ABCDEF... qui approchera d'autant plus de la courbe cherchée que l'intervalle h aura été choisi plus petit, et qui, dans beaucoup de cas, donnera une idée suffisante de la forme de la courbe. Le choix arbitraire que l'on fait du point A tient lieu dans cette opération de la constante arbitraire qui doit entrer dans l'équation intégrale.

Si l'ordonnée devenait infinie, la construction serait en défaut ; mais on peut faire disparaître cette circonstance en renversant l'équation (1) et écrivant

$$(5) \qquad \frac{dx}{dy} = x' = \frac{1}{f(x, y)}$$

Au lieu de parallèles à l'axe des y, on emploierait alors des parallèles à l'axe des x. En employant avec discernement ces deux moyens, on peut presque toujours avoir, par aperçu, la forme de la courbe cherchée dans la région où l'on a intérêt à la connaître.

237. — Une équation différentielle du premier ordre à deux variables peut être d'un degré supérieur au premier. Si, par exemple, elle ne contient que la première dérivée y', mais que cette dérivée y entre au second degré, l'équation différentielle sera du premier ordre, mais du second degré.

Dans ce cas, ce qu'il y a de plus simple à faire est de résoudre l'équation par rapport à y' ; on obtiendra ainsi deux équations séparées du premier degré, que l'on intégrera séparément, s'il est possible, par l'une des méthodes exposées ci-dessus. On obtiendra ainsi deux équations intégrales telles que

$$(1) \qquad y - f_1(x, c_1) = 0 \quad \text{et} \quad y - f_2(x, c_2) = 0,$$

c_1 et c_2 désignant des constantes arbitraires. Et l'intégrale générale sera le produit de ces deux équations membre à

membre, savoir :

$$(2) \qquad [y - f_1(x, c_1)][y - f_2(x, c_2)] = 0 ;$$

car en différentiant celle-ci, on obtient

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} [y - f_1(x, c_1)][y' - f_2'(x, c_2)] \\ \quad + [y - f_2(x, c_2)][y' - f_1'(x, c_1)] = 0, \end{array} \right.$$

relation qui est évidemment satisfaite, soit que l'on adopte la solution

$$y - f_1(x, c_1) = 0,$$

d'où

$$y' - f'_1(x, c_1) = 0,$$

soit qu'on adopte la solution

$$y - f_2(x, c_2) = 0,$$

d'où

$$y' - f'_2(x, c_2) = 0.$$

On peut même remarquer que l'on ne diminue pas la généralité de l'intégrale (3) en supposant $c_1 = c_2$, attendu que ces deux constantes n'entrent jamais à la fois dans la solution qu l'on choisit.

Soit proposée, par exemple, l'équation

$$y'^2 - 2ay' + a^2 \sin^2 x = 0 ;$$

on en tirera

$$y' = a \pm a\sqrt{1 - \sin^2 x} = a(1 \pm \cos x),$$

d'où, en intégrant,

$$y = ax + c \pm a \sin x.$$

L'intégrale générale sera donc

$$(y - ax - c - a\sin x)(y - ax - c + a\sin x) = 0$$

ou

$$(y - ax - c)^2 - a^2 \sin^2 x = 0.$$

Si l'équation différentielle proposée était du degré n en y', on verrait de même qu'on obtient l'intégrale générale en déterminant les n valeurs de y', intégrant les n équations différentielles du premier degré ainsi obtenues, passant tous les termes de chacune dans le premier membre, et multipliant membre à membre toutes ces équations, dans lesquelles il est permis, sans diminuer pour cela la généralité de l'équation intégrale, de représenter les constantes arbitraires par une même lettre. Mais on rencontre rarement, dans les applications, une équation différentielle d'un degré supérieur au second.

Lorsque l'équation différentielle ne peut être résolue par rapport à y', ou lorsque les équations différentielles du premier degré en y' que l'on en tire ne peuvent être intégrées, l'intégrale générale ne peut être obtenue, sauf les cas particuliers où l'on peut avoir recours à quelque artifice que l'habitude du calcul suggère. On en trouvera des exemples dans les traités plus étendus.

238. — Il peut arriver qu'une équation différentielle du premier ordre à deux variables soit satisfaite par une relation entre ces variables tout à fait distincte de l'intégrale générale; et ne pouvant pas s'en déduire; ce n'est point alors une intégrale particulière, et on lui donne le nom de *solution singulière**.

* Quelques auteurs adoptent le nom de *solution particulière;* mais, dans ce cas, il faut éviter de confondre ce nom avec l'expression d'*intégrale particulière*.

Quelques considérations géométriques feront comprendre l'origine de ces solutions.

Soit

$$(1) \qquad f(x, y, y') = 0$$

l'équation différentielle proposée, et soit

$$(2) \qquad F(x, y, c) = 0$$

son intégrale générale. Cette équation (2) représente une famille de courbes, dont l'*enveloppe* (106) a pour équation l'équation qui résulte de l'élimination de la constante c entre $F(x, y, c) = 0$ et sa dérivée par rapport à c. Soit

$$(3) \qquad \varphi(x, y) = 0$$

l'équation de l'enveloppe. On a vu que le caractère géométrique de cette courbe est d'être tangente à toutes celles qui sont comprises dans l'équation (2). Par conséquent, si x et y désignent les coordonnées du point de contact entre l'enveloppe et l'une des enveloppées, on obtiendra pour y' la même valeur, soit qu'on la tire de l'équation différentielle proposée (1), soit qu'on la tire de l'équation (3) de l'enveloppe. Il en résulte que l'équation (3) satisfait à l'équation (1), bien qu'elle ne soit pas en général comprise dans l'équation (2). Ce n'est donc pas une intégrale particulière, comprise dans l'intégrale générale; c'est une solution singulière.

Considérons, par exemple, l'équation

$$(4) \qquad \frac{x}{c} + \frac{y}{m - c} = 1,$$

qui représente une famille de droites, lorsqu'on y fait varier la constante c.

Si on la différentie, ce qui donne

$$(5) \qquad \frac{1}{c} + \frac{y'}{m - c} = 0,$$

et que l'on élimine c entre les relations (4) et (5), on obtient, après réductions, l'équation

$$(6) \qquad x[xy'^2-(x+y-m)y'+y]=0,$$

qui est l'équation différentielle de toutes les droites représentées par l'équation (4).

On peut remarquer qu'elle est satisfaite par $x=0$; mais cette solution provenant du facteur x, qui peut être supprimé, n'est point la solution singulière. Si l'on cherche l'équation de l'enveloppe des droites (4), et que pour cela on élimine c entre cette équation et sa dérivée par rapport à c, on obtient (108)

$$(7) \qquad (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=m \quad \text{ou} \quad y=x+m-2\sqrt{mx},$$

qui est l'équation d'une parabole. Or, si l'on différentie cette dernière, on en tire

$$y'=1-\sqrt{\frac{m}{x}},$$

valeur qui, substituée dans l'équation différentielle (6), satisfait à cette équation. L'équation (7) est donc la solution singulière.

239. — Lorsque, comme dans l'exemple précédent, on a l'intégrale générale, on voit qu'il est facile d'en déduire la solution singulière, s'il y en a une, puisqu'il suffit d'opérer comme s'il s'agissait de trouver l'équation de l'enveloppe des lignes représentées par l'intégrale générale.

Mais lorsqu'on n'a pas l'intégrale générale, il faut opérer d'une autre manière, que les considérations géométriques aideront encore à comprendre.

Soit M le point de contact de l'enveloppe avec l'une des enveloppées. Cette enveloppée est coupée par une enveloppée infiniment voisine en un point M′ infiniment voisin du point M ;

et, au point M′, ces deux enveloppées ont généralement des tangentes distinctes ; c'est-à-dire qu'au point M′ la dérivée y' a deux valeurs différentes, selon que l'on considère l'une ou l'autre des deux enveloppées dont il s'agit. Mais, si l'on fait tendre le point M′ vers le point M, chacune des deux tangentes dont il s'agit tend vers la tangente en M ; par conséquent, au point M lui-même, les deux valeurs de y' qui étaient distinctes se confondent en une seule, c'est-à-dire que l'équation $f(x, y, y')=0$ donne, en ce point, pour y', deux valeurs égales. Or le caractère des racines multiples, c'est que la dérivée de la fonction devient nulle ; au point M on doit donc avoir

$$\frac{df}{dy'}=0;$$

et, si l'on élimine y' entre les équations $f(x, y, y')=0$ et $\frac{df}{dy'}=0$, on obtiendra une relation entre x et y qui appartiendra à tous les points de l'enveloppe ; ce sera donc la solution singulière qu'il s'agissait d'obtenir.

Dans l'exemple du numéro précédent, si l'on égale à zéro la dérivée, par rapport à y' du premier membre de l'équation (6) débarrassée du facteur étranger x, on obtient

$$2xy'-(x+y-m)=0,$$

et, en éliminant y' entre cette relation et l'équation (6), on trouve

$$y=x+m\mp 2\sqrt{mx},$$

c'est-à-dire qu'on retombe sur l'équation (7), attendu que, dans l'une ou l'autre, le radical porte nécessairement avec lui le double signe. Ainsi on retrouve, par cette méthode, la solution singulière qui avait été déduite de l'intégrale générale.

Mais, pour le succès de la méthode, il faut avoir soin de préparer l'équation différentielle de manière à ne pas contenir de radicaux. Nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet.

§ 3. — DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE, A DEUX VARIABLES.

240. — Dans le cas le plus général, une équation différentielle du second ordre à deux variables x et y contient, indépendamment de ces variables, les dérivées du premier et du second ordre y' et y''. Mais nous considérerons d'abord quelques cas particuliers.

Le plus simple est celui où l'équation différentielle se présente sous la forme

$$y''=f(x).$$

En multipliant par dx et remarquant que $y''dx=dy'$, on obtient

$$dy'=f(x)\,dx,$$

et, en intégrant,

$$y'=\int f(x)\,dx+C.$$

Supposons que l'intégration indiquée puisse se faire, et soit $\varphi(x)$ l'intégrale obtenue, on aura

$$y'=\varphi(x)+C.$$

Multipliant de nouveau par dx, et remarquant que $y'\,dx=dy$, il viendra

$$dy=\varphi(x)\,dx+C\,dx,$$

et, en intégrant,

$$y=\int\varphi(x)\,dx+Cx+C',$$

C' désignant une nouvelle constante arbitraire. Si l'intégration indiquée dans le second membre peut s'effectuer, on obtiendra ainsi y en fonction de x. La relation obtenue par ce moyen sera l'intégrale générale cherchée. On remarque qu'elle contient deux constantes arbitraires C et C'.

Soit pour exemple l'équation différentielle

$$y''=\cos mx,$$

on en tirera successivement

$$y'=\int\cos mx\,dx+C=\frac{\sin mx}{m}+C,$$

et

$$y=\frac{1}{m}\int\sin mx\,dx+Cx+C'=-\frac{\cos mx}{m^2}+Cx+C'.$$

241. — On traite aussi facilement le cas où l'équation différentielle se présente sous la forme

$$y''=f(y).$$

On a, en effet,

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{y'\,dy'}{y'\,dx}=\frac{y'\,dy'}{dy};$$

on pourra donc écrire, en multipliant l'équation proposée par dy,

$$y'\,dy'=f(y)\,dy,$$

et, en intégrant,

$$\frac{y'^2}{2}=\int f(y)\,dy+C.$$

Si l'intégration indiquée peut s'effectuer, soit $\varphi(y)$ l'intégrale obtenue, on aura

$$y'^2=2\varphi(y)+2C,\quad \text{d'où}\quad y'=\sqrt{2\varphi(y)+2C}.$$