Mais, pour le succès de la méthode, il faut avoir soin de préparer l'équation différentielle de manière à ne pas contenir de radicaux. Nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet.

§ 3. — DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE, A DEUX VARIABLES.

240. — Dans le cas le plus général, une équation différentielle du second ordre à deux variables x et y contient, indépendamment de ces variables, les dérivées du premier et du second ordre y' et y''. Mais nous considérerons d'abord quelques cas particuliers.

Le plus simple est celui où l'équation différentielle se présente sous la forme

$$y''=f(x).$$

En multipliant par dx et remarquant que $y''dx=dy'$, on obtient

$$dy'=f(x)\,dx,$$

et, en intégrant,

$$y'=\int f(x)\,dx+\mathrm{C}.$$

Supposons que l'intégration indiquée puisse se faire, et soit $\varphi(x)$ l'intégrale obtenue, on aura

$$y'=\varphi(x)+\mathrm{C}.$$

Multipliant de nouveau par dx, et remarquant que $y'\,dx=dy$, il viendra

$$dy=\varphi(x)\,dx+\mathrm{C}\,dx,$$

et, en intégrant,

$$y=\int\varphi(x)\,dx+\mathrm{C}x+\mathrm{C}',$$

C′ désignant une nouvelle constante arbitraire. Si l'intégration indiquée dans le second membre peut s'effectuer, on obtiendra ainsi y en fonction de x. La relation obtenue par ce moyen sera l'intégrale générale cherchée. On remarque qu'elle contient deux constantes arbitraires C et C′.

Soit pour exemple l'équation différentielle

$$y''=\cos mx,$$

on en tirera successivement

$$y'=\int\cos mx\,dx+\mathrm{C}=\frac{\sin mx}{m}+\mathrm{C},$$

et

$$y=\frac{1}{m}\int\sin mx\,dx+\mathrm{C}x+\mathrm{C}'=-\frac{\cos mx}{m^2}+\mathrm{C}x+\mathrm{C}'.$$

241. — On traite aussi facilement le cas où l'équation différentielle se présente sous la forme

$$y''=f(y).$$

On a, en effet,

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{y'\,dy'}{y'\,dx}=\frac{y'\,dy'}{dy};$$

on pourra donc écrire, en multipliant l'équation proposée par dy,

$$y'\,dy'=f(y)\,dy,$$

et, en intégrant,

$$\frac{y'^2}{2}=\int f(y)\,dy+\mathrm{C}.$$

Si l'intégration indiquée peut s'effectuer, soit $\varphi(y)$ l'intégrale obtenue, on aura

$$y'^2=2\varphi(y)+2\mathrm{C},\quad\text{d'où}\quad y'=\sqrt{2\varphi(y)+2\mathrm{C}}$$

Remplaçant alors y' par $\frac{dy}{dx}$, on sépare aisément les variables et l'on obtient

$$\frac{dy}{\sqrt{2\varphi(y)+2C}}=dx,$$

et, en intégrant,

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\varphi(y)+2C}}+C';$$

et, si l'intégration indiquée peut s'effectuer, on a ainsi x en fonction de y; la relation obtenue est l'intégrale générale. On voit qu'elle renferme encore deux constantes arbitraires.

Soit, pour exemple, l'équation différentielle

$$y''=a^2y,$$

on obtiendra successivement

$$\frac{y'^2}{2}=\int a^2y\,dy+C=\frac{a^2y^2}{2}+C,$$

d'où

$$y'=\sqrt{a^2y^2+2C},$$

puis

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{a^2y^2+2C}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{dy}{\sqrt{y^2+\frac{2C}{a^2}}},$$

et, en intégrant,

$$x=\frac{1}{2a}\log'\left(y+\sqrt{y^2+\frac{2C}{a^2}}\right)+C'.$$

242. — L'équation différentielle du second ordre à deux variables se trouve immédiatement ramenée au premier ordre quand elle ne contient aucune de ces deux variables, mais

seulement les dérivées du premier et du second ordre. Car si l'on a à intégrer l'équation

$$f(y', y'')=0,$$

en remarquant que y'' est la dérivée première de y', on voit qu'on a affaire à une équation du premier ordre entre y' et sa dérivée. Supposons que l'intégration puisse s'effectuer, on obtiendra y' en fonction de x et d'une constante arbitraire C; soit

$$y'=\varphi(x, C),$$

l'intégrale trouvée. En multipliant par dx et intégrant de nouveau, on obtiendra

$$y=\int\varphi(x, C)\,dx+C';$$

ce sera l'intégrale générale, avec deux constantes arbitraires, de l'équation du second ordre proposée.

Soit, pour exemple, l'équation différentielle

$$y''=a\sqrt{1+y'^2},$$

on en tirera, en remplaçant y'' par $\frac{dy'}{dx}$, et séparant les variables,

$$a dx=\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}};$$

et, en intégrant,

$$ax+C=\log'\left(y'+\sqrt{1+y'^2}\right),$$

relation qui revient à

$$Ae^{ax}=y'+\sqrt{1+y'^2},$$

en remplaçant e^c par A. — On tire de là

$$y' = \frac{1}{2}\left(Ae^{ax} - \frac{1}{A}e^{-ax}\right).$$

Multipliant par dx et intégrant de nouveau, on obtient

$$y = \frac{1}{2a}\left(Ae^{ax} + \frac{1}{A}e^{-ax}\right) + C';$$

c'est l'équation intégrale cherchée.

243. — L'équation différentielle du second ordre se ramène encore au premier lorsqu'elle ne contient, avec y'' et y', que l'une des deux variables x ou y.

Supposons, par exemple, qu'elle soit de la forme

$$y'' + \varphi(x) \,.\, y' + \psi(x) = 0.$$

En multipliant par dx, on pourra écrire

$$dy' + \varphi(x) \,.\, y'\,dx + \psi(x) = 0,$$

équation différentielle du premier ordre entre y' et x. Si on peut l'intégrer, on obtiendra une intégrale de la forme

$$y' = f(x, C);$$

multipliant de nouveau par dx et intégrant, on obtiendra

$$y = \int f(x, C)\,dx + C',$$

et, si l'intégration indiquée peut s'effectuer, on aura enfin y en fonction de x, avec deux constantes arbitraires.

Supposons, au contraire, que l'équation différentielle proposée soit de la forme

$$y'' + \varphi(y)\,y' + \psi(y) = 0.$$

En remplaçant y'' par $\frac{y'dy'}{dy}$, et multipliant par dy, on aura

$$y'dy' + \varphi(y)\,y'dy + \psi(y)\,dy = 0,$$

équation différentielle du premier ordre entre y' et y. Si on peut l'intégrer, on obtiendra une intégrale de la forme

$$y' = f(y) + C.$$

Remplaçant y' par $\frac{dy}{dx}$, séparant les variables et intégrant, on trouvera

$$x = \int \frac{dy}{f(y) + C} + C',$$

et, si l'intégration indiquée peut s'effectuer, on aura enfin x en fonction de y, avec deux constantes arbitraires.

Soit, pour premier exemple, l'équation différentielle

$$y'' - \frac{y' + a}{x} = 0;$$

on en tirera

$$\frac{dy'}{y' + a} = \frac{dx}{x},$$

et, en intégrant,

$$\log'(y' + a) = \log' x + \log' C = \log' Cx,$$

d'où

$$y' = Cx - a.$$

Multipliant par dx et intégrant de nouveau, on trouvera

$$y = \frac{1}{2}Cx^2 - ax + C'.$$

Soit, pour second exemple, l'équation différentielle

$$y'' - y'(y+a) = 0\,;$$

on en tirera

$$\frac{y'dy'}{dy} = y'(y+a) \qquad \text{ou} \qquad dy' = (y+a)\,dy,$$

et, en intégrant une première fois,

$$y' = \frac{1}{2}y^2 + ay + C.$$

Remplaçant y' par $\frac{dy}{dx}$ et séparant les variables il viendra

$$dx = \frac{2dy}{y^2 + 2ay + 2C},$$

et, en intégrant une seconde fois,

$$x = 2 \cdot \int \frac{dy}{y^2 + 2ay + 2C} + C'$$

ou

$$x = \frac{2}{\sqrt{2C - a^2}} \cdot \text{arc tang} \frac{y+a}{\sqrt{2C - a^2}} + C'.$$

244. — On rencontre fréquemment dans les applications un genre particulier d'équations différentielles du second ordre, ce sont celles où la fonction y et ses dérivées y' et y'' n'entrent qu'au premier degré et ne sont pas multipliées entre elles, équations auxquelles on donne, à cause de cela, le nom d'équations différentielles *linéaires*.

Le cas le plus simple est celui où tous les coefficients sont constants et où il n'y a pas de terme indépendant des variables; où, par conséquent, l'équation différentielle peut

être mise sous la forme

(1) $$y'' + py' + qy = 0,$$

p et q étant des constantes données.

Dans ce cas, on pose

$$y = Ce^{mx},$$

d'où

$$y' = Cme^{mx} \qquad \text{et} \qquad y'' = Cm^2e^{mx}\,;$$

en substituant dans (1), on obtient

$$Ce^{mx}(m^2 + mp + q) = 0,$$

et l'on voit que l'équation différentielle sera satisfaite si m est une des racines de l'équation

(2) $$m^2 + mp + q = 0.$$

Supposons d'abord que cette équation ait ses racines réelles et inégales, et désignons-les par m_1 et m_2. L'équation différentielle proposée sera satisfaite par les deux relations

(3) $$y = Ce^{m_1x} \qquad \text{et} \qquad y = C'e^{m_2x}.$$

Mais il est aisé de voir, et cela tient à la forme linéaire de l'équation (1), qu'on satisfera encore à cette équation en prenant pour y la somme des valeurs exprimées par les relations (3), et en posant

(4) $$y = Ce^{m_1x} + C'e^{m_2x}.$$

Or cette dernière relation sera l'intégrale générale cherchée, puisqu'elle contient deux constantes C et C'.

Si, par exemple, on a à intégrer l'équation différentielle

$$y'' - (a+b)y' + aby = 0,$$

on trouve, en suivant la marche indiquée, que l'intégrale générale est

$$y = Ce^{ax} + C'e^{bx}.$$

245. — Lorsque les racines de l'équation (2) sont égales, la méthode tombe en défaut, parce que l'équation (4) revient alors à

$$y = (C + C')\, e^{mx}$$

et ne contient plus qu'une constante arbitraire $C + C'$. On procède alors d'une autre manière. Soit

$$(5) \qquad y'' - 2py' + p^2 y = 0$$

l'équation proposée ; elle se trouve dans le cas que nous examinons, puisque l'équation (2) deviendrait

$$m^2 - 2pm + p^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (m - p)^2 = 0,$$

équation qui a ses deux racines égales. On pose dans ce cas

$$(6) \qquad y = e^{mx}(Cx + C'),$$

d'où

$$y' = me^{mx}(Cx + C') + Ce^{mx}$$

et

$$y'' = m^2 e^{mx}(Cx + C') + 2C\, me^{mx}.$$

En substituant dans l'équation (5), on obtient

$$(Cx + C')(m^2 - 2pm + p^2) + 2C(m - p) = 0,$$

et l'on voit que cette équation est satisfaite en prenant $m = p$. Ainsi l'intégrale générale est alors

$$y = e^{px}(Cx + C').$$

246. — Lorsque les racines de l'équation (2) sont imaginaires, on pourrait passer des exponentielles imaginaires aux lignes trigonométriques à l'aide des formules connues. Mais on peut poser directement

$$y = C\, e^{\alpha x} \cos(\beta x + C');$$

on en déduit

$$y' = C\alpha\, e^{\alpha x} \cos(\beta x + C') - C\beta e^{\alpha x} . \sin(\beta x + C'),$$

et

$$y'' = C\alpha^2 e^{\alpha x} \cos(\beta x + C') - 2C\alpha\beta\, e^{\alpha x} \sin(\beta x + C') - C\beta^2 e^{\alpha x} \cos(\beta x + C').$$

En substituant dans l'équation (1), on obtient, après avoir divisé par $C\, e^{\alpha x}$,

$$(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q) \cos(\beta x + C') - \beta(2\alpha + p) \sin(\beta x + C') = 0,$$

et l'on voit que l'équation est satisfaite en posant

$$\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q = 0 \quad \text{et} \quad 2\alpha + p = 0,$$

d'où

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

La valeur de β ainsi trouvée est réelle, puisque, les racines de l'équation (2) étant supposées imaginaires, on a

$$\frac{p^2}{4} - q < 0, \quad \text{ou} \quad q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

247. — Si, dans l'équation (1) du n° 244, le second membre, au lieu d'être nul, avait une valeur donnée, et qu'on eût

$$y'' + py' + qy = r,$$

on ramènerait ce cas au précédent en posant $y = u + \frac{r}{q}$; car, en substituant cette valeur, il vient

$$u'' + pu' + qu = 0.$$

248. — Lorsque les coefficients de l'équation linéaire du second ordre sont fonctions de la variable x, l'intégration ne peut s'effectuer que dans des cas particuliers. On pose alors

$$y = e^u, \quad \text{d'où} \quad y' = e^u . u' \quad \text{et} \quad y'' = e^u u'' + e^u u',$$

et, en substituant dans l'équation (1) et supprimant le facteur e^u,

$$u'' + (1 + p)\, u' + q = 0,$$

ou

$$du' + (1 + p)\, u' . dx + q\, dx = 0,$$

équation différentielle du premier ordre entre u' et x. Si elle peut s'intégrer par quelqu'une des méthodes exposées plus haut et que son intégrale soit

$$u' = f(x) + \mathrm{C},$$

on en tirera

$$u = \int f(x)\, dx + \mathrm{C}x + \mathrm{C}',$$

et l'on aura, par suite, la valeur de y. Ce sera l'intégrale générale, puisqu'elle contient deux constantes arbitraires C et C'.

249. — Enfin si, par un moyen quelconque, on a réussi à trouver une intégrale particulière de l'équation différentielle proposée, la recherche de l'intégrale générale pourra être ramenée à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables.

Soit, en effet,

$$(a) \qquad y'' + py' + qy = 0$$

l'équation différentielle proposée, et soit Y une intégrale particulière de cette équation, c'est-à-dire une fonction de x qui, mise à la place de y dans (a), satisfasse à cette relation. On posera $y = \mathrm{Y}u$, u désignant une nouvelle fonction de x. On en déduit

$$y' = \mathrm{Y}'u + \mathrm{Y}u' \quad \text{et} \quad y'' = \mathrm{Y}''u + 2\mathrm{Y}'u' + \mathrm{Y}u'',$$

et, en substituant dans (a), on obtient

$$\mathrm{Y}u'' + (2\mathrm{Y}' + p\mathrm{Y})\, u' + (\mathrm{Y}'' + p\mathrm{Y}' + q\mathrm{Y}) = 0.$$

Or la dernière parenthèse est nulle puisque, par hypothèse, la fonction Y satisfait à l'équation (a) ; il reste donc

$$(b) \qquad \mathrm{Y}u'' + (2\mathrm{Y}' + p\mathrm{Y})\, u' = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{du'}{u'} + \frac{(2\mathrm{Y}' + p\mathrm{Y})\, dx}{\mathrm{Y}} = 0,$$

équation différentielle du premier ordre entre u' et x ; les variables s'y trouvent immédiatement séparées.

Si

$$u' = f(x) + \mathrm{C}$$

est l'intégrale de cette équation, on en tirera, comme plus haut,

$$u = \int f(x)\, dx + \mathrm{C}x + \mathrm{C}',$$

et, par conséquent, la relation

$$y = \mathrm{Y}\left[\int f(x)\, dx + \mathrm{C}x + \mathrm{C}'\right],$$

qui sera l'intégrale générale.

La même méthode s'appliquerait encore si le second membre de l'équation (a), au lieu d'être nul, était une fonction de x; mais l'équation du premier ordre entre u' et x serait moins simple.

§ 4. — DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES

250. — Considérons d'abord deux équations différentielles simultanées du premier ordre entre trois variables x, y et t, dont les deux premières sont fonctions de la troisième. Ces équations seront de la forme

$$(1)\quad \varphi\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, x, y, t\right)=0, \text{ et } \psi\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, x, y, t\right)=0;$$

et il s'agit d'en déduire x et y en fonction de t. Pour cela, la méthode générale consiste à différentier les deux équations (1) par rapport à t. On obtient ainsi deux équations de plus, qui contiennent, outre les quantités contenues dans les relations (1), les dérivées du second ordre $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$. Si, entre ces quatre équations, on élimine les trois quantités $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dy}{dt}$ et y, il restera une équation ne contenant que $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{dx}{dt}$ et x. Ce sera donc une équation différentielle du second ordre, entre x et t. Supposons qu'on puisse l'intégrer, on obtiendra une intégrale générale de la forme

$$(2)\qquad x=f(t, C, C'),$$

contenant deux constantes arbitraires C et C'. On en tirera $\frac{dx}{dt}$; et, en substituant dans l'une des équations (1) pour x et pour $\frac{dx}{dt}$ leurs valeurs en fonction de t, on aura une équation

différentielle du premier ordre, entre y et t. Si elle peut s'intégrer, on obtiendra une intégrale générale de la forme

$$(3)\qquad y=F(t, C''),$$

contenant une nouvelle constante arbitraire. Les relations (2) et (3) seront les équations intégrales du problème.

251. — Cette méthode est rarement applicable dans toute sa généralité; mais il arrive souvent que les équations simultanées sont linéaires par rapport aux variables x et y et à leurs dérivées, et sont de plus à coefficients constants. En éliminant alternativement entre elles les dérivées $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, on obtient deux équations différentielles simultanées, équivalentes aux premières, linéaires comme elles, et de la forme

$$(4)\qquad \frac{dx}{dt}+ax+by=C,\quad \frac{dy}{dt}+a'x+b'y=C'.$$

On fait disparaître les seconds membres en posant

$$x=u+h,\quad y=v+k,$$

et déterminant h et k par les relations

$$ah+bk=C',\quad a'h+b'k=C.$$

Il reste alors deux équations de la forme

$$(5)\qquad \frac{du}{dt}+au+bv=0,\quad \frac{dv}{dt}+a'u+b'v=0.$$

Tirons v de la première, nous aurons

$$(6)\quad v=-\frac{1}{b}\cdot\frac{du}{dt}-\frac{a}{b}u,\quad \text{d'où}\quad \frac{dv}{dt}=-\frac{1}{b}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{a}{b}\cdot\frac{du}{dt}.$$

Portant ces valeurs dans la seconde équation (5), ordon-