nateur, c'est-à-dire une fraction de la forme $\frac{du}{u}$, qui est la différentielle du logarithme népérien du dénominateur u; il vient donc

$$\int \text{arc tang}\, x \,.\, dx = x \text{ arc tang}\, x - \frac{1}{2} \log' (1 + x^2) + \text{const.}$$

On trouverait de même

$$\int \text{arc cos}\, x \,.\, dx = x \text{ arc cos}\, x - \sqrt{1 - x^2} + \text{const.},$$

et

$$\int \text{arc cot}\, x\, dx = x \text{ arc cot}\, x + \frac{1}{2} \log' (1 + x^2) + \text{const.}$$

189. — C'est encore à l'aide du procédé d'intégration par parties que l'on intègre les différentielles simples qui contiennent des exponentielles et des sinus ou cosinus. On trouvera, par exemple,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx,$$

mais

$$-\int e^x \sin x\, dx = \int e^x (-\sin x) dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Par conséquent

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x (\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x\, dx,$$

et, en passant le dernier terme dans le premier membre et divisant par 2,

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + \text{const.}$$

190. — Si, dans les expressions étudiées aux n^{os} 186, 187, 188, 189, la variable x était multipliée par un facteur constant, l'intégrale devrait être divisée par ce facteur. On aurait, par exemple,

$$\int \cos mx\, dx = \frac{1}{m} \int \cos mx \,.\, dmx = \frac{\sin mx}{m} + \text{const.}$$

$$\int \sin mx\, dx = -\frac{1}{m} \int -\sin mx \,.\, dmx = -\frac{\cos mx}{m} + \text{const.}$$

$$\int \text{tang}\, mx \,.\, dx = -\frac{1}{m} \int \frac{-\sin mx\, d\, mx}{\cos mx}$$

$$= -\frac{1}{m} \log' \cos mx + \text{const.}$$

$$\int \cot mx\, dx = \frac{1}{m} \int \frac{\cos mx\, dmx}{\sin mx} = \frac{1}{m} \log' \sin mx + \text{const.}$$

$$\int \sin^2 mx\, dx = \frac{1}{m} \int \sin^2 mx \,.\, dmx$$

$$= \frac{2mx - \sin 2mx}{4m} + \text{const.}$$

$$\int \cos^2 mx\, dx = \frac{1}{m} \int \cos^2 mx \,.\, dmx$$

$$= \frac{2mx + \sin 2mx}{4m} + \text{const.}$$

et, ainsi des autres.

§ 3. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES PAR DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE

191. — Considérons d'abord l'expression $\int_0^x f(x)\, dx$. Cette expression est une fonction de x, dont la dérivée est $f(x)$; si donc $f(x)$ et ses dérivées successives conservent des valeurs finies de 0 à x, on pourra développer l'expression proposée par la formule de Maclaurin (69) ; et, en remarquant que l'intégrale s'annule pour $x=0$, on aura

$$(1) \int_0^x f(x)\,dx = 0 + f(0)\frac{x}{1} + f'(0)\frac{x^2}{1.2} + f''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

La série qui forme le second membre pourra donc tenir lieu de la fonction dont $f(x)$ est la dérivée.

Considérons maintenant l'intégrale $\int_a^x f(x)\,dx$. Si $f(x)$ et ses dérivées conservent des valeurs finies de 0 à x, on pourra remarquer que l'on a

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_0^x f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx.$$

Si donc on développe par la formule (1) les deux intégrales qui figurent dans le second membre, et qu'on opère la soustraction, on obtiendra

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \int_a^x f(x)\,dx &= f(0).\frac{x-a}{1} + f'(0)\frac{x^2-a^2}{1.2} \\ &+ f''(0)\frac{x^3-a^3}{1.2.3} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Si $f(x)$ et ses dérivées conservent des valeurs finies de a à x, mais qu'il ne soit pas permis d'y faire $x=0$, on pourra opérer comme il suit.

Posons

$$x = a + u,$$

et

$$\int_a^{a+u} f(a+u)\,du = \mathrm{F}(u).$$

Nous pourrons développer la fonction F par la série de Maclaurin. Mais nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(0)=0,\ \mathrm{F}'(u) &= f\,(a+u), \text{ d'où } \mathrm{F}'(0) = f\,(a), \\ \mathrm{F}''(u) &= f'(a+u), \text{ d'où } \mathrm{F}''(0) = f'(a), \\ \mathrm{F}'''(u) &= f''(a+u), \text{ d'où } \mathrm{F}'''(0) = f''(a), \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Il viendra donc

$$(3) \quad \begin{aligned} \int_a^{a+u} f(a+u)\,du &= 0 + f(a).\frac{u}{1} + f'(a)\frac{u^2}{1.2} \\ &+ f''(a)\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots. \end{aligned}$$

ou

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \int_a^x f(x)dx &= f(a)\frac{(x-a)}{1} + f'(a)\frac{(x-a)^2}{1.2} \\ &+ f''(a)\frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

192. — L'intégration par développement en série peut encore être présentée d'une autre manière qu'il est utile de connaître. Soit $f(x)$ la fonction placée sous le signe $\int$; et supposons qu'on puisse la développer par la série de Maclaurin, on aura

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1} + f''(0)\frac{x^2}{1.2} + f'''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \mathrm{R}_n.$$

Multiplions les deux membres par dx, et intégrons entre les limites 0 et x, il viendra

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \int_0^x f(x)\,dx &= f(0)\frac{x}{1} + f'(0)\frac{x^2}{1.2} + f''(0)\frac{x^3}{1.2.3} \\ &+ f'''(0)\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + \int_0^x \mathrm{R}_n dx. \end{aligned} \right.$$

Or, soient α et β la plus grande et la plus petite valeur que prend R_n quand x varie de 0 à x ; on aura

$$\alpha dx > R_n dx > \beta dx,$$

et, par conséquent,

$$\alpha x > \int_0^x R_n dx > \beta x.$$

La quantité $\int_0^x R_n dx$ est donc égale à un certain produit kx, dans lequel k désigne une quantité comprise entre α et β. Mais R_n tendant vers zéro à mesure que n augmente, il en est de même de α et de β, et par conséquent aussi de la quantité intermédiaire k. Donc kx tend vers zéro à mesure que n augmente, c'est-à-dire que l'intégrale qui figure dans le second membre de l'équation (4) est un *reste* qui tend vers zéro. On peut donc se dispenser de l'écrire, et l'on retombe ainsi sur l'équation (1).

Si l'on intégrait entre les limites a et x, on retomberait de même sur l'équation (2). On pourrait aussi établir de la même manière l'équation (3) en développant $f(a+u)$.

192 *bis*. — Comme premier exemple de ce qui précède, proposons-nous de développer un arc en fonction de son sinus. L'application de la formule du binome (80) donne, pour x, compris entre $+1$ et -1,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots.$$

Multiplions les deux membres par dx, et intégrons de 0 à x, il viendra

$$\text{arc sin}\, x=x+\frac{1.x^3}{2.3}+\frac{1.3.x^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7}+\ldots.$$

Pour $x=1$, on obtient

$$(5)\qquad \frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2.3}+\frac{1.2}{2.4.5}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}+\ldots.$$

Comme second exemple, cherchons le développement de l'arc en fonction de sa tangente. La formule du binome donne

$$\frac{1}{1+x^2}=(1-x^2)^{-1}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots,$$

Multiplions par dx et intégrons de 0 à x, nous aurons

$$(6)\qquad \text{arc tang}\, x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots.$$

Pour $x=1$, on obtient

$$(7)\qquad \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.$$

193. Remarque. — Les formules (5) et (7) ne convergent pas assez rapidement pour servir au calcul du nombre π. Mais on peut en déduire des formules plus convergentes. On démontre aisément, et il est facile de vérifier, que l'on a

$$\text{arc tang}\,.\,1=4\,\text{arc tang}\,\frac{1}{5}-\text{arc tang}\,.\,\frac{1}{239},$$

d'où

$$\pi=4\left(4\,\text{arc tang}\,\frac{1}{5}-\text{arc tang}\,.\,\frac{1}{239}\right).$$

On calcule arc tang $\frac{1}{5}$ et arc tang $\frac{1}{239}$ par la formule (6), et en substituant on obtient la valeur de π. Il suffit d'employer les onze premiers termes du premier développement, et les trois premiers termes du second, pour obtenir le nombre π

avec quinze décimales. (Voir les Traités d'Algèbre supérieure.)

194. — Au lieu de multiplier les deux membres de la formule de Maclaurin par dx, on peut les multiplier par $x^m dx$, m étant un exposant positif; et, en intégrant de a à x, on obtient

$$\int_a^x x^m f(x)\,dx = f(0)\,.\,\frac{x^{m+1}-a^{m+1}}{m+1} + f'(0)\frac{x^{m+2}-a^{m+2}}{1.(m+2)}$$
$$+ f''(0)\frac{x^{m+3}-a^{m+3}}{1.2.(m+3)} + \ldots.$$

On démontrerait, comme au n° 191, que le *reste* de la série tend vers zéro.

On peut appliquer une méthode analogue à l'intégration de la différentielle $\frac{e^x dx}{x}$, que nous avons rencontrée au n° 185. On a, en effet,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + R_n.$$

Multiplions les deux membres par $\frac{dx}{x}$ et intégrons de a à x, a étant supposé positif, il viendra

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_a^x \frac{e^x dx}{x} &= \log'.\frac{x}{a} + \frac{x-a}{1} + \frac{x^2-a^2}{1.2.2} + \frac{x^3-a^3}{1.2.3.3} \\ &+ \frac{x^4-a^4}{1.2.3.4.4} + \ldots + \int_a^x R_n \frac{dx}{x}. \end{aligned} \right.$$

Or, si α et β désignent, comme plus haut, la plus grande et la plus petite valeur que prenne R_n quand x varie de a à x, l'intégrale $\int_a^x R_n \frac{dx}{x}$ sera comprise entre $\alpha \int_a^x \frac{dx}{x}$ et $\beta \int_a^x \frac{dx}{x}$,

c'est-à-dire entre $\alpha \log'.\frac{x}{a}$ et $\beta \log'.\frac{x}{a}$. Elle aura donc pour valeur une quantité telle que $k \log'.\frac{x}{a}$, k étant compris entre α et β. Mais R_n tendant vers zéro à mesure que n augmente, il en est de même de α et de β, et par conséquent aussi de l'intermédiaire k. Donc enfin l'intégrale $\int_a^x R_n \frac{dx}{x}$ est un reste qui tend vers zéro, et que l'on peut se dispenser d'écrire.

§ 4. — CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES PAR APPROXIMATION

195. — Lorsqu'une intégrale définie ne peut être obtenue par aucun des procédés d'intégration connus, on peut toujours en calculer la valeur numérique avec une approximation plus que suffisante en général pour les besoins de l'application.

C'est encore au calcul approché qu'il faut recourir lorsque, comme cela arrive fréquemment dans les questions qui touchent à la pratique, la fonction qui figure sous le signe $\int$ n'est point connue sous forme mathématique, mais qu'elle est seulement donnée par des valeurs isolées ou par le tracé d'une courbe.

Il existe, pour le calcul approché de la valeur numérique des intégrales définies, plusieurs méthodes, dont la plus répandue est fondée sur les considérations géométriques suivantes.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'évaluer le trapèze curviligne AOQC, limité par une courbe ABC qui n'est point donnée, mais déterminée seulement par les trois ordonnées équidistantes AO, BP, CQ, que nous appellerons y_0, y_1, y_2. Désignons par h l'intervalle OP = PQ des ordonnées.

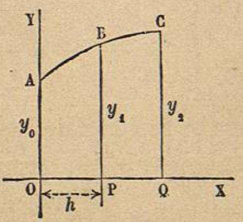

Fig. 37.

Si la courbe ABC est continue, et si, entre les points A et C, elle ne présente ni inflexion ni aucun autre point singulier, on pourra, sans erreur notable, la remplacer par une autre courbe quelconque remplissant les mêmes conditions, par exemple par une parabole ayant pour axe une parallèle aux ordonnées; c'est-à-dire que l'aire du trapèze curviligne limité par cette parabole, l'axe des x et les ordonnées extrêmes, différera fort peu du trapèze curviligne proposé. Et l'erreur sera d'autant moindre que la distance h sera plus petite.

Si l'on met l'origine au pied O de la première ordonnée, l'équation de la parabole dont il s'agit sera de la forme

$$(1) \qquad y = y_0 + ax + bx^2.$$

Et comme elle doit passer par les points B et C qui ont pour coordonnées

$$x = h,\ y = y_1, \quad \text{et} \quad x = 2h,\ y = y_2,$$

on devra avoir

$$(2) \qquad y_1 = y_0 + ah + bh^2,\ \ y_2 = y_0 + 2ah + 4bh^2,$$

équations qui déterminent a et b. Posons $\Delta_1 = y_1 - y_0$, la première des équations (2) pourra s'écrire

$$(3) \qquad \Delta_1 = ah + bh^2.$$

Posons de même

$$\Delta'_1 = y_2 - y_1;$$

en retranchant membre à membre les équations (2) on obtiendra

$$(4) \qquad \Delta'_1 = ah + 3bh^2.$$

Posons enfin,

$$\Delta_2 = \Delta'_1 - \Delta_1,$$

on trouvera, en retranchant membre à membre les équa-

tions (3) et (4),

$$(5) \qquad \Delta_2 = 2bh^2.$$

De cette dernière on tire

$$b = \frac{1}{2}\frac{\Delta_2}{h^2};$$

et, en substituant dans (3), on obtient

$$a = \frac{\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2}{h}.$$

L'équation de la parabole est donc

$$(6) \qquad y = y_0 + \left(\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2\right)\frac{x}{h} + \frac{1}{2}\Delta_2 \cdot \frac{x^2}{h^2}.$$

Cette équation, dans laquelle les quantités Δ_1 et Δ_2 sont ce que l'on appelle la *différence première* et la *différence seconde*, est celle qui, dans la pratique, sert à résoudre le problème de l'INTERPOLATION [1].

Pour obtenir l'aire de la parabole, il suffit (162) de multiplier les deux membres de l'équation (6) par dx, et d'intégrer entre les limites $x = 0$ et $x = 2h$, ce qui donne, en appelant U l'aire cherchée,

$$\begin{aligned} U &= 2hy_0 + 2h\left(\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2\right) + \frac{4}{3}\Delta_2 h \\ &= 2h\left(y_0 + \Delta_1 + \frac{1}{6}\Delta_2\right), \end{aligned}$$

ou, en remettant pour Δ_1 et Δ_2 leurs valeurs $\Delta_1 = y_1 - y_0$, et $\Delta_2 = \Delta'_1 - \Delta_1 = y_2 - 2y_1 + y_0$,

$$(7) \qquad U = 2h\left(y_1 + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{6}\right) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

[1] Voir ce mot dans notre *Dictionnaire des Mathématiques appliquées.*

196. — Supposons maintenant qu'il s'agisse d'évaluer l'aire du trapèze AOCB limité par une courbe quelconque AB, l'axe des x, et deux ordonnées extrêmes y_0, Y. Divisons l'inter-

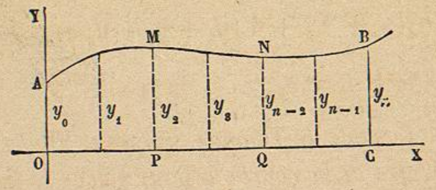

Fig. 38.

valle OC de ces ordonnées en un nombre pair n de parties égales, et soit h l'une de ces parties. Par tous les points de division menons des ordonnées, que nous désignerons successivement par $y_1, y_2, y_3 \ldots y_{n-1}$. Soit u_1 l'aire du trapèze curviligne limité par les ordonnées y_0 et y_2, u_2 celle du trapèze limité par les ordonnées y_2 et y_4, et ainsi de suite; enfin, u_n celle du trapèze limité par les ordonnées y_{n-2} et Y. Nous aurons, en vertu de la formule (7) établie au numéro précédent

$$u_1 = \frac{1}{3} h (y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$u_2 = \frac{1}{3} h (y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$u_3 = \frac{1}{3} h (y_4 + 4y_5 + y_6),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = \frac{1}{3} h (y_{n-2} + y_{n-1} + \mathrm{Y}).$$

Ajoutons membre à membre toutes ces inégalités, et soit U l'aire totale à évaluer. Le facteur $\frac{1}{3}\,h$ sera commun. Les ordonnées extrêmes y_0 et Y n'entreront chacune qu'une seule fois dans la somme. Les ordonnées d'indice pair y_2, y_4,

$y_6, \ldots y_{n-2}$ y entrent chacune deux fois. Les ordonnées d'indice impair $y_1, y_3, y_5, \ldots y_{n-1}$, y entreront chacune quatre fois. On aura donc

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \mathrm{U} = \frac{1}{3} h [& (y_0 + \mathrm{Y}) + 4 (y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}) \\ & + 2 (y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{n-2})]. \end{aligned} \right.$$

Telle est la *formule de Thomas Simpson*. Elle s'énonce en disant que : *l'aire de la courbe a pour valeur le tiers de l'intervalle de deux ordonnées consécutives, multiplié par la somme des ordonnées extrêmes, plus quatre fois la somme des ordonnées d'indice impair, plus deux fois la somme des ordonnées d'indice pair.*

Le résultat du calcul s'approchera d'autant plus de la vérité que le nombre n sera plus considérable.

197. — Pour donner une idée de l'approximation, proposons-nous d'évaluer par cette méthode l'aire de l'hyperbole équilatère $xy = 1$, depuis l'abscisse 1 jusqu'à l'abscisse 11. Divisons l'intervalle 11 — 1 en dix parties égales; les ordonnées répondant aux abscisses 1, 2, 3..., 10, 11 auront pour valeur :

$x = 1 \ldots\ldots y_0 = 1{,}000$	$x = 7 \ldots y_6 = 0{,}143$
$x = 2 \ldots\ldots y_1 = 0{,}500$	$x = 8 \ldots y_7 = 0{,}125$
$x = 3 \ldots\ldots y_2 = 0{,}333$	$x = 9 \ldots y_8 = 0{,}111$
$x = 4 \ldots\ldots y_3 = 0{,}250$	$x = 10 \ldots y_9 = 0{,}100$
$x = 5 \ldots\ldots y_4 = 0{,}200$	$x = 11 \ldots \mathrm{Y} = 0{,}091$
$x = 6 \ldots\ldots y_5 = 0{,}167$	

La somme des ordonnées extrêmes $y_0 + \mathrm{Y}$ est égale à. 1,091

La somme des ordonnées d'indice impair $y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9$, a pour valeur 1,142; en multipliant par 4, on obtient. 4,568

A REPORTER. . . 5,659

Report. 5,659

La somme des ordonnées d'indice pair $y_2+y_4+y_6+y_8$ a pour valeur 0,787; en multipliant par 2, on trouve. 1,574

La somme de ces nombres est. 7,233

En multipliant par le tiers de l'intervalle de deux ordonnées consécutives, c'est-à-dire par $\frac{1}{3}$, puisque ici $h=1$, on obtient. 2,411

Or l'aire dont il s'agit est donnée exactement par la formule $\int_1^{11}\frac{dx}{x}=\log'.11=2,3979\ldots$ ou environ. 2,398

Il y a donc une erreur en plus, qui est de. . . 0,013

Et l'erreur relative correspondante est $\frac{13}{2398}$ ou un peu moins de $\frac{1}{184}$.

198. — Remarques. I. Si la courbe proposée avait des points d'inflexion, il faudrait mener les ordonnées de ces points, et évaluer séparément les parties de l'aire totale comprises entre ces ordonnées.

II. Si la courbe coupait l'axe des x, auquel cas une partie de la courbe serait située au-dessous de cet axe, il faudrait évaluer séparément les aires positives placées au-dessus, et les aires négatives (164, II) placées au-dessous.

III. La formule de Thomas Simpson s'applique à toutes les intégrales définies, car la fonction placée sous le signe $\int$ peut toujours, si elle est continue, représenter l'ordonnée d'une courbe, et par conséquent l'intégrale proposée représente l'aire de cette courbe.

La formule n'est en défaut que lorsque l'une des limites est infinie, ou qu'elles le sont toutes les deux.

III. — APPLICATIONS DU CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES

§ I. — RECTIFICATION DES COURBES

199. — *Rectification des courbes planes.* On entend par *longueur* d'un arc de courbe, la limite vers laquelle tend la longueur d'une ligne brisée inscrite ou circonscrite, terminée aux mêmes extrémités. On a vu (114) que si x, y sont les coordonnées rectangulaires d'un point d'une courbe plane, et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ celles d'un point voisin sur cette courbe, la corde qui les joint a pour expression $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Si le second point se rapproche indéfiniment du premier, la corde tend vers l'arc infiniment petit, que l'on désigne par ds, en sorte qu'on a

$$ds=\lim.\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=dx\sqrt{1+y'^2}.$$

Cet arc infiniment petit est ce qu'on appelle un *élément* de la courbe, et ce qu'on appelle la *longueur* de la courbe, entre deux points donnés de cette courbe, est la somme de ses éléments compris entre ces deux points. *Rectifier* une courbe, c'est calculer sa longueur, depuis le point qui a pour abscisse a, jusqu'au point qui a pour abscisse b. On a donc, en appelant s cette longueur,

$$(1)\qquad s=\int_a^b ds=\int_a^b dx\sqrt{1+y'^2}.$$

Pour faire le calcul, il faudra donc tirer de l'équation de la courbe la valeur de y' en fonction de x, et évaluer l'intégrale définie qui forme le second membre de la relation (1). Nous en donnerons quelques exemples.