d'où

$$\frac{1}{2}\rho^2 < \frac{\Delta u}{\Delta \omega} < \frac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2.$$

Si l'on fait tendre $\Delta\omega$ vers zéro, $\frac{\Delta u}{\Delta\omega}$ tend vers $\frac{du}{d\omega}$; en même temps le dernier membre tend vers $\frac{1}{2}\rho^2$, puisque $\Delta\rho$ tend vers zéro. A la limite on doit donc avoir

$$\frac{du}{d\omega} = \frac{1}{2}\rho^2,$$

d'où

$$du = \frac{1}{2}\rho^2 d\omega$$

Et si l'on intègre à partir de $\omega = \text{AOX} = \alpha$ jusqu'à $\omega = \text{MOX}$, on trouve

$$u = \int_\alpha^\omega \frac{1}{2}\rho^2 d\omega,$$

expression dans laquelle il restera à mettre pour ρ sa valeur en fonction de ω tirée de l'équation de la courbe.

Pour $\omega = \text{BOX} = \beta$, on aurait, en appelant U l'aire AOB,

$$\text{U} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2 d\omega.$$

214. — Exemples. I. Prenons d'abord la spirale d'Archimède, dont l'équation est $\rho = a\,\omega$; on aura, en comptant les aires à partir de $\omega = 0$,

$$u = \int_0^\omega \frac{1}{2} a^2\omega^2 d\omega = \frac{1}{6} a^2\omega^3,$$

ce qu'on peut écrire

$$u = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\rho^2\cdot\omega,$$

c'est-à-dire que l'aire du secteur de spirale considéré est le tiers du secteur circulaire qui aurait pour rayon ρ et pour angle un centre ω.

II. Considérons en second lieu la spirale logarithmique $\rho = ae^\omega$.

Nous aurons

$$u = a^2 \int_0^\omega e^{2\omega} d\omega = \frac{1}{2} a^2 (e^{2\omega} - 1) = \frac{1}{2}(\rho^2 - a^2),$$

expression facile à construire.

On peut remarquer que si l'on prend pour limite $-\omega$ et zéro, on obtient

$$u = \frac{1}{2} a^2 (1 - 0) = \frac{1}{2} a^2.$$

Ainsi l'aire indéfinie que décrit le rayon vecteur dans le sens des ω négatifs, lorsque la courbe tourne indéfiniment autour du pôle en s'en rapprochant d'aussi près qu'on voudra sans jamais l'atteindre, a néanmoins une valeur finie.

§ 3. — CALCUL DE L'AIRE DES SURFACES COURBES.

215. — On entend par l'*aire* d'une surface courbe fermée la limite vers laquelle tend une surface polyédrale inscrite ou circonscrite. On peut toujours imaginer un polyèdre à faces triangulaires inscrit dans la surface proposée ; et si, par chacun de ses sommets, on mène des plans tangents à la surface, on détermine un polyèdre circonscrit. Si l'on multiplie indéfiniment le nombre des faces du polyèdre inscrit, et, par suite, celles du polyèdre circonscrit, les aires de ces deux polyèdres tendent vers une limite commune ; c'est cette limite qui est l'aire de la surface proposée.

Si la surface, au lieu d'être fermée, est terminée par un certain contour C, on peut concevoir qu'on ait pris sur ce contour un nombre indéfini de points pour servir de sommets au polyèdre inscrit, et qui seront en même temps les points de contact d'autant de faces du polyèdre circonscrit. Le polyèdre inscrit se terminera alors à une ligne brisée L inscrite au contour C, et le polyèdre circonscrit se terminera à une ligne brisée L′ circonscrite au même contour. (En négligeant les infiniment petits du troisième ordre, on peut toujours admettre que deux tangentes consécutives de ce contour se rencontrent.) Quand on multipliera indéfiniment le nombre des sommets du polyèdre inscrit, et, par suite, le nombre des faces du polyèdre circonscrit, les lignes brisées L et L′ tendront vers le contour C, et les surfaces des deux polyèdres tendront vers une même limite, qui sera encore l'aire de la surface proposée.

Il résulte de ces considérations que, dans une étendue infiniment petite, aux environs d'un point pris sur la surface, cette surface peut être confondue avec son plan tangent en ce point.

On peut remarquer qu'on emploie des considérations du même genre dans la Géométrie élémentaire lorsqu'on regarde la surface latérale d'un cylindre comme la limite de celle d'un prisme, celle d'un cône comme la limite de celle d'une pyramide, ou celle d'une sphère comme la limite d'une série de surfaces de troncs de cônes engendrés par les côtés d'une ligne brisée.

216. — *Surfaces de révolution.* Soit AB la génératrice de la surface ; OX l'axe de révolution, AC et BD les traces des deux plans perpendiculaires à cet axe et qui limitent la surface à évaluer. On peut, à l'aide d'une série de plans perpendiculaires à OX, diviser cette surface en zones élémentaires, telles

que celle qui serait engendrée par l'arc MM′. La corde de cet arc engendre la surface latérale d'un tronc de cône, dont la mesure est $\frac{1}{2} \cdot 2\pi\,(\mathrm{MP} + \mathrm{M'P'}) \cdot \mathrm{MM'}$. Si M′ se rapproche indéfiniment du point M′, la corde MM′ tendra vers l'arc élémentaire ds, et la surface du tronc de cône tendra vers la zone élémentaire $d\mathrm{U}$ de la surface considérée.

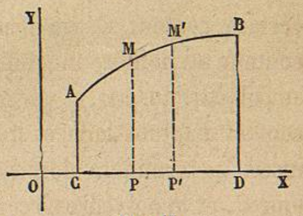

Fig. 43.

En même temps, si y représente l'ordonnée MP, l'ordonnée M′P′ ou $y + \Delta y$ tendra vers y. On aura donc à la limite

$$d\mathrm{U} = 2\pi\, y\, ds\,;$$

et si a et b sont les abscisses qui répondent aux extrémités A et B de la génératrice, on en déduira

$$(1) \qquad \mathrm{U} = 2\pi \int_a^b y\, ds = 2\pi \int_a^b y\, dx \sqrt{1 + y'^2}.$$

L'équation de la génératrice étant donnée par rapport aux axes OX et OY, on en tirera y et y', et l'on calculera l'intégrale définie qui forme le second membre de l'équation (1).

217. — I. Prenons pour premier exemple la *zone sphérique*. En plaçant l'origine au centre du cercle générateur, on aura pour l'équation de ce cercle

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2,$$

d'où l'on tire

$$y' = -\frac{x}{y},$$

et

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\mathrm{R}}{y}.$$

Substituant dans la formule (1), on obtient

$$(2) \qquad U = 2\pi \int_a^b R dx = 2\pi R (b-a)$$

Ce résultat est conforme à la Géométrie, car il exprime que l'aire d'une zone sphérique a pour mesure la circonférence $2\pi R$ d'un grand cercle multipliée par la hauteur $b-a$ de zone.

II. On peut, comme exercice, calculer la surface engendrée par une cycloïde tournant autour de la droite sur laquelle roule le cercle générateur, c'est-à-dire autour de l'axe des x. On trouvera $U = \frac{64}{3}\pi R^2$, R désignant le rayon du cercle générateur.

218.— III. Nous prendrons encore pour exemple la surface de l'*ellipsoïde de révolution*. Nous supposerons l'ellipsoïde aplati aux pôles, ce qui est le cas du globe terrestre ; c'est-à-dire que nous prendrons pour axe de révolution le petit axe. Nous pourrons écrire alors l'équation de l'ellipse génératrice sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

d'où

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y};$$

mais nous supposerons $b > a$, et nous poserons

$$c^2 = b^2 - a^2.$$

Nous aurons d'abord

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} = \frac{a^4 b^2 + b^2 c^2 x^2}{a^4 y^2},$$

d'où

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{b\sqrt{a^4 + c^2 x^2}}{a^2 y},$$

et, en substituant dans l'équation (1), et ne prenant que la moitié de l'ellipsoïde,

$$U = 2\pi \int_0^a \frac{b\,dx\sqrt{a^4 + c^2x^2}}{a^2} = \frac{2\pi b}{a^2}\int_0^a dx\sqrt{a^4 + c^2x^2}.$$

Pour effectuer l'intégration, nous poserons

$$x = \frac{a^2}{c}u, \qquad \text{d'où} \qquad dx = \frac{a^2}{c}du;$$

et, en substituant,

$$U = \frac{2\pi a^2 b}{c}\int_0^u du\sqrt{1+u^2}$$
$$= \frac{2\pi a^2 b}{c}\cdot\frac{1}{2}\left[\log'\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) + u\sqrt{1+u^2}\right],$$

sans constante, attendu que l'aire doit s'annuler pour $x = 0$ et, par conséquent, pour $u = 0$. Remettant pour u sa valeur $\frac{cx}{a^2}$, on trouve, après réductions,

$$U = \frac{\pi a^2 b}{c}\log'\left(\frac{cx + \sqrt{a^4 + c^2x^2}}{a^2}\right) + \frac{\pi b\, x\sqrt{a^4 + c^2x^2}}{a^2}.$$

aisant enfin $x = a$ et réduisant, on obtient

$$U = \frac{\pi a^2 b}{c}\log'\left(\frac{b+c}{a}\right) + \pi b^2.$$

L'aire de l'ellipsoïde entier en est le double, ou

$$(3) \qquad \frac{2\pi a^2 b}{c}\log'\left(\frac{b+c}{a}\right) + 2\pi b^2.$$

REMARQUE. Cette formule doit redonner l'aire de la sphère quand on suppose $b=a$. Si l'on fait à la fois $a=b$ et $c=0$, le premier terme de l'expression (3) prend la forme $\frac{0}{0}$. Mais le facteur variable de ce terme peut s'écrire, en regardant b comme constant, et mettant à part le facteur $2\pi b$,

$$\frac{(b^2-c^2)}{c}\cdot\log'\left(\frac{b+c}{\sqrt{b^2-c^2}}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{b^2-c^2}{c}\cdot\frac{1}{2}\log'\frac{b+c}{b-c},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\frac{b^2}{c}\left[\log'(b+c)-\log'(b+c)\right]-\frac{1}{2}c\log'\frac{b+c}{b-c}.$$

Pour $c=0$, le second terme disparaît. Le premier prend la forme $\frac{0}{0}$; mais, en remplaçant le numérateur et le dénominateur par leurs dérivées (81), on trouve

$$\frac{1}{2}b^2\frac{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b-c}}{1};$$

et pour $c=0$, il reste

$$\frac{1}{2}b^2\cdot\frac{2}{b}, \quad \text{ou } b.$$

La valeur de l'aire est donc

$$2\pi b^2+2\pi b^2, \quad \text{ou} \quad 4\pi b^2,$$

ce qui est bien l'aire de la sphère dont le rayon est b.

219. — *Surface quelconque donnée par son équation.* — Soit ABC une surface courbe dont l'équation est

$$(1) \qquad z=f(x, y).$$

Par des plans DEF, D'E'F' parallèles au plan des zy, on la

décompose d'abord en zones élémentaires telles que DEE'D'; puis, par des plans MPP'M', NQQ'N', parallèles au plan des zx, on subdivise cette zone en quadrilatères curvilignes, tels que MNN'M'. Si les distances telles que FF' et PQ deviennent infiniment petites, ces quadrilatères seront ce que l'on nomme les *éléments* de la surface considérée, et la somme de ces éléments, prise entre les limites convenables, sera l'*aire* de cette surface.

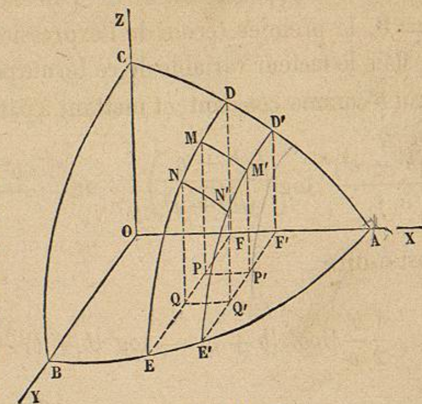

Fig. 41.

Concevons que l'on ait mené le plan tangent en M; les plans MPQN et M'P'Q'N' d'une part, et les plans MPP'M', et NQQ'N' de l'autre, détermineront sur ce plan tangent un quadrilatère qui sera la limite vers laquelle tend MNN'M'. Or, ce quadrilatère déterminé sur le plan tangent a pour projection le rectangle PQQ'P'; en sorte que, si l'on appelle dU l'élément MNN'M', ou le quadrilatère qui lui correspond sur le plan tangent, et γ l'angle que ce plan tangent fait avec le plan des xy, on aura, par une propriété connue,

$$dU.\cos\gamma=PQQ'P'=dx\,dy,$$

d'où

$$dU=\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}.$$

Mais $\cos\gamma$ a pour valeur (139)

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

les lettres p et q désignant les dérivées partielles de z prises par rapport à x et à y. Il vient donc

$$dU = dx\,dy\,\sqrt{p^2+q^2+1},$$

ou

$$(2)\qquad dU = dx\,dy\,\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}.$$

L'aire demandée est la somme des éléments représentés par ces formules, dans laquelle il faut supposer qu'on ait mis pour $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ leurs valeurs tirées de l'équation (1) de la surface. Mais, pour obtenir cette somme, il y a deux intégrations à faire. Si l'on fait d'abord la somme de tous les éléments compris dans la zone élémentaire DEED', x ne variera pas; mais il faudra faire varier y depuis $y=0$, qui répond au plan des zx, jusqu'à l'ordonnée FE de la courbe AB. Pour obtenir cette ordonnée, il faut, dans l'équation (1) de la surface, faire $z=0$, et en tirer y en fonction de x, ce qui donnera une valeur de la forme $y=\varphi(x)$. Cette première intégration, donnant l'aire de la zone DEE'D', devra donc être faite depuis $y=0$ jusqu'à $y=\varphi(x)$. C'est-à-dire que l'on prendra d'abord l'intégrale indéfinie, en y regardant x comme constant; et, pour avoir l'intégrale définie, on remplacera successivement y par $\varphi(x)$ et par *zéro*, puis l'on retranchera le second résultat du premier. Le résultat de ce calcul sera une fonction de x, multipliée par le facteur dx.

Il faudra ensuite faire la somme de toutes les zones élémentaires analogues; pour cela, il faudra faire une seconde intégration par rapport à x, et dont les limites seront $x=0$, qui répond au plan des zy, et $x=OA=a$, qui répond au point A. Le résultat de ce calcul sera l'aire de la portion de la surface comprise dans le premier angle des plans coor-

donnés. On le représente par l'*intégrale double*

$$(3)\qquad U = \int_0^a dx \int_0^{\varphi(x)} dy\,\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1},$$

ou bien

$$U = \int_0^a \int_0^{\varphi(x)} dx\,dy\,\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}.$$

Plus généralement, et c'est notamment ce qui arrive quand la surface ne coupe pas les plans coordonnés, on se propose d'obtenir l'aire de la partie de cette surface qui se projette sur le plan des xy, entre les deux courbes ayant pour équation

$$y=\psi(x),\quad \text{et}\quad y=\varphi(x),$$

et qui peuvent être deux branches d'une même courbe, et les deux parallèles à l'axe des y, qui ont pour équations

$$x=a,\quad \text{et}\quad x=b.$$

On écrit alors

$$(4)\qquad U = \int_a^b \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} dx\,dy\,\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}.$$

Et pour faire ce calcul il faut, comme ci-dessus: 1° *remplacer* $\frac{dz}{dx}$ *et* $\frac{dz}{dy}$ *par leurs valeurs tirées de l'équation* (1) *de la surface;* 2° *intégrer une première fois en regardant* x *comme constant; remplacer ensuite* y *par les limites* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$, *et soustraire le second résultat du premier;* 3° *intégrer de nouveau par rapport à* x; *et remplacer enfin* x *par les limites* b *et* a, *et soustraire le second résultat du premier.*

220. — Nous nous proposons, par exemple, d'évaluer l'aire de la portion de la surface

$$(5) \qquad z = \frac{2}{3}\,\frac{(x+y)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}},$$

qui se projette entre la droite $x+y=3$, et les axes des x et des y.

On tire d'abord de l'équation (5)

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{x+y}{2}}, \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dy} = \sqrt{\frac{x+y}{2}}.$$

Il vient donc, en appelant U l'aire cherchée,

$$U = \int_0^3 \int_0^{3-x} dx\,dy\,\sqrt{x+y+1}.$$

L'intégrale indéfinie prise par rapport à y est

$$\frac{2}{3}(x+y+1)^{\frac{3}{2}};$$

si l'on met pour y les valeurs $3-x$ et 0, et qu'on retranche le second résultat du premier, on obtient

$$\frac{2}{3}\left[8-(x+1)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Multipliant par dx, et intégrant de nouveau entre les limites 0 et 3, on trouve

$$\frac{2}{3}\left(8.3-\frac{2}{5}.32\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5},$$

ou, en effectuant,

$$\frac{116}{15}, \quad \text{ou} \quad 7,733...$$

Ce genre de calcul se rencontre rarement dans les applications.

§ 4. — CALCUL DES VOLUMES TERMINÉS PAR DES SURFACES COURBES.

221. — *Volumes terminés par des surfaces de révolution.* Soit AB la génératrice de la surface, OX l'axe de révolution, OY un axe perpendiculaire au premier, AA′ et BB′ les traces de deux plans perpendiculaires à l'axe OX, et limitant le volume qu'on se propose d'évaluer. On suppose la courbe AB donnée par son équation

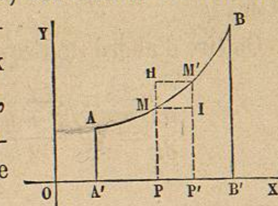

Fig. 45.

$$(1) \qquad y = f(x).$$

Menons une ordonnée quelconque MP, et par cette ordonnée faisons passer un plan perpendiculaire à l'axe de révolution. Désignons par V le volume compris entre les plans MP et AA′ ; ce volume sera une fonction de l'abscisse x du point M.

Si l'on suppose que le point M se transporte en M′, et que OP ou x augmente de PP′ ou Δx, le volume V s'accroîtra du volume élémentaire ΔV engendré par le trapèze curviligne MPP′M′. Mais, si l'on mène MI et M′H parallèles à OX, il est aisé de voir que le volume engendré par ce trapèze est compris entre les volumes engendrés par les rectangles MPP′I et HPP′M′, lesquels sont des cylindres ayant respectivement pour mesure

$$\pi y^2 \Delta x, \quad \text{et} \quad \pi(y+\Delta y)^2 \Delta x.$$

On a donc

$$\pi y^2 \Delta x < \Delta V < \pi(y+\Delta y)^2 \Delta x,$$

d'où

$$\pi y^2 < \frac{\Delta V}{\Delta x} < \pi(y+\Delta y)^2.$$