de la portion de la surface

$$(5) \qquad z = \frac{2}{3}\,\frac{(x+y)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}},$$

qui se projette entre la droite $x+y=3$, et les axes des x et des y.

On tire d'abord de l'équation (5)

$$\frac{dz}{dx}=\sqrt{\frac{x+y}{2}}, \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dy}=\sqrt{\frac{x+y}{2}}.$$

Il vient donc, en appelant U l'aire cherchée,

$$U=\int_0^3\int_0^{3-x} dx\,dy\,\sqrt{x+y+1}.$$

L'intégrale indéfinie prise par rapport à y est

$$\frac{2}{3}(x+y+1)^{\frac{3}{2}};$$

si l'on met pour y les valeurs $3-x$ et 0, et qu'on retranche le second résultat du premier, on obtient

$$\frac{2}{3}\left[8-(x+1)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Multipliant par dx, et intégrant de nouveau entre les limites 0 et 3, on trouve

$$\frac{2}{3}\left(8.3-\frac{2}{5}.32\right)+\frac{2}{3}.\frac{2}{5},$$

ou, en effectuant,

$$\frac{116}{15}, \quad \text{ou} \quad 7{,}733...$$

Ce genre de calcul se rencontre rarement dans les applications.

§ 4. — CALCUL DES VOLUMES TERMINÉS PAR DES SURFACES COURBES.

221. — *Volumes terminés par des surfaces de révolution.* Soit AB la génératrice de la surface, OX l'axe de révolution, OY un axe perpendiculaire au premier, AA′ et BB′ les traces de deux plans perpendiculaires à l'axe OX, et limitant le volume qu'on se propose d'évaluer. On suppose la courbe AB donnée par son équation

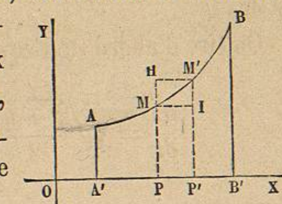

Fig. 45.

$$(1) \qquad y=f(x).$$

Menons une ordonnée quelconque MP, et par cette ordonnée faisons passer un plan perpendiculaire à l'axe de révolution. Désignons par V le volume compris entre les plans MP et AA′; ce volume sera une fonction de l'abscisse x du point M.

Si l'on suppose que le point M se transporte en M′, et que OP ou x augmente de PP′ ou Δx, le volume V s'accroîtra du volume élémentaire ΔV engendré par le trapèze curviligne MPP′M′. Mais, si l'on mène MI et M′H parallèles à OX, il est aisé de voir que le volume engendré par ce trapèze est compris entre les volumes engendrés par les rectangles MPP′I et HPP′M′, lesquels sont des cylindres ayant respectivement pour mesure

$$\pi y^2\Delta x, \quad \text{et} \quad \pi(y+\Delta y)^2\Delta x.$$

On a donc

$$\pi y^2\Delta x < \Delta V < \pi(y+\Delta y)^2\Delta x,$$

d'où

$$\pi y^2 < \frac{\Delta V}{\Delta x} < \pi(y+\Delta y)^2.$$

Mais si l'on fait tendre Δx vers zéro, $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ tendra vers la dérivée de V par rapport à x, c'est-à-dire vers $\frac{dV}{dx}$; en même temps $y + \Delta y$ tendra vers y, et les membres extrêmes des inégalités ci-dessus tendront à devenir égaux; on aura donc, à la limite

$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2, \quad \text{d'où} \quad dV = \pi y^2 dx,$$

et par conséquent

$$(2) \qquad V = \pi \int_a^x y^2\, dx,$$

en appelant a l'abscisse du point A.

Pour avoir la valeur comprise entre les plans AA' et BB', il suffira de remplacer la limite x de l'intégrale définie (2) par l'abscisse du point B, que nous désignerons par b. Nous aurons ainsi

$$(3) \qquad V = \pi \int_a^b y^2\, dx.$$

Et, pour effectuer le calcul, il suffira de remplacer y par sa valeur tirée de l'équation (1) de la génératrice, et d'effectuer l'intégration entre les limites indiquées.

Remarque. — La figure suppose l'ordonnée y croissante; si elle était décroissante, les mêmes raisonnements subsisteraient; il n'y aurait de changé que le sens des inégalités qui nous ont servi de point de départ.

222. I. — Nous appliquerons d'abord la formule (3) à l'ellipsoïde de révolution. L'axe de révolution étant, par exemple, le grand axe, et le centre étant pris pour origine, on aura

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);$$

et, par suite,

$$(4) \quad V = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\, dx = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(2a^3 - \frac{2}{3}a^3\right) = \frac{4}{3}\pi b^2 a.$$

II. Nous prendrons pour second exemple le paraboloïde de révolution, terminé par un plan perpendiculaire à l'axe de la parabole, qui est l'axe de révolution.

En mettant l'origine au sommet, on aura

$$y^2 = 2px,$$

et, par suite,

$$(5) \qquad V = \pi . 2p \int_0^x x\, dx = \pi . p . x^2 = \frac{1}{2}\pi . y^2 x,$$

c'est-à-dire que ce volume est la moitié du cylindre qui a pour rayon y et pour hauteur x.

III. On peut, comme exercice, appliquer la formule (3) au volume engendré par la cycloïde tournant autour de la droite sur laquelle roule le cercle générateur, c'est-à-dire autour de l'axe des x. On trouvera

$$V = 5\pi^2 R^3,$$

R désignant le rayon du cercle générateur.

223. — *Volume de l'ellipsoïde à trois axes inégaux.* Ce volume peut être obtenu par une seule intégration, en remarquant que, dans l'ellipsoïde, toutes les sections parallèles sont des ellipses semblables. Soit OABC la portion de l'ellipsoïde comprise dans le premier angle des axes; soient $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ les trois demi-axes. Menons deux plans très-voisins MNP, M'N'P' parallèles

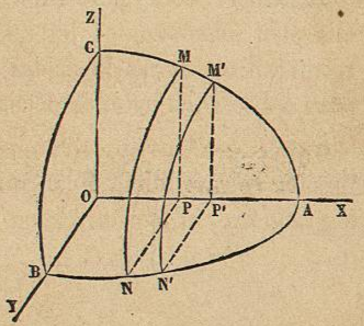

Fig. 46.

au plan des zy; ils comprendront entre eux un élément ΔV du volume que nous cherchons. Or, ce volume est compris entre les deux cylindres à base elliptique qui ont pour hauteur commune PP′ ou Δx, et pour base l'un l'ellipse MNP, dont un quadrant seulement est représenté sur la figure, l'autre l'ellipse M′N′P′. Si l'on fait tendre PP′ vers zéro, ces deux cylindres tendront l'un vers l'autre ; il en sera donc de même de l'élément ΔV compris entre eux ; et à la limite on pourra écrire

$$dV = \text{ellipse MNP} \times dx$$

Si Ω désigne l'ellipse CBO, et ω l'ellipse MNP, on a, à cause de leur similitude,

$$\omega : \Omega = \overline{MP}^2 : \overline{OC}^2,$$

d'où, en désignant MP par z,

$$\omega = \Omega \cdot \frac{z^2}{c^2}.$$

Par conséquent

$$dV = \frac{\Omega}{c^2} z^2 \, dx.$$

Mettons pour z^2 sa valeur en x tirée de l'équation de l'ellipse AC, et intégrons entre les limites $-a$ et $+a$, il viendra

$$V = \frac{\Omega}{c^2} \cdot \frac{c^2}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{\Omega}{a^2} \cdot \frac{4}{3} a^3 = \frac{4}{3} \Omega a.$$

Mais $\Omega = \pi bc$. Il vient donc enfin

$$V = \frac{4}{3} \pi abc. \tag{6}$$

On peut suivre la même marche pour obtenir le volume

d'un segment de paraboloïde elliptique, terminé par un plan perpendiculaire à son axe principal. Si son équation est

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x,$$

on trouvera pour l'expression du volume dont il s'agit

$$V = \frac{1}{2} \pi xyz\, ;$$

c'est la moitié du cylindre ayant pour base la même ellipse πyz, et la même hauteur x.

224. *Volume terminé par une surface quelconque dont on a l'équation.* Reportons-nous à la figure et aux notations du nº 219. En employant le même mode de décomposition, on divisera le volume demandé en éléments prismatiques tels que MNN′M′PQQ′P′. Soient z' la plus grande et z'' la plus petite des quatre ordonnées MP, M′P′, NQ, N′Q′ ; l'élément de volume considéré ΔV sera évidemment compris entre les deux prismes qui ont pour base commune PQQ′P′ et pour hauteur l'un z', l'autre z'', prismes qui ont pour mesure $z' \Delta x \Delta y$ et $z'' \Delta x \Delta y$. Mais si Δx et Δy tendent simultanément vers zéro, z' et z'' tendront vers l'ordonnée du point M, c'est-à-dire vers z ; on aura donc à la limite

$$dV = z\, dx\, dy,$$

et la somme de tous les éléments analogues à dV, prise entre les limites convenables, sera le volume V que l'on se propose d'obtenir.

Pour trouver cette somme, on aura deux intégrations à effectuer, comme au nº 219.

Dans le cas de la figure, on aura

$$V = \int_0^a \int_0^{\varphi(x)} z\, dx\, dy, \tag{7}$$

$\varphi(x)$ désignant l'ordonnée de la courbe AB, et a la longueur OA.

Si le volume cherché est compris entre les cylindres ayant pour équation $y = \psi(x)$ et $y = \varphi(x)$, et les plans $x = a$, $x = b$, on devra écrire

$$V = \int_a^b \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} z\,dx\,dy. \tag{8}$$

Pour effectuer le calcul indiqué, on remplacera d'abord z par sa valeur tirée de l'équation de la surface; on intégrera par rapport à y en regardant d'abord x comme constant, et, dans l'intégrale indéfinie obtenue, on remplacera y par les limites $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ et l'on retranchera le second résultat du premier. On obtiendra ainsi une fonction de x, que l'on multipliera par dx, et l'on intégrera par rapport à x, entre les limites a et b; ce qui donnera le volume que l'on cherche.

Il est important de se bien pénétrer du sens qu'il faut attacher à une *intégrale double*, telle que la formule (8), sens qui est expliqué par la règle dont nous venons de donner le détail.

Remarques. I. Comme z peut être considéré comme l'intégrale de dz, on écrit quelquefois la valeur du volume V sous la forme

$$V = \int_a^b \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \int_0^{f(x,y)} dx\,dy\,dz.$$

On a alors ce que l'on appelle une *intégrale triple*. On intègre une première fois par rapport à z, et l'on met pour z les limites $f(x, y)$ et zéro, et l'on retranche; on intègre une seconde fois par rapport à y, et l'on met pour y ses limites $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, et l'on retranche; on intègre enfin, une troisième fois, par rapport à x; on met pour x ses limites b et a, et l'on retranche.

Il est rare qu'on ait à effectuer un calcul de ce genre pour le besoin des applications.

II. Le volume, au lieu d'être limité inférieurement par le plan des xy, pourrait l'être par une autre surface donnée $z = f_1(x, y)$. Les limites de z, au lieu d'être $f(x, y)$ et zéro, seraient alors $f(x, y)$ et $f_1(x, y)$. Cela ne changerait rien à la marche du calcul.

225. — Proposons-nous, comme exemple, de calculer le volume compris entre la surface qui a pour équation $z = xy^2$, le plan des xy, les cylindres représentés par les deux équations $y = -\sqrt{2px}$ et $y = -\sqrt{2px}$, et les deux plans qui ont pour équation $x = 0$ et $x = a$. Nous aurons

$$V = \int_0^a \int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} .\, xy^2 .\, dx\,dy$$

L'intégration par rapport à y donne

$$\frac{1}{3} x \,.\, y^3 + \text{const.};$$

et, en substituant à y ses limites, et faisant la soustraction,

$$\frac{1}{3} x \,.\, 2(2px)^{\frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}(2p)^{\frac{3}{2}} \,.\, x^{\frac{5}{2}}.$$

Multipliant par dx et intégrant de 0 à a, on obtient

$$\frac{2}{3}(2p)^{\frac{3}{2}} \,.\, \frac{2}{7} \,.\, a^{\frac{7}{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{21}(2pa)^{\frac{3}{2}} \,.\, a^2,$$

ou, en nommant b l'ordonnée de la parabole $y^2 = 2px$ qui répond à l'abscisse a,

$$V = \frac{4}{21} \,.\, b^3 a^2.$$

226. — *Calcul des volumes par approximation.* Lorsque les intégrations nécessaires pour obtenir le volume d'un corps ne peuvent pas s'effectuer, ou lorsque le corps a une forme irrégulière qui se refuse à toute définition géométrique, ce volume ne peut s'obtenir que par approximation. Afin d'en donner un exemple, nous supposerons qu'il s'agisse d'obtenir le volume d'un monticule de terre donné par son contour apparent sur le plan vertical de projection et par la projection horizontale de ses courbes de niveau.

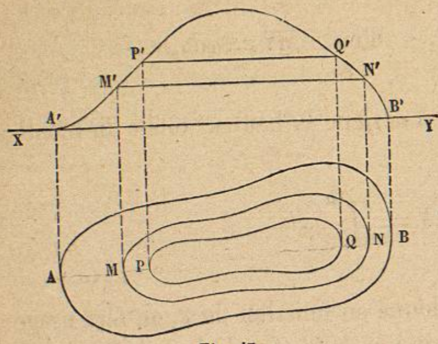

Fig. 47.

Concevons qu'on ait divisé ce volume par des plans horizontaux en tranches très-minces ; et soit M'N'P'Q', MNPQ l'une de ces tranches. Désignons par ω l'aire de la section M'N', MN, par z sa distance au plan horizontal de projection ; soit Δz la distance des plans M'N' et P'Q' ; $\omega - \Delta\omega$ l'aire de la section P'Q', PQ. La tranche considérée, dont nous représenterons le volume par ΔV, sera comprise entre les deux cylindres qui ont pour hauteur commune Δz et pour bases ω et $\omega - \Delta\omega$; on a donc

$$\omega\Delta z > \Delta V > (\omega - \Delta\omega)\,\Delta z,$$

d'où

$$\omega > \frac{\Delta V}{\Delta z} > \omega - \Delta\omega.$$

Mais si Δz tend vers zéro, les membres extrêmes tendent à devenir égaux tous deux à ω ; en même temps $\frac{\Delta V}{\Delta z}$ tend vers

$\frac{dV}{dz}$; on a donc à la limite

$$\frac{dV}{dz} = \omega, \quad \text{d'où} \quad dV = \omega dz,$$

et, par conséquent, si h désigne la hauteur totale du monticule,

$$V = \int_0^h \omega dz.$$

Comme ω n'est pas donné en fonction de z, on fera usage de la formule de Th. Simpson (196). On divisera la hauteur h en un nombre pair n de parties égales ; par tous les points de division on mènera des plans horizontaux, qui détermineront dans le monticule autant de sections, que nous représenterons, en les numérotant à partir du bas, par $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$; en vertu de la formule citée, on aura donc

$$(9) \quad V = \frac{h}{3n}\left[(\omega_0 + \omega_n) + 4\,(\omega_1 + \omega_3 + \ldots) + 2\,(\omega_2 + \omega_4 + \ldots)\right].$$

Dans cette formule ω_n est nul, et nous ne l'avons conservé que pour la symétrie.

Comme les aires $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ ne peuvent être elles-mêmes obtenues que par approximation, l'emploi de la formule (9) est assez pénible. Mais comme, dans les questions où l'on a recours à cette méthode, dans les questions de terrassements et de transport des terres par exemple, une exactitude rigoureuse n'est pas nécessaire, on a soin de ne pas prendre le nombre n trop grand, afin de ne pas avoir un trop grand nombre de sections à déterminer ; et, toutes les fois que cela est possible, on se sert des courbes de niveau déjà figurées sur le plan du terrain.