fois cette opération, on obtiendra exactement l'intégrale demandée. On trouvera, par exemple,

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + \text{const.}$$

Si m est négatif, on peut renverser la relation (1), c'est à-dire en tirer la valeur de l'intégrale placée dans le second membre ; en changeant ensuite m en $m+1$, on obtient

$$(2) \qquad \int x^m e^x dx = \frac{x^{m+1}e^x}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1} e^x dx,$$

et si m est entier, en appliquant un nombre suffisant de fois cette formule, on ramènera l'intégration demandée à dépendre de $\int x^{-1} e^x dx$. On ne pourra pas aller au delà, parce que la formule (2) est en défaut pour $m = -1$. On verra plus loin que cette dernière intégrale s'obtient par développement en série.

Si l'exposant m est fractionnaire, l'emploi des formules (1) ou (2), selon qu'il sera positif ou négatif, permettra de ramener l'intégrale demandée à une intégrale de même forme dans laquelle l'exposant de x sera une fraction.

186. — *Différentielles renfermant des fonctions circulaires.* Il résulte immédiatement de ce qu'on a vu dans le calcul différentiel (44) que l'on a

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + \text{const.}$$

et

$$\int \cos x\, dx = +\sin x + \text{const.}$$

Soit à intégrer

$$\tang x\, dx \quad \text{ou} \quad \frac{\sin x\, dx}{\cos x};$$

on remarquera que le numérateur est, au signe près, la différentielle du dénominateur ; si donc on écrit

$$-\frac{-\sin x\, dx}{\cos x},$$

on aura une expression de la forme $\frac{du}{u}$, qui est la différentielle du logarithme népérien de u ; on aura donc

$$\int \tang x\, dx = -\int \frac{-\sin x\, dx}{\cos x} = -\log'.\cos x + \text{const}$$

On trouvera de même

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \log'.\sin x + \text{const.}$$

Pour intégrer $\frac{dx}{\sin x}$, on pose

$$x = 2u, \quad \text{d'où} \quad dx = 2du,$$

ce qui donne d'abord

$$\frac{2du}{\sin 2u} \quad \text{ou} \quad \frac{du}{\sin u \cos u}.$$

On divise ensuite les deux termes par $\cos^2 u$, ce qui donne

$$\frac{\frac{du}{\cos^2 u}}{\tang u}.$$

Mais $\frac{du}{\cos^2 u}$ est précisément la différentielle de $\tang u$; ainsi l'expression à intégrer est la différentielle du logarithme népérien de tang u. On a donc

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log'.\operatorname{tang} u + \text{const.} = \log'.\operatorname{tang}\frac{1}{2}x + \text{const.}$$

L'intégrale $\int \frac{dx}{\cos x}$ se ramène à la précédente en posant

$$x = \frac{\pi}{2} - y,$$

d'où

$$dx = -dy;$$

et, par suite,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{dy}{\sin y} = -\log' \operatorname{tang}\frac{1}{2}y + \text{const.}$$
$$= -\log' \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \text{const.}$$

187. — Il résulte de ce qu'on a vu dans le calcul différentiel (44), que l'on a immédiatement

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}dx = -\cot.x + \text{const.}$$

et

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + \text{const.}$$

Quant aux intégrales

$$\int \sin^2 x\,dx, \quad \text{et} \quad \int \cos^2 x\,dx,$$

on les obtient aisément par addition et soustraction. On a, en effet,

$$\int \cos^2 x\,dx + \int \sin^2 x\,dx$$
$$= \int (\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx = \int dx = x + \text{const.}$$

et

$$\int \cos^2 x\,dx - \int \sin^2 x\,dx$$
$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = \int \cos 2x\,dx,$$

ou, en multipliant et divisant par 2, afin d'avoir sous le signe d la même variable que sous le signe cosinus,

$$\int \cos^2 x\,dx - \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d.2x$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x + \text{const.}$$

Par suite,

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \text{const.}$$
$$= \frac{2x + \sin 2x}{4} + \text{const.}$$

et

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \text{const.}$$
$$= \frac{2x - \sin 2x}{4} + \text{const.}$$

Si l'on avait à intégrer $\sin^2 x \cos^2 x\,dx$, on pourrait écrire, en multipliant et divisant par 4,

$$\frac{1}{4}.4\sin^2 x\cos^2 x\,dx, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4}\sin^2 2x\,dx,$$

ou encore

$$\frac{1}{8}\sin^2 2x\,d.2x.$$

En vertu de la formule qui précède, il viendrait donc

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \, d\,.\,2x = \frac{4x - \sin 4x}{32} + \text{const}$$

Si l'on avait à intégrer $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx$, on pourrait écrire

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tang} x - x + \text{const.}$$

On aurait de même

$$\int \frac{\cos^2 x \, dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\cot x - x + \text{const.}$$

Plus généralement, si l'on a à intégrer $\sin^m x \cos^p x dx$, et que l'un des exposants m ou p soit impair (on les suppose tous deux entiers), l'intégration pourra être ramenée à celle d'une fonction algébrique entière. Car soit, par exemple,

$$p = 2k + 1.$$

On pourra écrire

$$\sin^m x \cos^{2k} x \,.\, \cos x \, dx;$$

et, en posant

$$\sin x = u, \quad \text{d'où} \quad \cos x = (1 - u^2)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\cos x \, dx = du,$$

on aura à intégrer

$$u^m (1 - u^2)^k \,.\, du,$$

différentielle algébrique, rationnelle et entière.

Par exemple, on trouvera ainsi

$$\int \sin^6 x \cos^5 x \, dx = \int u^6 (1 - u^2)^4 du$$

$$= \frac{1}{7} u^7 - \frac{4}{9} u^9 + \frac{6}{11} u^{11} - \frac{4}{13} u^{13} + \frac{1}{15} u^{15} + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{4}{9}\sin^9 x + \frac{6}{11}\sin^{11} x - \frac{4}{13}\sin^{13} x$$

$$+ \frac{1}{15}\sin^{15} x + \text{const.}$$

Plus généralement encore, et quels que soient les exposants m et p, on peut transformer $\sin^m x \cos^p x \, dx$ en une différentielle binome, en posant $\sin x = u$. Car on peut écrire

$$\sin^m x \cos^{p-1} x \,.\, \cos x \, dx,$$

ce qui revient à

$$u^m (1 - u^2)^{\frac{p-1}{2}} \,.\, du.$$

188. — Les différentielles qui renferment des fonctions circulaires inverses, telles que arc sin xdx, ou arc tang xdx s'intègrent par le procédé d'intégration par parties. On trouve, en effet,

$$\int \text{arc} \sin x dx = \text{arc} \sin x \,.\, x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= x \text{ arc} \sin x + \sqrt{1 - x^2} + \text{const.}$$

$$\int \text{arc tang } x \,.\, dx = \text{arc tang } x \,.\, x - \int x \,.\, \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$= \text{arc tang } x \,.\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x \, dx}{1 + x^2}.$$

Dans le second membre, la quantité sous le signe $\int$ est une fraction dont le numérateur est la différentielle du dénominateur, c'est-à-dire une fraction de la forme $\frac{du}{u}$, qui est la différentielle du logarithme népérien du dénominateur u; il vient donc

$$\int \text{arc tang}\, x \, . \, dx = x \, \text{arc tang}\, x - \frac{1}{2} \log' (1 + x^2) + \text{const.}$$

On trouverait de même

$$\int \text{arc cos}\, x \, . \, dx = x \, \text{arc cos}\, x - \sqrt{1 - x^2} + \text{const.},$$

et

$$\int \text{arc cot}\, x \, dx = x \, \text{arc cot}\, x + \frac{1}{2} \log' (1 + x^2) + \text{const.}$$

189. — C'est encore à l'aide du procédé d'intégration par parties que l'on intègre les différentielles simples qui contiennent des exponentielles et des sinus ou cosinus. On trouvera, par exemple,

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx,$$

mais

$$-\int e^x \sin x \, dx = \int e^x (-\sin x) dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Par conséquent

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x (\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x \, dx,$$

et, en passant le dernier terme dans le premier membre et divisant par 2,

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + \text{const.}$$

190. — Si, dans les expressions étudiées aux nos 186, 187, 188, 189, la variable x était multipliée par un facteur constant, l'intégrale devrait être divisée par ce facteur. On aurait, par exemple,

$$\int \cos mx \, dx = \frac{1}{m} \int \cos mx \, . \, dmx = \frac{\sin mx}{m} + \text{const.}$$

$$\int \sin mx \, dx = -\frac{1}{m} \int -\sin mx \, . \, dmx = -\frac{\cos mx}{m} + \text{const.}$$

$$\int \text{tang}\, mx \, . \, dx = -\frac{1}{m} \int \frac{-\sin mx \, d\, mx}{\cos mx}$$

$$= -\frac{1}{m} \log' \cos mx + \text{const.}$$

$$\int \cot mx \, dx = \frac{1}{m} \int \frac{\cos mx \, dmx}{\sin mx} = \frac{1}{m} \log' \sin mx + \text{const.}$$

$$\int \sin^2 mx \, dx = \frac{1}{m} \int \sin^2 mx \, . \, dmx$$

$$= \frac{2mx - \sin 2mx}{4m} + \text{const.}$$

$$\int \cos^2 mx \, dx = \frac{1}{m} \int \cos^2 mx \, . \, dmx$$

$$= \frac{2mx + \sin 2mx}{4m} + \text{const.}$$

et, ainsi des autres.

§ 3. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES PAR DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE

191. — Considérons d'abord l'expression $\int_0^x f(x)\, dx$. Cette expression est une fonction de x, dont la dérivée est $f(x)$; si