IV. DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET DE LEUR INTÉGRATION.

§ I. DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

227. — On appelle *équation différentielle* toute équation qui contient, indépendamment des variables, leurs différentielles ou leurs dérivées d'ordre quelconque.

Les équations différentielles que l'on rencontre le plus fréquemment dans les applications, sont celles qui ne renferment que deux variables, dont l'une est considérée comme indépendante, et les dérivées de la première par rapport à cette variable indépendante. Ce sont les *équations différentielles ordinaires*.

On rencontre aussi des équations différentielles renfermant plusieurs variables, dont une seule indépendante, et les dérivées des premières par rapport à celles-ci ; par exemple, quatre variables x, y, z, t, et les dérivées de x, de y et de z par rapport à t. Ces équations se présentent alors par groupes et forment ce que l'on appelle un système d'équations différentielles *simultanées*.

On peut avoir à déterminer une fonction de plusieurs variables indépendantes, deux par exemple, connaissant la différentielle totale de cette fonction exprimée, soit à l'aide des variables indépendantes seulement, soit à l'aide de ces variables et de la fonction elle-même. C'est ce que l'on appelle une *équation aux différentielles totales*.

Enfin, on peut avoir à traiter des équations différentielles renfermant trois variables, dont une fonction des deux autres, et les dérivées partielles de la première par rapport à ces deux autres ; c'est ce que l'on appelle improprement une équation aux *différences partielles*.

228. — *Intégrer* une équation différentielle, c'est remonter

de cette équation entre les variables et leurs dérivées à la relation primitive qui lie les variables elles-mêmes. Cette relation primitive est dite l'*équation intégrale* de l'équation différentielle proposée. Ainsi l'équation différentielle

$$f'_x(x, y) + y' f'_y(x, y) = 0$$

a pour intégrale

$$f(x, y) = \text{constante}.$$

De même que l'on démontre en algèbre que *toute équation a une racine*, on démontre, dans le calcul intégral, que *toute équation différentielle a son équation intégrale*. Mais la démonstration de cette proposition peut être omise dans une première étude, et nous renverrons, à cet égard, aux traités spéciaux, et particulièrement au *Cours de calcul différentiel et intégral* de M. Serret, tome II, page 353 et suivantes.

229. — Les équations différentielles ordinaires se classent entre elles d'après l'ordre le plus élevé des dérivées qui y entrent. Si, par exemple, il s'agit d'une équation différentielle entre deux variables x et y, elle sera dite du *premier ordre* si elle contient y', du *second ordre* si elle contient y'', du *troisième ordre* si elle contient y''', et ainsi de suite.

Il en est de même pour les systèmes d'équations différentielles simultanées.

Il en est de même encore pour les équations aux différences partielles. Si, par exemple, il s'agit d'une équation aux différences partielles entre trois variables x, y, z, dont l'une z est fonction des deux autres, elle sera dite du *premier ordre*, si elle renferme les dérivées partielles du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ ou $\frac{dz}{dy}$; elle sera du *second ordre*, si elle renferme les dérivées partielles du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, ou $\frac{d^2z}{dy^2}$; et de même pour les ordres supérieurs.

Nous nous occuperons d'abord de l'intégration des équations différentielles ordinaires, en commençant par le premier ordre.

§ 2. — DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES DU PREMIER ORDRE, A DEUX VARIABLES.

230. — On a vu, dans le calcul différentiel (31), que si l'on a une équation entre deux variables x et y, telle que ces variables y soient séparées, comme dans l'équation

$$\varphi(y) = \psi(x), \tag{1}$$

on en tire par la différentiation

$$\varphi'(y)\, dy = \psi'(x)\, dx, \tag{2}$$

c'est-à-dire que l'on peut égaler les différentielles des deux membres. Réciproquement, si l'on a une équation différentielle telle que l'équation (2), dans laquelle les variables sont séparées, elle exprime que les différentielles des fonctions primitives φ et ψ sont constamment égales, et que par conséquent ces fonctions croissent de quantités toujours égales, d'où il résulte que leur différence ne change pas, ou, en d'autres termes, que ces fonctions primitives ne peuvent différer que par une constante. On peut donc déduire de l'équation différentielle (2) la relation

$$\varphi(y) = \psi(x) + C, \tag{3}$$

C désignant une constante arbitraire. La relation (3) est l'intégrale de l'équation différentielle (2).

On voit que *lorsque, dans une équation différentielle du premier ordre à deux variables, ces variables sont séparées, il suffit, pour obtenir l'équation intégrale, d'intégrer séparément les deux membres, et d'ajouter à l'un d'eux une constante arbitraire*. La relation ainsi obtenue est l'*intégrale générale;* si l'on attribue une valeur particulière à la constante arbitraire, on obtient ce que l'on appelle une *intégrale particulière*.

Soit, par exemple, l'équation différentielle très-simple

$$\frac{dy}{y} = m\, dx, \tag{4}$$

on en tirera

$$\log'.\, y = mx + C,$$

d'où

$$y = e^{mx+C}, \quad \text{ou} \quad y = Ae^{mx}, \tag{5}$$

en posant $A = e^C$. Si l'on attribue à A des valeurs particulières, on aura autant d'intégrales particulières de l'équation différentielle (4); et la relation (5) sera l'intégrale générale.

231. — La première chose à faire pour intégrer une équation différentielle du premier ordre à deux variables est donc de séparer les variables s'il est possible. Il suffit le plus souvent pour cela de transformations algébriques analogues à celles qu'on fait subir aux équations du premier degré, qu'on veut résoudre, c'est-à-dire que l'on réunit en un seul tous les termes qui contiennent le facteur dy, et en un seul aussi tous ceux qui contiennent le facteur dx; il ne saurait y avoir de terme indépendant de dy et de dx, car il faut pour l'homogénéité que tous les termes soient infiniment petits. En divisant ou en multipliant alors par un facteur convenable, on mettra l'équation sous la forme (2), et les variables seront séparées.

Soit donnée, par exemple, l'équation différentielle

$$x\, dy - y\, dx = dy\sqrt{1+x^2} + dx\sqrt{1+y^2},$$

on la mettra sous la forme

$$\frac{dy}{y+\sqrt{1+y^2}} = \frac{dx}{x-\sqrt{1+x^2}}.$$

Pour intégrer ensuite chaque membre, il suffira de multiplier et de diviser le premier par $y-\sqrt{1+y^2}$, et le second par $x+\sqrt{1+x^2}$; nous ne nous arrêterons pas à achever ce calcul.

On peut remarquer que les variables se séparent immédiatement quand l'équation différentielle est de la forme

$$y' = \varphi(x) . \psi(y),$$

car on en tire

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)\, dx.$$

Si, par exemple, on avait à intégrer

$$y' = x^2(1+y^2),$$

on obtiendrait d'abord

$$\frac{dy}{1+y^2} = x^2 dx\,;$$

et, en effectuant les intégrations,

$$\text{arc tang } y = \frac{1}{3}x^3 + \text{const.}$$

Toutes les fois qu'on a réussi à séparer les variables, la question est dite *ramenée aux quadratures*, parce qu'on n'a plus à effectuer que des intégrations analogues à celles qu'il faut exécuter pour calculer l'aire d'une courbe.

232. — Quand l'équation différentielle proposée est homogène en x et y, c'est-à-dire quand tous les facteurs qui multiplient soit dx, soit dy, sont du même degré, on parvient aisément à séparer les variables en posant $y = ux$, u désignant une variable auxiliaire.

Soit

$$\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy = 0,$$

l'équation différentielle proposée, dans laquelle les fonctions φ et ψ sont supposées homogènes et du degré m. En mettant ux à la place de y, ces fonctions acquerront le facteur x^m, que l'on pourra supprimer ; et, en remplaçant dy par sa valeur

$$u\,dx + x\,du,$$

il viendra

$$\varphi(1, u)\, dx + \psi(1, u)\,(u\,dx + x\,du) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(1, u) . du)}{\varphi(1, u) + u\psi(1, u)} = 0,$$

équation dans laquelle les variables sont séparées.

Prenons pour exemple l'équation

$$x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2+y^2}\,;$$

on la transforme en

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}},$$

d'où

$$\log' x = \log'\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) + \text{const.},$$

ou, en désignant par c une constante,

$$\frac{x}{c} = u + \sqrt{1+u^2} = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}},$$

équation qui revient à

$$x^2 - 2cy - c^2 = 0.$$

L'équation différentielle proposée résulte, en effet, de l'élimination de la constante c entre cette relation et sa différentielle.

233. — On sépare encore les variables quand l'équation différentielle proposée est *linéaire* par rapport à y' et à y, c'est-à-dire lorsque ces deux quantités n'y entrent qu'au premier degré et n'y sont point multipliées entre elles. Une équation de ce genre peut toujours se mettre sous la forme

$$(1) \qquad y' + y\varphi(x) = f(x).$$

On pose alors

$$(2) \qquad y = uv,$$

u et v étant deux fonctions indéterminées de x. On en déduit

$$dy = u\,dv + v\,du,$$

et, en substituant dans l'équation (1), après avoir multiplié par dx,

$$(4) \qquad u\,dv + v\,du + uv\varphi(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

On voit alors que l'on peut satisfaire à cette relation en posant séparément

$$(4) \qquad u\,dv = f(x)\,dx$$

et

$$(5) \qquad du + u\varphi(x)\,dx = 0.$$

La relation (5), mise sous la forme

$$\frac{du}{u} + \varphi(x)\,dx = 0$$

donne, en intégrant,

$$\log'.u + \int \varphi(x)\,dx = \text{const.}$$

ou, en désignant par X l'intégrale $\int \varphi(x)\,dx$, dans laquelle on peut faire entrer la constante,

$$\log'.u + X = 0,$$

d'où

$$u = e^{-X}.$$

Mettant pour u cette valeur dans la relation (4), on obtient

$$e^{-X}.dv = f(x) \quad \text{ou} \quad dv = e^X f(x)\,dx,$$

d'où

$$(6) \qquad v = \int e^X f(x)\,dx.$$

Par suite, il vient

$$(7) \qquad y = e^{-X}.\int e^X f(x)\,dx$$

Cette méthode conduira donc à l'intégrale cherchée toutes les fois que l'on pourra effectuer les deux quadratures exprimées par $X = \int \varphi(x)\,dx$, et par l'équation (6).

Prenons pour exemple l'équation

$$y' + y = -ax.$$

On aura ici

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = -ax;$$

par conséquent

$$X = \int 1.dx = x,$$

d'où

$$u = e^{-x},$$

et

$$v = -\int e^{x} . \, ax \, dx = a(1-x)e^{x} + C.$$

Par suite

$$y = e^{-x} . \, [a(1-x)e^{x} + C],$$

ou

$$y = a(1-x) + C e^{-x}.$$

234. — On ramène au cas précédent l'équation différentielle

$$y' + y\varphi(x) = y^n f(x).$$

Pour cela, on pose

$$y = u^k, \quad \text{d'où} \quad y' = k u^{k-1} . u',$$

et, en substituant,

$$k u^{k-1} . u' + u^k \varphi(x) = u^{kn} f(x),$$

puis en divisant par $k u^{k-1}$,

$$u' + u . \frac{\varphi(x)}{k} = u^{kn-k+1} . \frac{f(x)}{k}.$$

Pour que cette équation devienne de même forme que l'équation (1) du numéro précédent, il suffit que l'on ait

$$kn - k + 1 = 0,$$

d'où

$$k = -\frac{1}{n-1}.$$

235. — La séparation des variables n'est pas le seul procédé qui puisse être mis en usage pour intégrer les équations

différentielles du premier ordre à deux variables. Une pareille équation peut toujours être mise sous la forme

$$\text{(1)} \qquad M\,dx + N\,dy = 0,$$

M et N étant des fonctions de x et de y. Or il peut se faire que le premier membre de cette équation soit la différentielle exacte d'une fonction des deux variables x et y, considérées comme indépendantes. Si $f(x, y)$ est cette fonction, l'intégrale générale cherchée est alors

$$f(x, y) = \text{const.}$$

Soit, par exemple, l'équation différentielle

$$\text{(2)} \qquad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0.$$

On reconnaît que le premier membre est la différentielle exacte de l'arc dont la tangente est $\frac{y}{x}$; on aura donc l'intégrale générale en posant

$$\text{arc tang} \frac{y}{x} = \text{const.},$$

ce qui revient à $y = cx$, c désignant une constante arbitraire.

Mais pour que le premier membre de l'équation (1) soit une différentielle exacte, il faut (55) que la dérivée de M par rapport à y soit égale à la dérivée de N par rapport à x ; car M et N sont les dérivées partielles du premier ordre de la fonction f.

Cette condition est remplie par l'équation (2). Or elle ne le serait pas par l'équation plus simple

$$\text{(3)} \qquad x\,dy - y\,dx = 0,$$

puisque la dérivée de x par rapport à x est $+1$, tandis que la dérivée de $-y$ par rapport à y est -1. Le premier membre de l'équation (3) n'est donc pas la différentielle exacte d'une fonction des deux variables x et y. Mais on la rendrait différentielle exacte en multipliant le premier membre par le facteur $\frac{1}{x^2+y^2}$. On démontre qu'il existe toujours un facteur propre à rendre $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy$ une différentielle exacte; mais la recherche de ce facteur dépend de l'intégration d'une équation aux différences partielles, c'est-à-dire d'un calcul plus difficile que le calcul directement proposé.

D'ailleurs, les exemples simples que l'on donne d'ordinaire peuvent toujours se traiter par la séparation des variables. Nous n'insisterons donc pas sur la méthode du *facteur propre* à rendre le premier membre de (1) intégrable.

236. — Lorsque aucune des méthodes précédemment exposées ne peut réussir, on peut, pour se faire une idée de l'équation intégrale que l'on cherche, avoir recours à un procédé graphique qui, bien qu'il ne soit qu'assez grossièrement approximatif, rend parfois des services dans les applications.

L'équation différentielle proposée peut toujours être mise sous la forme

$$(1) \qquad y' = f(x, y).$$

Or l'équation intégrale cherchée peut être regardée comme l'équation d'une courbe, et la relation (1) donne alors la valeur du coefficient angulaire de la tangente à cette courbe au point qui a pour coordonnées x, y.

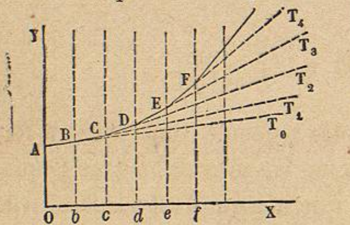

Fig. 48.

Cela posé, ayant tracé deux axes rectangulaires OX et OY, on mènera une série de droites bB, cC, dD, eE, fF, équidis-

tantes et parallèles à l'axe des y. Puis on prendra sur l'axe des y un point arbitraire A, à une distance y_0 de l'origine, et on admettra que la courbe cherchée passe par ce point A. On mettra dans le second membre de l'équation (1) les valeurs $x=0$ et $y=y_0$ qui sont les coordonnées du point A; cette équation donnera alors l'inclinaison de la tangente en A à la courbe; et l'on pourra tracer cette tangente AT_0. Son équation est

$$(2) \qquad y - y_0 = f(0, y_0)\,.\,x.$$

Soit h l'intervalle de deux parallèles consécutives à l'axe des y. L'abscisse du point B où la tangente AT_0 coupe bB sera h, et l'on obtiendra son ordonnée en faisant $x=h$ dans l'équation (2). Soit y_1 cette ordonnée. En négligeant les quantités très-petites du second ordre, on pourra regarder le point B comme étant sur la courbe cherchée. On fera $x=h$ et $y=y_1$ dans la relation (1), qui donnera l'inclinaison de la tangente en B; et l'on pourra tracer cette tangente BT_1. Son équation sera

$$(3) \qquad y - y_1 = f(h, y_1)\,.\,(x-h).$$

L'abscisse du point C où cette tangente coupe cC sera $2h$, et l'on obtiendra son ordonnée en faisant $x=2h$ dans l'équation (3). Soit y_2 cette ordonnée. On admettra, comme ci-dessus, que le point C appartient à la courbe cherchée. On fera $x=2h$ et $y=y_2$ dans la relation (1), qui donnera l'inclinaison de la tangente en C; et l'on pourra tracer cette tangente CT_2. Son équation sera

$$(4) \qquad y - y_2 = f(2h, y_2)\,(x-2h).$$

L'abscisse du point D où cette tangente coupe dD sera $3h$, et l'on obtiendra son ordonnée en faisant $x=3h$ dans l'équation (4). On admettra encore que le point D est sur la courbe cherchée. En continuant ainsi, on obtiendra une ligne brisée