

il viendra

$$s = \frac{1+a^2}{ma} \int du \sqrt{1+u^2} \\ = \frac{1+a^2}{2ma} [\log'(u + \sqrt{1+u^2}) + u\sqrt{1+u^2}],$$

sans constante, attendu que l'arc doit s'annuler pour  $z=0$ , et par conséquent pour  $u=0$ . En remettant pour  $u$  sa valeur  $\frac{maz}{\sqrt{1+a^2}}$ , on trouvera

$$(6) \left\{ \begin{aligned} s &= \frac{1+a^2}{2ma} \left[ \log' \left( \frac{maz + \sqrt{1+a^2+m^2a^2z^2}}{\sqrt{1+a^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{maz\sqrt{1+a^2+m^2a^2z^2}}{1+a^2} \right], \end{aligned} \right.$$

ou

$$s = \frac{1+a^2}{2ma} \log' \frac{maz + \sqrt{1+a^2+m^2a^2z^2}}{\sqrt{1+a^2}} \\ + \frac{1}{2} z \sqrt{1+a^2+m^2a^2z^2}.$$

On traiterait de la même manière, mais plus facilement, l'hélice ordinaire, dont la rectification se fait d'ailleurs immédiatement par des considérations géométriques.

## § 2. — CALCUL DE L'AIRES DES COURBES PLANES

205. — On a vu au n° 162 que l'aire comprise entre une courbe donnée dont l'équation en coordonnées rectangulaires est  $y=f(x)$ , l'axe des  $x$  et les ordonnées qui correspondent à deux abscisses  $a$  et  $b$  est donnée par la formule

$$U = \int_a^b f(x) dx.$$

Nous prendrons pour premier exemple le cercle, parce qu'il est intéressant de retrouver par cette voie les résultats obtenus par des voies toutes différentes. Proposons-nous d'évaluer l'aire comprise entre un arc de cercle  $BM$ , l'axe des  $x$  passant par le centre, et les deux ordonnées répondant à  $x=0$  qui est l'abscisse du centre, et  $x=OP$  qui est une abscisse quelconque.

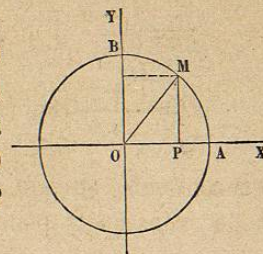


Fig. 59.

On a dans ce cas  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ , et par conséquent

$$U = \int_0^x dx \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Si l'on pose

$$x = Ru, \quad \text{d'où} \quad dx = Rdu,$$

on obtient

$$U = R^2 \int_0^u du \sqrt{1-u^2} = R^2 \frac{1}{2} (\text{arc sin } u + u\sqrt{1-u^2}),$$

sans constante, puisque l'aire doit s'annuler pour  $u=0$ . En remettant pour  $u$  sa valeur  $\frac{x}{R}$ , on peut écrire

$$(1) \quad U = \frac{1}{2} R^2 \text{arc sin } \frac{x}{R} + \frac{1}{2} x \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Ce résultat est conforme à la Géométrie; car si l'on tire le rayon  $OM$ , on a

$$\text{surf. BOPM} = \text{sect. BOM} + \text{tri. OMP} \\ = \frac{1}{2} R^2 \cdot \text{angle BOM} + \frac{1}{2} OP \cdot MP,$$

expression qui coïncide avec la précédente.



Pour  $x=R$ , on aurait le quart du quadrant; dans ce cas,

$$\text{arc sin } \frac{R}{R} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{par conséquent } U = \frac{1}{4} \pi R^2,$$

attendu que le second terme disparaît. L'aire du cercle entier est bien ainsi représentée par  $\pi R^2$ .

**206.** — *Aire de l'ellipse.* On pourrait opérer comme ci-dessus; mais le calcul se simplifie. On a, en effet, pour l'aire du quadrant d'ellipse

$$U = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{b}{a} \int_0^a dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Or, l'intégrale qui figure dans le second membre exprime l'aire d'un quadrant de cercle ayant pour rayon  $a$ ; elle équivaut donc à  $\frac{1}{4} \pi a^2$ . On a donc

$$U = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{4} \pi a^2 = \frac{1}{4} \pi ab.$$

L'aire de l'ellipse entière est représentée ainsi par  $\pi ab$ .

On peut remarquer que si l'on compare des aires limitées aux mêmes ordonnées dans l'ellipse et dans le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, les expressions de ces aires ne diffèrent que parce que celle de l'ellipse est multipliée par  $\frac{b}{a}$ . L'aire prise sur l'ellipse est donc à celle qui lui correspond sur le cercle dans le rapport de  $b$  à  $a$ .

**207.** — *Aire de la parabole.* Calculons l'aire comprise entre la courbe, l'axe des  $x$  et une ordonnée quelconque. Nous aurons

$$y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}},$$

par suite

$$U = \int_0^x \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{3}{2}},$$

sans constante, puisque l'aire doit s'annuler pour  $x=0$ . Cette expression peut s'écrire

$$U = \frac{2}{3} \sqrt{2px} \cdot x = \frac{2}{3} yx.$$

L'aire considérée est donc les  $\frac{2}{3}$  du rectangle construit sur les coordonnées  $x$  et  $y$  du point auquel correspond l'ordonnée prise pour limite.

On peut remarquer que si, au lieu de la parabole du second degré  $y = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$ , on considère une parabole de degré quelconque  $y = ax^m$ ,  $m$  étant un exposant positif quelconque, l'aire limitée par l'ordonnée correspondante à une abscisse  $x$  est toujours une fraction rationnelle du rectangle construit sur les coordonnées  $x$  et  $y$ , car on a

$$U = \int_0^x ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$$

sans constante, ou bien

$$U = \frac{ax^m \cdot x}{m+1} = \frac{yx}{m+1}.$$

Dans la parabole  $y = ax^{\frac{5}{2}}$  par exemple, on a

$$U = \frac{xy}{\frac{5}{2} + 1} = \frac{2}{5} xy.$$



**208.** — Aire de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. On se propose d'obtenir l'aire comprise entre la courbe, l'axe des  $x$  et deux ordonnées répondant aux abscisses  $a$  et  $x$ . En appelant  $\theta$  l'angle des asymptotes, et prenant  $xy = m^2$  pour l'équation de la courbe, on a

$$U = \sin \theta \int_a^x m^2 \cdot \frac{dx}{x} = m^2 \sin \theta \cdot \log' \cdot \frac{x}{a}.$$

Si l'on suppose  $m = 1$ ,  $a = 1$  et  $\theta = 90^\circ$ , il vient

$$U = \log' \cdot x,$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, l'aire considérée est exprimée par le même nombre que le logarithme népérien de l'abscisse qui répond à la limite supérieure; c'est pour cette raison que les logarithmes népériens portent aussi le nom de logarithmes hyperboliques.

**209.** — Aire de la logarithmique. L'aire de la logarithmique

$$y = a \log x$$

prise à partir de  $x = 1$ , a pour expression

$$U = a \int_1^x \log x dx = a [x \log x - (x - 1) \log e].$$

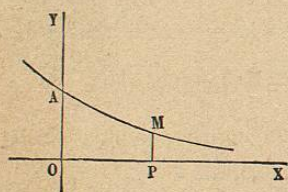


Fig. 40.

La même courbe autrement disposée peut être présentée sous la forme

$$y = Aa^{-x}.$$

L'aire de cette courbe, comptée à partir de  $x = 0$ , a pour expression

$$U = A \int_0^x a^{-x} dx = A \frac{\log e}{\log a} (1 - a^{-x}).$$

Pour  $x = \infty$ , on trouve

$$U = A \frac{\log e}{\log a}.$$

Ainsi, l'aire dont il s'agit, quoique prolongée indéfiniment dans le sens des  $x$  positifs, a néanmoins une valeur finie.

**210.** — Aire de la sinusöide. L'aire de la courbe

$$y = a \sin mx,$$

comptée à partir de  $x = 0$ , a pour expression

$$U = a \int_0^x \sin mx dx = \frac{a}{m} (1 - \cos mx).$$

Pour  $x = \frac{\pi}{m}$ , elle prend la valeur  $\frac{2a}{m}$ . Pour  $x = \frac{2\pi}{m}$ , elle prend la valeur zéro; ce qui tient à ce que de  $x = \frac{\pi}{m}$  à  $x = \frac{2\pi}{m}$  la courbe présente, au-dessous de l'axe des  $x$ , une portion égale à celle qu'elle offre au-dessus de zéro à  $\frac{\pi}{m}$ ; en sorte que la partie négative de l'aire détruit algébriquement la partie positive.

**211.** — Aire de la cycloïde. On a vu que l'on a, dans ce cas,

$$y = R(1 - \cos \alpha), \text{ et } dx = R(1 - \cos \alpha) d\alpha.$$

Il en résulte que l'aire entière de la courbe, depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = 2\pi R$ , est donnée par la formule

$$\begin{aligned} U &= R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \alpha)^2 d\alpha \\ &= R^2 \left( \int_0^{2\pi} d\alpha - 2 \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha + \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \right). \end{aligned}$$



La première de ces trois intégrales a pour valeur  $2\pi$ ; la seconde est nulle; la troisième (187) a pour valeur  $\pi$ . Il vient donc

$$U = R^2(2\pi + \pi), \text{ ou } U = 3\pi R^2,$$

c'est-à-dire que l'aire de la cycloïde équivaut à trois fois l'aire du cercle générateur.

**212.** — Aire d'une figure irrégulière quelconque. Rapportons cette figure à deux axes rectangulaires tracés dans son plan; puis, par des parallèles à l'axe des  $y$ , supposons-la divisée en bandes très-minces, telles que  $MNN'M'$ . Si les cordes

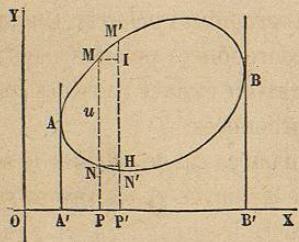


Fig. 41.

$MN$  et  $M'N'$  sont suffisamment rapprochées, on peut remplacer la bande dont il s'agit par le rectangle  $MNHI$ , en négligeant les triangles curvilignes  $MIM'$  et  $NHN'$  infiniment petits par rapport à ce rectangle. On peut donc regarder l'aire proposée comme la limite d'une somme de rectangles analogues, ayant pour hauteur la corde  $MN$ , que nous désignerons par  $u$ , et pour base la longueur  $NH$  ou  $PP'$ , qui n'est autre chose que l'accroissement  $\Delta x$  de l'abscisse  $OP$  ou  $x$ , qui répond à cette corde. Soient  $OA' = a$ , et  $OB' = b$  les abscisses correspondantes aux parallèles à l'axe des  $y$  menées tangentiellement à la figure donnée. Nous aurons

$$U = \lim. \sum u \Delta x = \int_a^b u dx.$$

Comme la corde  $u$  ne sera pas en général donnée en fonction de  $x$ , on emploiera la formule de Th. Simpson. On divisera l'intervalle  $A'B'$  en un nombre pair  $n$  de parties égales; par les points de division on mènera des parallèles à l'axe des  $y$ , et

l'on mesurera les cordes telles que  $MN$ ; nous les désignerons par  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}$ . Les cordes extrêmes seront nulles, puisqu'elles correspondent aux tangentes  $AA'$  et  $BB'$ . En appelant donc  $h$  la  $n^{\text{ième}}$  partie de  $AA'$ , on aura, avec une approximation dépendant de la grandeur du nombre  $n$ ,

$$U = \frac{h}{3} [4(u_1 + u_2 + u_3 \dots) + 2(u_4 + u_5 + u_6 \dots)].$$

L'approximation sera toutefois limitée attendu que les cordes  $u_1, u_2, u_3$ , etc., ne sont obtenues elles-mêmes que par un procédé graphique qui ne saurait donner des mesures rigoureuses. Néanmoins, ce procédé est fréquemment employé dans les applications.

**213.** — Aires des courbes en coordonnées polaires. Quoique l'on fasse rarement usage des coordonnées polaires dans les applications, il peut être utile de savoir évaluer l'aire des courbes rapportées à ce genre de coordonnées.

On se propose ordinairement dans ce cas de calculer le secteur compris entre un arc  $AB$  de la courbe et les rayons vecteurs  $OA$  et  $OB$  menés à ses extrémités. Soit d'abord  $M$  un point quelconque de cet arc, et proposons-nous d'évaluer le secteur  $MOA$ . Si  $\rho$  et  $\omega$  sont les coordonnées du point  $M$ , le secteur  $MOA$  est évidemment une fonction de  $\omega$ . Désignons par  $u$  cette fonction.

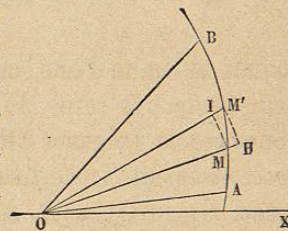


Fig. 42.

Quand  $\omega$  croîtra de  $\Delta\omega$ ,  $u$  croîtra de  $\Delta u$ ; et cet accroissement sera l'aire du secteur  $M'OM$  compris entre les rayons vecteurs  $OM = \rho$  et  $OM' = \rho + \Delta\rho$  qui répondent à  $\omega$  et à  $\omega + \Delta\omega$ . Or, si l'on décrit du pôle  $O$  comme centre les arcs  $MI$  et  $M'H$ , on reconnaît que le secteur  $M'OM$  est compris entre les secteurs circulaires  $MOI$  et  $M'OH$ , qui ont pour angle au centre  $\Delta\omega$ . On a donc

$$\frac{1}{2} \rho^2 \Delta\omega < \Delta u < \frac{1}{2} (\rho + \Delta\rho)^2 \Delta\omega,$$



d'où

$$\frac{1}{2} \rho^2 < \frac{\Delta u}{\Delta \omega} < \frac{1}{2} (\rho + \Delta \rho)^2.$$

Si l'on fait tendre  $\Delta \omega$  vers zéro,  $\frac{\Delta u}{\Delta \omega}$  tend vers  $\frac{du}{d\omega}$ ; en même temps le dernier membre tend vers  $\frac{1}{2} \rho^2$ , puisque  $\Delta \rho$  tend vers zéro. A la limite on doit donc avoir

$$\frac{du}{d\omega} = \frac{1}{2} \rho^2,$$

d'où

$$du = \frac{1}{2} \rho^2 d\omega$$

Et si l'on intègre à partir de  $\omega = \text{AOX} = \alpha$  jusqu'à  $\omega = \text{MOX}$ , on trouve

$$u = \int_{\alpha}^{\omega} \frac{1}{2} \rho^2 d\omega,$$

expression dans laquelle il restera à mettre pour  $\rho$  sa valeur en fonction de  $\omega$  tirée de l'équation de la courbe.

Pour  $\omega = \text{BOX} = \beta$ , on aurait, en appelant U l'aire AOB,

$$U = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \rho^2 d\omega.$$

214. — EXEMPLES. I. Prenons d'abord la spirale d'Archimède, dont l'équation est  $\rho = a\omega$ ; on aura, en comptant les aires à partir de  $\omega = 0$ ,

$$u = \int_0^{\omega} \frac{1}{2} a^2 \omega^2 d\omega = \frac{1}{6} a^2 \omega^3,$$

ce qu'on peut écrire

$$u = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \rho^2 \cdot \omega,$$

c'est-à-dire que l'aire du secteur de spirale considéré est le tiers du secteur circulaire qui aurait pour rayon  $\rho$  et pour angle un centre  $\omega$ .

II. Considérons en second lieu la spirale logarithmique  $\rho = ae^{\omega}$ .

Nous aurons

$$u = a^2 \int_0^{\omega} e^{2\omega} d\omega = \frac{1}{2} a^2 (e^{2\omega} - 1) = \frac{1}{2} (\rho^2 - a^2),$$

expression facile à construire.

On peut remarquer que si l'on prend pour limite —  $\omega$  et zéro, on obtient

$$u = \frac{1}{2} a^2 (1 - 0) = \frac{1}{2} a^2.$$

Ainsi l'aire indéfinie que décrit le rayon vecteur dans le sens des  $\omega$  négatifs, lorsque la courbe tourne indéfiniment autour du pôle en s'en rapprochant d'aussi près qu'on voudra sans jamais l'atteindre, a néanmoins une valeur finie.

### § 3. — CALCUL DE L'AIRES DES SURFACES COURBES.

215. — On entend par l'aire d'une surface courbe fermée la limite vers laquelle tend une surface polyédrale inscrite ou circonscrite. On peut toujours imaginer un polyèdre à faces triangulaires inscrit dans la surface proposée; et si, par chacun de ses sommets, on mène des plans tangents à la surface, on détermine un polyèdre circonscrit. Si l'on multiplie indéfiniment le nombre des faces du polyèdre inscrit, et,