La même méthode s'appliquerait encore si le second membre de l'équation (a), au lieu d'être nul, était une fonction de x; mais l'équation du premier ordre entre u' et x serait moins simple.

§ 4. — DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES

250. — Considérons d'abord deux équations différentielles simultanées du premier ordre entre trois variables x, y et t, dont les deux premières sont fonctions de la troisième. Ces équations seront de la forme

$$(1) \quad \varphi\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, x, y, t\right)=0, \quad \text{et} \quad \psi\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, x, y, t\right)=0;$$

et il s'agit d'en déduire x et y en fonction de t. Pour cela, la méthode générale consiste à différentier les deux équations (1) par rapport à t. On obtient ainsi deux équations de plus, qui contiennent, outre les quantités contenues dans les relations (1), les dérivées du second ordre $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$. Si, entre ces quatre équations, on élimine les trois quantités $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dy}{dt}$ et y, il restera une équation ne contenant que $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{dx}{dt}$ et x. Ce sera donc une équation différentielle du second ordre, entre x et t. Supposons qu'on puisse l'intégrer, on obtiendra une intégrale générale de la forme

$$(2) \qquad x=f(t, C, C'),$$

contenant deux constantes arbitraires C et C'. On en tirera $\frac{dx}{dt}$; et, en substituant dans l'une des équations (1) pour x et pour $\frac{dx}{dt}$ leurs valeurs en fonction de t, on aura une équation

différentielle du premier ordre, entre y et t. Si elle peut s'intégrer, on obtiendra une intégrale générale de la forme

$$(3) \qquad y=F(t, C''),$$

contenant une nouvelle constante arbitraire. Les relations (2) et (3) seront les équations intégrales du problème.

251. — Cette méthode est rarement applicable dans toute sa généralité; mais il arrive souvent que les équations simultanées sont linéaires par rapport aux variables x et y et à leurs dérivées, et sont de plus à coefficients constants. En éliminant alternativement entre elles les dérivées $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, on obtient deux équations différentielles simultanées, équivalentes aux premières, linéaires comme elles, et de la forme

$$(4) \qquad \frac{dx}{dt}+ax+by=C, \quad \frac{dy}{dt}+a'x+b'y=C'.$$

On fait disparaître les seconds membres en posant

$$x=u+h, \quad y=v+k,$$

et déterminant h et k par les relations

$$ah+bk=C', \quad a'h+b'k=C.$$

Il reste alors deux équations de la forme

$$(5) \qquad \frac{du}{dt}+au+bv=0, \quad \frac{dv}{dt}+a'u+b'v=0.$$

Tirons v de la première, nous aurons

$$(6) \quad v=-\frac{1}{b}\cdot\frac{du}{dt}-\frac{a}{b}u, \quad \text{d'où} \quad \frac{dv}{dt}=-\frac{1}{b}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{a}{b}\cdot\frac{du}{dt}.$$

Portant ces valeurs dans la seconde équation (5), ordonnant et chassant le dénominateur b, on obtient

$$(7) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + (a+b')\frac{du}{dt} + (ab'-a'b)\,u = 0,$$

équation linéaire du second ordre entre u et t, sans second membre et à coefficients constants. Elle pourra donc s'intégrer par la méthode des n^{os} 244 et suivants ; et l'on obtiendra une intégrale générale de la forme

$$u = f(t, C, C'),$$

avec deux constantes arbitraires. On en déduira $\frac{du}{dt}$ en fonction de t ; et, en substituant pour u et $\frac{du}{dt}$ leurs valeurs dans la première des équations (6), on aura la valeur correspondante de v. On en déduira immédiatement les valeurs de x et de y.

Prenons pour exemple les deux équations simultanées

$$(8) \qquad \frac{dx}{dt} + x - 4y = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} + 3x - 6y = 6,$$

qui ont la forme des équations (4).

Les équations qui donnent h et k seront ici

$$h - 4k = 1 \quad \text{et} \quad 3h - 6k = 6,$$

qui donnent

$$h = 3 \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{2}.$$

On posera donc

$$(9) \qquad x = u + 3 \quad \text{et} \quad y = v + \frac{1}{2}$$

et l'on aura les équations sans second membre

$$(10) \qquad \frac{du}{dt} + u - 4v = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} + 3u - 6v = 0.$$

En suivant la marche indiquée, on aura à intégrer l'équation du second ordre

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 5\frac{du}{dt} + 6u = 0,$$

dont l'intégrale générale (244) est

$$u = Ce^{2t} + C'e^{3t}.$$

On en tire

$$\frac{du}{dt} = 2Ce^{2t} + 3C'e^{3t},$$

et, en substituant dans la première des équations (10), on trouve

$$v = \frac{1}{4}[2Ce^{2t} + 3C'e^{3t} + Ce^{2t} + C'e^{3t}] = \frac{3}{4}Ce^{2t} + C'e^{3t}.$$

Par suite

$$x = Ce^{2t} + C'e^{3t} + 3 \quad \text{et} \quad y = \frac{3}{4}Ce^{2t} + C'e^{3t} + \frac{1}{2}.$$

252. — Nous supposerons maintenant que l'on ait à intégrer un système de trois équations simultanées du premier ordre entre les variables x, y, z, t, dont les trois premières sont fonction de la quatrième ; on conçoit que l'on pourrait suivre une marche analogue à celle du n° 250. On différentierait deux fois par rapport à t chacune des équations proposées ; on aurait ainsi neuf équations, entre lesquelles on pourrait éliminer les huit quantités $\frac{d^3y}{dt^3}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{dy}{dt}, y, \frac{d^3z}{dt^3}, \frac{d^2z}{dt^2}, \frac{dz}{dt}, z$; il resterait une équation différentielle entre x et t, mais elle serait du troisième ordre. Une fois cette équation intégrée, on mettrait pour x sa valeur en t dans deux des équations proposées, et la question serait ramenée à l'intégration d'un système de deux équations simultanées et du premier ordre entre y, z et t. Mais cette méthode, purement théorique, n'est jamais employée.

Nous considérerons sur-le-champ le cas le plus simple, et qui se rencontre dans les applications, celui où les équations proposées sont linéaires et à coefficients constants ; par une transformation analogue à celle du numéro précédent, on peut toujours les ramener à avoir *zéro* pour second membre. Elles sont alors de la forme

$$
(11) \qquad
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} + ax + by + cz = 0,\\
&\frac{dy}{dt} + a'x + b'y + c'z = 0,\\
&\frac{dz}{dt} + a''x + b''y + c''z = 0.
\end{aligned}
$$

Il existe plusieurs méthodes pour intégrer les équations de ce genre. Nous nous contenterons de faire connaître la suivante, qui pourrait aussi être employée dans le cas de deux variables.

On pose

$$x = Ce^{mt}, \quad y = \lambda Ce^{mt}, \quad z = \mu Ce^{mt},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{dt} = mCe^{mt}, \quad \frac{dy}{dt} = m\lambda Ce^{mt}, \quad \frac{dz}{dt} = m\mu Ce^{mt}.$$

On substitue ces valeurs dans les équations proposées ; et, après avoir divisé par Ce^{mt}, il reste

$$
(12) \qquad
\begin{aligned}
&m + a + \lambda b + \mu c = 0,\\
&m\lambda + a' + \lambda b' + \mu c' = 0,\\
&m\mu + a'' + \lambda b'' + \mu c'' = 0.
\end{aligned}
$$

Si l'on élimine λ et μ entre ces trois équations, on obtient une équation du troisième degré en m. Soient m_1, m_2 et m_3, ses trois racines ; et soient C_1, C_2, C_3, trois valeurs arbitraires de C, correspondantes à ces trois racines. A cause de la forme linéaire des équations (11), on reconnaît qu'elles seront satisfaites par le système de valeurs :

$$
(13) \qquad
\begin{aligned}
x &= Ce^{m_1t} + C_2e^{m_2t} + C_3e^{m_3t},\\
y &= \lambda_1C_1e^{m_1t} + \lambda_2C_2e^{m_2t} + \lambda_3C_3e^{m_3t},\\
z &= \mu_1C_1e^{m_1t} + \mu_2C_2e^{m_2t} + \mu_3C_3e^{m_3t}.
\end{aligned}
$$

les lettres λ_1, λ_2 λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 représentant les valeurs de λ et de μ qui correspondent respectivement aux trois racines de l'équation en m. Les équations (13) seront les intégrales générales du système d'équations différentielles proposées.

253. — Quant aux équations simultanées d'ordre supérieur au premier, elles donnent lieu à des calculs de plus en plus compliqués à mesure qu'elles sont d'un ordre plus élevé, et elles ne peuvent être intégrées que dans des cas tout à fait particuliers.

Pour ne parler que du cas d'un système de trois équations différentielles entre trois variables x, y et t, si l'une était du deuxième ordre et la seconde du premier, on pourrait différentier la première une fois par rapport à t, et la seconde deux fois; on obtiendrait ainsi cinq équations, entre lesquelles on pourrait éliminer les quatre quantités $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dy}{dt}$, y, et il resterait une équation entre x et t ; mais elle serait du troisième ordre.

Si les équations proposées étaient toutes deux du second ordre, on pourrait différentier deux fois chacune d'elles par rapport à t ; on aurait ainsi six équations, entre lesquelles on éliminerait les cinq quantités $\frac{d^4y}{dt^4}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dy}{dt}$ et y ; il resserait une équation différentielle entre x et t, mais elle serait du quatrième ordre.

Nous renverrons, pour de plus amples détails sur ce sujet, aux traités plus étendus, le cas d'un système d'équations différentielles simultanées d'ordre supérieur au premier ne se présentant pas dans les applications usuelles.

§ 5. — DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TOTALES

254. — Nous nous bornerons au premier ordre et au cas de trois variables x, y, z, dont la dernière est fonction des deux autres. Le problème à résoudre est d'abord celui-ci : étant donnée une différentielle exacte de la forme

$$dz = \varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy, \tag{1}$$

en déduire la valeur de z en fonction des variables x et y. Pour que cette équation soit intégrable, il faut qu'elle remplisse une condition. Les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ doivent être les dérivées partielles de z par rapport à x et à y pour que le second membre de (1) soit une différentielle exacte. Or, on sait (55) que l'on doit avoir, en général,

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{d^2 z}{dy\,dx}.$$

Dans le cas actuel, cette relation devient

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dy} = \frac{d\psi(x, y)}{dx}; \tag{2}$$

c'est la *condition d'intégrabilité* que l'équation différentielle proposée doit remplir. Si on la suppose satisfaite, on a d'abord

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, y), \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{d\varphi(x, y)}{dy};$$

on en tire

$$dz = \varphi(x, y)\,dx,$$

et, en intégrant par rapport à x, on obtiendra z ; mais il faut bien remarquer qu'il ne suffira plus ici d'ajouter au second membre une constante arbitraire ; car, dans la différentiation de z par rapport à x, une fonction de y seul peut avoir disparu ; ce qu'il faut ajouter au second membre après l'intégration, c'est donc une fonction inconnue de y. Si l'on représente par $\Phi(x, y)$ l'intégrale de $\varphi(x, y)\,dx$ par rapport à x, on devra donc écrire

$$z = \Phi(x, y) + f(y), \tag{3}$$

f désignant la fonction inconnue.

Si maintenant on différentie par rapport à y, on aura

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d.\Phi(x, y)}{dy} + f'(y).$$

Cette valeur devant être égale à $\psi(x, y)$, on a

$$\frac{d.\Phi(x,y)}{dy} + f'(y) = \psi(x,y), \text{ d'où } f'(y) = \psi(x,y) - \frac{d.\Phi(x,y)}{dy} \tag{4}$$

Cette relation fait connaître $f'(y)$; et, en intégrant par rapport à y, on aura $f(y)$. Par suite, l'équation (3) donnera z.

Soit, par exemple, l'équation

$$dz = (2axy^2 + by + 2cx)\,dx + (2ax^2y + bx + 2ey)\,dy.$$

On aura d'abord

$$\frac{dz}{dx} = 2axy^2 + by + 2cx,$$

et

$$\frac{dz}{dy}=2ax^2y+bx+2ey.$$

Multipliant la première de ces relations par dx, et intégrant par rapport à x, on trouvera

$$z=ax^2y^2-bxy+cx^2+f(y).$$

Par suite,

$$\frac{dz}{dy}=2ax^2y+bx+f'(y).$$

En comparant cette valeur à celle qui est écrite plus haut, on en conclut

$$f'(y)=2ey, \quad \text{d'où} \quad f(y)=ey^2+C.$$

Par suite,

$$z=ax^2y^2+bxy+cx^2+ey^2+C.$$

255. — Soit maintenant l'équation plus générale

$$\text{(5)} \qquad Mdx+Ndy+Pdz=0,$$

dans laquelle M, N et P sont des fonctions des trois variables x, y et z. Si le premier membre est la différentielle exacte d'une fonction u des trois variables x, y, z, tout se réduit à trouver cette fonction, car alors l'intégrale demandée sera

$$u=\text{const.}$$

Or, si le premier membre de l'équation (5) est une différentielle exacte, l'ensemble des deux premiers termes, ou $Mdx+Ndy$, doit aussi être une différentielle exacte quand on y regarde z comme constant. Soit dv cette différentielle, et supposons que nous ayons intégré l'équation

$$dv=Mdx+Ndy,$$

par la méthode indiquée au numéro précédent, nous aurons $v=\varphi(x, y, z)$. Or la fonction u ne peut différer de v que par une fonction de z, puisque, en regardant z comme constant, du s'est réduit à dv. On peut donc écrire

$$u=\varphi(x, y, z)+f(z).$$

On en déduit

$$\frac{du}{dz}=\frac{d\varphi(x, y, z)}{dz}+f'(z).$$

Cette valeur doit coïncider avec P ; on doit donc avoir

$$P=\frac{d.\varphi(x, y, z)}{dz}+f'(z),$$

d'où

$$f'(z)=P-\frac{d.\varphi(x, y, z)}{dz};$$

et, en intégrant par rapport à z,

$$f(z)=\int\left[P-\frac{d.\varphi(x, y, z)}{dz}\right]dz.$$

Dès lors l'intégrale cherchée sera

$$\varphi(x, y, z)+f(z)=\text{const.}$$

Prenons pour exemple l'équation différentielle

$$(ayz+bz+ky)\,dx+(axz+cz+kx)\,dy$$
$$+(axy+bx+cy+2ez)\,dz=0.$$

Or on aura ici

$$dv=(ayz+bz+ky)\,dx+(axz+cz+kx)\,dy;$$

et si l'on intègre cette équation en regardant z comme contant, la méthode du n° 254 donnera

$$v = (az + k)\,xy + bzx + czy + \text{const.}\ ;$$

par suite

$$u = (az + k)\,xy + bzx + czy + \text{const.} + f(z).$$

On en tire

$$\frac{du}{dz} = axy + bx + cy + f'(z)\ ;$$

et, en comparant avec le coefficient de dz dans l'équation différentielle proposée, on en déduit

$$f'(z) = 2ez, \quad \text{d'où} \quad f(z) = ez^2 + \text{C}.$$

Par conséquent, l'équation intégrale cherchée est

$$axyz + bxz + cyz + kxy + ez^2 = \text{constante}.$$

Nous renverrons aux traités plus étendus pour le cas où l'équation différentielle proposée ne satisfait pas à la condition d'intégralité.

§ 6. — DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES

256. — L'intégration des équations aux différences partielles forme un sujet très-étendu que nous n'avons pas l'intention de développer ici. Nous nous bornerons à traiter des équations aux différences partielles du premier ordre et à donner comme exemple du second ordre les équations différentielles les plus simples que l'on rencontre dans les questions de Géométrie ou de Physique mathématique.

Considérons d'abord l'équation différentielle

$$\text{X}\frac{dz}{dx} + \text{Y}\frac{dz}{dy} = \text{Z}, \tag{1}$$

dans laquelle X, Y, Z représentent des fonctions quelconques des trois variables x, y, z.

Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'intégrale de cette équation différentielle.

En la différentiant, soit par rapport à x, soit par rapport à y, on obtient les deux relations

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} = 0.$$

Si l'on en tire les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$ pour les substituer dans l'équation (1), et qu'on chasse le dénominateur introduit, on pourra la mettre sous la forme

$$\text{X}\frac{df}{dx} + \text{Y}\frac{df}{dy} + \text{Z}\,\frac{df}{dz} = 0, \tag{2}$$

et si l'on pouvait tirer de celle-ci la valeur de f en x, y et z, le problème serait résolu.

Pour y parvenir, on considère les équations

$$\frac{dx}{\text{X}} = \frac{dy}{\text{Y}} = \frac{dz}{\text{Z}}, \tag{3}$$

qui forment un système de deux équations différentielles simultanées et du premier ordre. Concevons qu'on les ait intégrées, et soient

$$f_1(x, y, z) = \text{C}_1 \quad \text{et} \quad f_2(x, y, z) = \text{C}_2$$

les intégrales obtenues. On en déduit par la différentiation

$$\frac{df_1}{dx}\,dx + \frac{df_1}{dy}\,dy + \frac{df_1}{dz}\,dz = 0,$$