Report.	5,659
La somme des ordonnées d'indice pair $y_2+y_4+y_6+y_8$ a pour valeur 0,787; en multipliant par 2, on trouve.	1,574
La somme de ces nombres est.	7,233
En multipliant par le tiers de l'intervalle de deux ordonnées consécutives, c'est-à-dire par $\frac{1}{3}$, puisque ici $h=1$, on obtient.	2,411
Or l'aire dont il s'agit est donnée exactement par la formule $\int_1^{11}\frac{dx}{x}=\log'.11=2,3979...$ ou environ.	2,398
Il y a donc une erreur en plus, qui est de. . .	0,013

Et l'erreur relative correspondante est $\frac{13}{2398}$ ou un peu moins de $\frac{1}{184}$.

198. — Remarques. I. Si la courbe proposée avait des points d'inflexion, il faudrait mener les ordonnées de ces points, et évaluer séparément les parties de l'aire totale comprises entre ces ordonnées.

II. Si la courbe coupait l'axe des x, auquel cas une partie de la courbe serait située au-dessous de cet axe, il faudrait évaluer séparément les aires positives placées au-dessus, et les aires négatives (164, II) placées au-dessous.

III. La formule de Thomas Simpson s'applique à toutes les intégrales définies, car la fonction placée sous le signe $\int$ peut toujours, si elle est continue, représenter l'ordonnée d'une courbe, et par conséquent l'intégrale proposée représente l'aire de cette courbe.

La formule n'est en défaut que lorsque l'une des limites est infinie, ou qu'elles le sont toutes les deux.

III. — APPLICATIONS DU CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES

§ I. — RECTIFICATION DES COURBES

199. — *Rectification des courbes planes.* On entend par *longueur* d'un arc de courbe, la limite vers laquelle tend la longueur d'une ligne brisée inscrite ou circonscrite, terminée aux mêmes extrémités. On a vu (114) que si x, y sont les coordonnées rectangulaires d'un point d'une courbe plane, et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ celles d'un point voisin sur cette courbe, la corde qui les joint a pour expression $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Si le second point se rapproche indéfiniment du premier, la corde tend vers l'arc infiniment petit, que l'on désigne par ds, en sorte qu'on a

$$ds=\lim.\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=dx\sqrt{1+y'^2}.$$

Cet arc infiniment petit est ce qu'on appelle un *élément* de la courbe, et ce qu'on appelle la *longueur* de la courbe, entre deux points donnés de cette courbe, est la somme de ses éléments compris entre ces deux points. *Rectifier* une courbe, c'est calculer sa longueur, depuis le point qui a pour abscisse a, jusqu'au point qui a pour abscisse b. On a donc, en appelant s cette longueur,

$$(1)\qquad s=\int_a^b ds=\int_a^b dx\sqrt{1+y'^2}.$$

Pour faire le calcul, il faudra donc tirer de l'équation de la courbe la valeur de y' en fonction de x, et évaluer l'intégrale définie qui forme le second membre de la relation (1). Nous en donnerons quelques exemples.

200. — *Rectification de la parabole.* Prenons l'axe de la courbe pour axe des y, son équation pourra être mise sous la forme

$$y=\frac{x^2}{2p}, \quad \text{d'où} \quad y'=\frac{x}{p}.$$

Par conséquent, en comptant les arcs à partir du sommet, par exemple, on aura

$$s=\int_0^x dx\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}.$$

Pour faire l'intégration, il est commode de poser

$$x=pu, \quad \text{d'où} \quad dx=pdu.$$

L intégrale indéfinie

$$\int pdu\sqrt{1+u^2}$$

a pour valeur

$$p\cdot\frac{1}{2}\left[\log'\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)+u\sqrt{1+u^2}\right]+\text{const.}$$

ou, en remettant pour u sa valeur $\frac{x}{p}$,

$$p\cdot\frac{1}{2}\left(\log'.\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}+\frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{p^2}\right)+\text{const.}$$

Cette valeur devant s'annuler pour $x=0$, auquel cas la quantité entre parenthèses s'annule, il faut que la constante soit nulle. On a donc enfin

$$(2) \qquad s=\frac{p}{2}\log'.\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}+\frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{2p}.$$

201. — *Rectification de la chaînette.* La courbe qui porte le nom de chaînette est celle qu'affecterait une chaîne infiniment mince, pesante, et parfaitement flexible, librement suspendue par ses extrémités. On démontre en Mécanique que l'équation de cette courbe est

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

on en tire

$$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

Par conséquent

$$1+y'^2=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)=\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^2.$$

On a donc, en comptant les arcs à partir du point le plus bas qui répond à $x=0$,

$$(3) \qquad s=\int_0^x dx\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

sans constante, attendu que l'expression doit s'annuler pour $x=0$.

202. — *Rectification de la cycloïde.* On sait que cette courbe est représentée par les équations

$$x=\mathrm{R}(\alpha-\sin\alpha), \quad \text{et} \quad y=\mathrm{R}(1-\cos\alpha).$$

On en tire successivement

$$dx=\mathrm{R}(1-\cos\alpha)\,d\alpha, \quad dy=\mathrm{R}\sin\alpha\,d\alpha,$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha};$$

$$1+y'^2=\frac{1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}=\frac{2}{1-\cos\alpha}.$$

On a donc, si l'on calcule la longueur de la cycloïde entière, depuis le point qui a pour abscisse 0, jusqu'au point qui a pour abscisse $2\pi R$,

$$s = \int_0^{2\pi} R(1-\cos\alpha)\,d\alpha.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$$

$$= R\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\alpha\sqrt{1-\cos\alpha} = 2R\int_0^{2\pi}\sin\frac{1}{2}\alpha\,d\alpha,$$

ou, en multipliant et divisant par 2, afin d'avoir sous le signe d la même variable que sous le signe sinus,

$$s = 4R\int_0^{2\pi}\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,d\,\frac{1}{2}\alpha.$$

L'intégrale indéfinie est $-\cos\frac{1}{2}\alpha$; et, entre les limites 0 et 2π, elle devient $1+1$ ou 2. On a donc enfin pour la longueur de la cycloïde entière

$$(4) \qquad s = 8R,$$

ou 8 fois le rayon du cercle générateur.

203. — *Rectification des courbes à double courbure.* Soient x, y, z, et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, les coordonnées de deux points voisins sur la courbe; la corde qui les joint a pour expression $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$. Si l'on conçoit que le second point se rapproche indéfiniment du premier, cette corde tendra vers l'arc qu'elle sous-tend, que l'on appelle un *élément* de la courbe, et que l'on désigne par ds. On a donc

$$ds = \lim.\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2} = dz\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1}.$$

La longueur de la courbe entre deux points, répondant aux ordonnées $z=a$ et $z=b$, est la somme de ses éléments compris entre ces deux points. En la désignant par s on a donc

$$(5) \qquad s = \int_a^b ds = \int_a^b dz\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1}.$$

Pour faire le calcul, on tirera des équations de la courbe les valeurs de $\frac{dx}{dz}$ et de $\frac{dy}{dz}$, et l'on évaluera l'intégrale définie formant le second membre de la relation (5).

204. — Nous prendrons pour exemple la courbe qui a pour équations

$$x = az\cos mz, \quad \text{et} \quad y = az\sin mz;$$

c'est une hélice conique, intersection d'un cône de révolution avec un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe du cône, et qui a pour base une spirale d'Archimède.

On tire de ces équations

$$\frac{dx}{dz} = a\cos mz - maz\sin mz,$$

$$\frac{dy}{dz} = a\sin mz + maz\cos mz.$$

Élevant au carré et ajoutant, on obtient

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = a^2+m^2a^2z^2.$$

Par conséquent, on aura, en comptant les arcs à partir du plan des xy,

$$s = \int_0^z dz\sqrt{a^2+m^2a^2z^2+1}.$$

Pour effectuer l'intégration, on posera

$$z = \frac{\sqrt{1+a^2}}{ma}.u, \quad \text{d'où} \quad dz = \frac{\sqrt{1+a^2}}{ma}du;$$

il viendra

$$s = \frac{1+a^2}{ma}\int du\sqrt{1+u^2}$$
$$= \frac{1+a^2}{2ma}\left[\log'\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)+u\sqrt{1+u^2}\right],$$

sans constante, attendu que l'arc doit s'annuler pour $z=0$, et par conséquent pour $u=0$. En remettant pour u sa valeur $\frac{maz}{\sqrt{1+a^2}}$, on trouvera

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} s = \frac{1+a^2}{2ma}\Bigg[& \log'\left(\frac{maz+\sqrt{1+a^2+m^2a^2z^2}}{\sqrt{1+a^2}}\right) \\ & + \frac{maz\sqrt{1+a^2+m^2a^2z^2}}{1+a^2}\Bigg], \end{aligned}\right.$$

ou

$$s = \frac{1+a^2}{2ma}\log'\frac{maz+\sqrt{1+a^2+m^2a^2z^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$
$$+\frac{1}{2}z\sqrt{1+a^2+m^2a^2z^2}.$$

On traiterait de la même manière, mais plus facilement, l'hélice ordinaire, dont la rectification se fait d'ailleurs immédiatement par des considérations géométriques.

§ 2. — CALCUL DE L'AIRE DES COURBES PLANES

205. — On a vu au n° 162 que l'aire comprise entre une courbe donnée dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $y=f(x)$, l'axe des x et les ordonnées qui correspondent à deux abscisses a et b est donnée par la formule

$$U = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Nous prendrons pour premier exemple le cercle, parce qu'il est intéressant de retrouver par cette voie les résultats obtenus par des voies toutes différentes. Proposons-nous d'évaluer l'aire comprise entre un arc de cercle BM, l'axe des x passant par le centre, et les deux ordonnées répondant à $x=0$ qui est l'abscisse du centre, et $x=$OP qui est une abscisse quelconque.

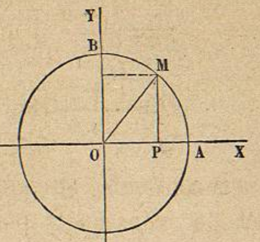

Fig. 39.

On a dans ce cas $y=\sqrt{R^2-x^2}$, et par conséquent

$$U = \int_0^x dx\sqrt{R^2-x^2}.$$

Si l'on pose

$$x = Ru, \qquad \text{d'où} \qquad dx = R\,du,$$

on obtient

$$U = R^2\int_0^u du\sqrt{1-u^2} = R^2\,\frac{1}{2}\left(\arcsin u + u\sqrt{1-u^2}\right),$$

sans constante, puisque l'aire doit s'annuler pour $u=0$. En remettant pour u sa valeur $\frac{x}{R}$, on peut écrire

$$(1)\qquad U = \frac{1}{2}R^2\arcsin\frac{x}{R}+\frac{1}{2}x\sqrt{R^2-x^2}.$$

Ce résultat est conforme à la Géométrie; car si l'on tire le rayon OM, on a

$$\text{surf. BOPM} = \text{sect. BOM} + \text{tri. OMP}$$
$$= \frac{1}{2}R^2.\text{angle BOM} + \frac{1}{2}\text{OP}.\text{MP},$$

expression qui coïncide avec la précédente.