)^2\pm\beta^2\right].$$

On posera

$$x=\alpha\pm\beta u,\quad \text{d'où}\quad dx=\pm\beta du;$$

et, en substituant, le trinome deviendra

$$a\,(\beta^2u^2\pm\beta^2),\quad \text{ou}\quad a\beta^2\,(u^2\pm 1);$$

et le radical portera sur $u^2\pm 1$. On sera donc ramené aux cas traités au n° 177.



Soit, par exemple, à intégrer

$$\frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{4x^2-16x+20}}.$$

Le trinome sous le radical pourra s'écrire

$$4\,(x^2-4x+5),\quad \text{ou}\quad 4\left[(x-2)^2+1\right].$$

On posera donc

$$x=2+u,\quad \text{d'où}\quad dx=du;$$

et, en substituant dans la différentielle donnée, elle deviendra

$$\frac{(3u+4)\,du}{2\sqrt{u^2+1}}.$$

On aura donc

$$\int\frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{4x^2-16x+20}}=\frac{3}{2}\int\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+1}}+2\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{u^2+1}+2\log'\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\cancel{+u\sqrt{u^2+1}}+\text{const.}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{(x-2)^2+1}+2\log'\left[(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+1}\right]$$

$$\cancel{+(x-2)\sqrt{(x-2)^2+1}}+\text{const.}$$

$$=\log'\left[(x-2)+\sqrt{x^2-4x+5}\right]$$

$$+\left(\cancel{x}+\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2-4x+5}+\text{const.}$$

**180.** — *Différentielles binomes.* On donne ce nom aux différentielles de la forme

$$(1)\qquad x^m(a+bx^n)^p\,.\,dx.$$

On peut remarquer d'abord que si $p$ était un nombre entier, on pourrait développer le binome, et, en multipliant ses termes par $x^m dx$, on aurait une suite de différentielles de la forme $Ax^q dx$ que l'on pourrait intégrer séparément. Nous n'avons donc à considérer que le cas où $p$ n'est pas un nombre entier.

On ne diminue pas la généralité de l'expression (1), en supposant $n$ positif, car si l'on avait

$$x^m\left(a+\frac{b}{x^n}\right)^p . dx,$$

on pourrait écrire, en multipliant par $x^n$ dans la parenthèse et en divisant par $x^{np}$ hors de la parenthèse, ce qui ne changerait pas le produit,

$$x^{m-np}(b+ax^n)^p dx,$$

expression qui est de même forme que la proposée, mais où l'exposant $n$ est positif.

On ne diminue pas non plus la généralité de l'expression (1) en supposant $m$ et $n$ entiers. Supposons-les, en effet, de la forme $\frac{m}{r}$ et $\frac{n}{s}$, de telle sorte que la différentielle proposée soit

$$x^{\frac{m}{r}}\left(a+bx^{\frac{n}{s}}\right)^p dx.$$

On posera

$$x=u^{rs}, \quad \text{d'où} \quad dx=rsu^{rs-1}du;$$

et, en substituant, il viendra

$$rs.u^{ms}(a+b^{nr})^p.u^{rs-1}.du,$$

expression qui, au facteur constant près $rs$, est de même forme que la proposée, avec cette seule différence que les exposants $ms$ et $nr$ sont entiers.

En définitive, on voit que dans la différentielle binome (1) il est permis de regarder $m$ et $n$ comme entiers, et $n$ comme positif.

**181.** — Nous avons vu que la différentielle binome est in-



tégrable dans le cas de $p$ entier. Elle l'est encore dans deux autres cas. 1° Posons, en effet,

$$a+bx^n=u,$$

d'où

$$x=\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{et} \quad dx=\frac{1}{n}\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}.\frac{du}{b}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression proposée, on obtient

$$\frac{1}{nb}.u^p.\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}.du,$$

et l'on voit que cette différentielle serait intégrable si $\frac{m+1}{n}$ était un nombre entier et positif.

2° La différentielle binome peut s'écrire $x^{m+np}.(b+ax^{-n})^p dx$. Si on opère sur cette quantité comme nous venons de le faire, on obtient la condition d'intégrabilité en remplaçant $m$ par $m+np$ et $n$ par $-n$. On trouve aussi que l'expression est intégrable si la quantité

$$-\frac{m+pn+1}{n}, \quad \text{ou} \quad -\left(\frac{m+1}{n}+p\right)$$

est un nombre entier et positif.

Dans tous les autres cas, la différentielle binome ne peut être intégrée à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques. On se propose ordinairement alors de ramener son intégration à celle d'une différentielle de même forme dans laquelle les exposants $m$ et $p$ soient les plus petits possible en valeur absolue.

**182.** — Si l'on écrit la différentielle binome sous la forme

$$(a+bx^n)^p.x^m dx,$$

on voit qu'elle est le produit de deux facteurs, dont l'un $x^m\,dx$

est une différentielle connue ; on peut donc appliquer le procédé de l'intégration par parties, et l'on aura

$$(2)\qquad \int (a+bx^n)^p . x^m dx = (a+bx^n)^p . \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$- \int \frac{x^{m+1}}{m+1} . pbn\,(a+bx^n)^{p-1} . x^{n-1} dx.$$

$$= \frac{(a+bx^n)^p\, x^{m+1}}{m+1} - \frac{p\,bn}{m+1} \int x^{m+n}\ (a+bx^n)^{p-1} . dx.$$

La différentielle binome placée sous le signe $\int$ dans le second membre est de même forme que la proposée ; elle en diffère en ce que $p$ est remplacée par $p-1$ et $m$ par $m+n$. Mais on peut déduire de la formule (2) une autre formule qui ramène l'intégration de la différentielle proposée à celle d'une différentielle de même forme, dans laquelle $m$ conserve sa valeur, et $p$ est remplacé par $p-1$. Pour cela, on observe qu'on a

aumentando $ax^m$ y quitando
dolo

$$bx^{m+n} = x^m\,(a+bx^n) - ax^m.$$

Si l'on substitue cette valeur dans (2), on obtient

$$\int (a+bx^n)^p . x^m dx = \frac{(a+bx^n)^p . x^{m+1}}{m+1}$$

$$- \frac{pn}{m+1} \int (a+bx^n)^p x^m dx$$

$$+ \frac{pna}{m+1} \int x^m\,(a+bx^n)^{p-1}\,dx\,,$$

et, si l'on passe le terme affecté du signe — dans le premier membre, on en tire après réduction

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int (a+bx^n)^p\, x^m dx = \frac{(a+bx^n)^p\, x^{m+1}}{m+1+pn} \\ &+ \frac{pna}{m+1+pn} \int x^m\,(a+bx^n)^{p-1}\,dx. \end{aligned} \right.$$



On peut renverser cette formule, c'est-à-dire en tirer la valeur de l'intégrale qui figure dans le second membre. Si l'on fait ce calcul, et que l'on change ensuite $p$ en $p+1$, on obtient

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int (a+bx^n)^p . x^m dx = - \frac{(a+bx^n)^{p+1} . x^{m+1}}{(p+1)\,n\,a} \\ &+ \frac{m+1+n\,(p+1)}{(p+1)\,n\,a} \int (a+bx^n)^{p+1} . x^m dx. \end{aligned} \right.$$

Les formules (3) ou (4) serviront, quel que soit le signe de $p$, à ramener l'intégrale proposée à une autre de même forme, où, $m$ restant le même, la valeur absolue de $p$ aura été diminuée d'une unité. Et, en répétant un nombre de fois suffisant cette opération, on ramènera l'exposant de $p$ à avoir pour valeur absolue une fraction.

**183.** — La différentielle proposée peut être décomposée d'une autre manière en deux facteurs dont l'un soit une différentielle connue. Multiplions et divisons, en effet, par la dérivée de $bx^n$, c'est-à-dire par $nbx^{n-1}$ ; nous pourrons écrire

$$\frac{1}{bn} . x^{m-n+1} . (a+bx^n)^p . bnx^{n-1} dx.$$

$\dfrac{x^{(m-n+1}}{bn} - \dfrac{(m-n+1)x^{m-n}}{bn}$

Sous cette forme on reconnaît que le facteur

$$(a+bx^n)^p . bnx^{n-1} dx$$

est la différentielle de $(a+bx^n)^{p+1}$, divisée par $p+1$. En appliquant donc le procédé de l'intégration par parties, on pourra écrire

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int x^m\,(a+bx^n)^p . dx = \frac{1}{bn}\, x^{m-n+1} . \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{p+1} \\ &- \frac{(m-n+1)}{(p+1)\,nb} \int x^{m-n}\,(a+bx^n)^{p+1} . dx. \end{aligned} \right.$$

L'intégrale proposée se trouve donc ainsi ramenée à une autre de même forme, dans laquelle l'exposant $m$ est remplacé par $m-n$, et l'exposant $p$ par $p+1$. Mais on peut déduire de la forme (5) une autre formule qui ramène l'intégrale proposée à une intégrale de même forme, dans laquelle $p$ conserve sa valeur, et $m$ est changé en $m-1$. Pour cela, on observe qu'on a

$$\begin{aligned} x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} &= x^{m-n}(a+bx^n)^p \cdot (a+bx^n) \\ &= ax^{m-n}(a+bx^n)^p + bx^m(a+bx^n)^p. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} \cdot dx = a \int x^{m-n}(a+bx^n)^p\, dx \\ + b \int x^m (a+bx^n)^p\, dx \end{aligned}$$

Si l'on substitue cette valeur dans la relation (5), qu'on fasse passer le dernier terme dans le premier membre et qu'on réduise, on en tirera

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+1+np)} \\ - \frac{a(m+1-n)}{b(m+1+np)} \int x^{m-n}(a+bx^n)^p\, dx. \end{aligned} \right.$$

On peut ensuite renverser cette formule, c'est-à-dire en tirer la valeur de l'intégrale qui figure dans le second membre; et si l'on change alors $m$ en $m+n$, on obtient

$$(7) \left\{ \begin{aligned} \int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)} \\ - \frac{b(m+1+n+np)}{a(m+1)} \int x^{m+n}(a+bx^n) \cdot dx. \end{aligned} \right.$$

Les formules (6) ou (7) serviront, quel que soit le signe $bm$, à ramener l'intégrale proposée à une autre de même



forme, dans laquelle, $p$ restant le même, la valeur absolue de $m$ sera diminuée de $n$.

En employant successivement les formules (3) ou (4), puis les formules (6) ou (7), on parviendra à retrancher de $p$ toutes les unités contenues, et de $m$ tous les multiples de $n$ qu'il renferme. Quelquefois l'opération peut être abrégée par l'emploi des formules (2) ou (5).

Remarque. Les formules (3) et (6) sont en défaut quand $m+1+np$ est nul; ou, ce qui revient au même, quand $\frac{m+1}{n}+p$ est égal à zéro. Mais alors la différentielle binome est intégrable directement (181, 2°). Le nombre $p$ étant fractionnaire, on n'a jamais $p+1=0$; ainsi la formule (4) n'est jamais en défaut. Mais la formule (7) est en défaut pour $m=-1$. Or, dans ce cas encore, la différentielle binome peut être intégrée directement (181, 1°).

**184.** — Prenons pour exemple la différentielle

$$\frac{x^4 dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{ou} \quad x^4(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot dx.$$

On a dans ce cas

$$m=4, \quad n=2, \quad p=-\frac{3}{2}.$$

Pour diminuer d'abord la valeur absolue de l'exposant $p$ et celle de l'exposant $m$, employons la formule (5); elle donnera

$$(8) \qquad \begin{aligned} \int x^4(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\, dx = +x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx \\ -3 \int x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx. \end{aligned}$$

Pour diminuer encore l'exposant de $x$ dans le facteur hors parenthèse, faisons usage de la formule (6), en y faisant $m=2$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$ ; elle donnera

$$\int x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int x^0(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$= -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + \text{const.}$$

Substituant cette valeur dans (8), on obtient

$$\int x^4(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{3}{2}\arcsin x + \text{const.}$$

**185.** — *Différentielles logarithmiques et exponentielles.* L'intégrale de $\log x . dx$ s'obtient par le procédé de l'intégration par parties. On a, en effet,

$$\int \log x . dx = \log x . x - \int \frac{\log e}{x}dx . x$$
$$= x\log x - x\log e + \text{const.}$$

Plus généralement on trouve par le même procédé

$$\int x^m \log . x . dx = \log . x . \frac{x^{m+1}}{m+1} - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} . \frac{\log e}{x}dx$$
$$= \frac{x^{m+1}\log x}{m+1} - \log e . \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + \text{const.}$$

On a vu (168) comment on peut intégrer $a^x dx$ en multipliant et divisant par une constante convenable. On a, en effet,

$$\int a^x dx = \frac{\log e}{\log a}\int \frac{\log a}{\log e}a^x dx = \frac{\log e}{\log a}a^x + \text{const.}$$



On trouve de la même manière

$$\int a^{-x}dx = -\frac{\log e}{\log a}\int -\frac{\log a}{\log e}a^{-x}dx = -\frac{\log e}{\log a}a^{-x} + \text{const.}$$

Si $a=e$, il vient

$$\int e^x dx = e^x + \text{const.} \quad \text{et} \quad \int e^{-x}dx = -e^{-x} + \text{const.}$$

Il peut arriver que, dans ces expressions, $x$ soit multiplié par un facteur constant ; comme, dans la différentiation, ce facteur affecte la dérivée, il faut, dans l'intégration, tenir compte de cette circonstance en multipliant et divisant par ce même facteur. On trouvera, par exemple,

$$\int (e^{mx} + e^{-mx})dx = \frac{1}{m}\int (me^{mx} + me^{-mx})dx$$
$$= \frac{1}{m}(e^{mx} - e^{-mx}) + \text{const.}$$

et

$$\int (e^{mx} - e^{-mx})dx = \frac{1}{m}\int (me^{mx} - me^{-mx})dx$$
$$= \frac{1}{m}(e^{mx} + e^{-mx}) + \text{const.}$$

Ces deux formules trouvent leur emploi dans les applications.

L'exponentielle peut être multipliée par une puissance de $x$ ; l'intégration par parties permet alors de diminuer d'une unité l'exposant de cette puissance. On a, par exemple,

(1) $$\int x^m e^x dx = x^m e^x - m\int x^{m-1}e^x dx.$$

Si $m$ est entier et positif, en répétant un nombre suffisant de