tant, la méthode du n° 254 donnera

$$v=(az+k)\,xy+bzx+czy+\text{const.}\;;$$

par suite

$$u=(az+k)\,xy+bzx+czy+\text{const.}+f(z).$$

On en tire

$$\frac{du}{dz}=axy+bx+cy+f'(z)\;;$$

et, en comparant avec le coefficient de dz dans l'équation différentielle proposée, on en déduit

$$f'(z)=2ez, \quad \text{d'où} \quad f(z)=ez^2+C.$$

Par conséquent, l'équation intégrale cherchée est

$$axyz+bxz+cyz+kxy+ez^2=\text{constante}.$$

Nous renverrons aux traités plus étendus pour le cas où l'équation différentielle proposée ne satisfait pas à la condition d'intégralité.

§ 6. — DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES

256. — L'intégration des équations aux différences partielles forme un sujet très-étendu que nous n'avons pas l'intention de développer ici. Nous nous bornerons à traiter des équations aux différences partielles du premier ordre et à donner comme exemple du second ordre les équations différentielles les plus simples que l'on rencontre dans les questions de Géométrie ou de Physique mathématique.

Considérons d'abord l'équation différentielle

$$\text{(1)} \qquad X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}=Z,$$

dans laquelle X, Y, Z représentent des fonctions quelconques des trois variables x, y, z.

Soit

$$f(x, y, z)=0$$

l'intégrale de cette équation différentielle.

En la différentiant, soit par rapport à x, soit par rapport à y, on obtient les deux relations

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0, \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy}+\frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}=0.$$

Si l'on en tire les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$ pour les substituer dans l'équation (1), et qu'on chasse le dénominateur introduit, on pourra la mettre sous la forme

$$\text{(2)} \qquad X\frac{df}{dx}+Y\frac{df}{dy}+Z\frac{df}{dz}=0,$$

et si l'on pouvait tirer de celle-ci la valeur de f en x, y et z, le problème serait résolu.

Pour y parvenir, on considère les équations

$$\text{(3)} \qquad \frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z},$$

qui forment un système de deux équations différentielles simultanées et du premier ordre. Concevons qu'on les ait intégrées, et soient

$$f_1(x, y, z)=C_1 \quad \text{et} \quad f_2(x, y, z)=C_2$$

les intégrales obtenues. On en déduit par la différentiation

$$\frac{df_1}{dx}\,dx+\frac{df_1}{dy}\,dy+\frac{df_1}{dz}\,dz=0,$$

et

$$\frac{df_2}{dx}dx + \frac{df_2}{dy}dy + \frac{df_2}{dz}dz = 0,$$

ou, en ayant égard aux relations (3),

$$(4)\quad X\frac{df_1}{dx} + Y\frac{df_1}{dy} + Z\frac{df_1}{dz} = 0, \text{ et } X\frac{df_2}{dx} + Y\frac{df_2}{dy} + Z\frac{df_2}{dz} = 0.$$

Ces dernières expriment que les fonctions f_1 et f_2 satisfont toutes deux à l'équation (2) et sont par conséquent des intégrales particulières de l'équation (1).

Or, on peut démontrer qu'une fonction arbitraire de f_1 et de f_2 satisfait également à l'équation (1). En effet, désignons par φ cette fonction arbitraire. Multipliant la première des équations (4) par $\frac{d\varphi}{df_1}$, et la seconde par $\frac{d\varphi}{df_2}$, puis ajoutons-les terme à terme, il viendra

$$X\left(\frac{d\varphi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dx}dx + \frac{d\varphi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dx}dx\right) + Y\left(\frac{d\varphi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dy}dy + \frac{d\varphi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dy}dy\right)$$
$$+ Z\left(\frac{d\varphi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dz}dz + \frac{d\varphi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dz}dz\right) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, puisque φ est une fonction de f_1 et de f_2 (27, 23),

$$X\frac{d\varphi}{dx} + Y\frac{d\varphi}{dy} + Z\frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

c'est-à-dire que la fonction φ satisfait à l'équation (2) et que, par conséquent, l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$\varphi(f_1, f_2) = 0.$$

On la met souvent sous la forme

$$f_1 = \psi(f_2),$$

ψ représentant également une fonction arbitraire. Il est clair, en effet, que ces deux formes sont équivalentes.

257. — I. Prenons, pour premier exemple, l'équation aux différences partielles

$$\frac{dz}{dx} = a\frac{dz}{dy} \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0.$$

On a ici

$$X = 1, \quad Y = -a, \quad Z = 0$$

Par conséquent les équations (3) deviennent

$$dx + \frac{dy}{a} = 0 \quad \text{et} \quad dz = 0,$$

qui ont pour intégrales

$$y + ax = C_1 \quad \text{et} \quad z = C_2.$$

Par suite, l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$z = \psi(y + ax);$$

on a, en effet,

$$\frac{dz}{dx} = a\psi'(y + ax) \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dy} = \psi'(y + ax),$$

valeurs qui satisfont à l'équation proposée.

II. Soit, pour second exemple, l'équation

$$A\frac{dz}{dx} + B\frac{dz}{dy} = C,$$

dans laquelle A, B, C sont des constantes données. On a ici

$$X = A, \quad Y = B, \quad Z = C.$$

Les équations (3) deviennent

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{A} = \frac{dz}{C};$$

elles ont pour intégrales

$$Ay - Bx = \text{const.} \quad \text{et} \quad Az - Cx = \text{const.}$$

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$Az - Cx = \psi(Ay - Bx),$$

ψ désignant une fonction arbitraire.

III. Soit encore l'équation

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = z.$$

On a ici

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z.$$

On peut prendre pour les équations (3) les relations

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

qui donnent

$$\log' x - \log' z = \text{const.} \quad \text{et} \quad \log' y - \log' z = \text{const.},$$

d'où

$$\frac{x}{z} = \text{const.} \quad \text{et} \quad \frac{y}{z} = \text{const.}$$

L'intégrale générale de l'équation proposée est donc

$$\frac{x}{z} = \psi\left(\frac{y}{z}\right),$$

ψ désignant toujours une fonction arbitraire.

258. — I. Considérons maintenant l'équation aux différences partielles du second ordre

$$(1) \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = a^2\frac{d^2z}{dy^2}.$$

On y satisfait de la manière la plus générale en posant

$$(2) \qquad z = \varphi(y - ax) + \psi(y + ax),$$

φ et ψ désignant des fonctions arbitraires. Car on en tire successivement :

$$\frac{dz}{dx} = -a\varphi'(y - ax) + a\psi'(y + ax),$$

$$\frac{dz}{dy} = \varphi'(y - ax) + \psi'(y + ax),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = +a^2\varphi''(y - ax) + a^2\psi''(y + ax),$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \varphi''(y - ax) + \psi''(y + ax),$$

et l'équation proposée est évidemment satisfaite par ces deux dernières valeurs.

II. Considérons de même l'équation

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = c;$$

on y satisfait de la manière la plus générale en posant

$$z = \varphi(x) + \psi(y) + cxy.$$

III. Soit encore l'équation

$$A^2\frac{d^2z}{dx^2} - 2AB.\frac{d^2z}{dx\,dy} + B^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0;$$

on y satisfait de la manière la plus générale en posant

$$z = \varphi(Ay + Bx) + x\psi(Ay + Bx);$$

car on en tire

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = B^2 \varphi'' + 2B\psi' + B^2 x\psi'',$$
$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = AB\varphi'' + A\psi' + ABx\psi'',$$
$$\frac{d^2 z}{dy^2} = A^2\varphi'' + A^2 x\psi'',$$

et ces valeurs substituées dans la proposée rendent le premier membre identiquement nul.

IV. Soit enfin l'équation

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2xy\frac{d^2 z}{dx\,dy} + y^2\frac{d^2 z}{dy^2} = 0;$$

on y satisfait de la manière la plus générale en posant

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right);$$

car on en tire

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{y^2}{x^4}\varphi'' + \frac{2y}{x^3}\varphi' + \frac{y^2}{x^3}\psi'',$$
$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = -\frac{1}{x^2}\varphi' - \frac{y}{x^3}\varphi'' - \frac{y}{x^2}\psi'',$$
$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{1}{x^2}\varphi'' + \frac{1}{x}\psi'',$$

et, en substituant ces valeurs dans la proposée, on reconnaît qu'elle est satisfaite.

Il suffira de ces exemples pour donner une idée du rôle que jouent les fonctions arbitraires dans l'intégration des équations aux différences partielles. Pour la théorie même de cette intégration, quand l'équation dépasse le premier ordre, nous renverrons aux traités plus étendus.

§ 7. — APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

259. — I. *Trouver la courbe dont la sous-normale est constante.* L'expression de la sous-normale étant yy', l'équation du problème est

$$yy' = p,$$

en désignant par p la constante. Cette équation revient à

$$y\,dy = p\,dx,$$

équation différentielle du premier ordre et du premier degré à deux variables. En l'intégrant, puisque les variables y sont séparées (230), on obtient

$$\frac{y^2}{2} = px + C \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px + 2C,$$

équation d'une parabole qui a pour axe de figure l'axe des x.

II. *Trouver la courbe dont la sous-tangente est proportionnelle à l'abscisse.* L'équation du problème est

$$\frac{y}{y'} = mx,$$

m désignant une constante. On sépare aisément les variables et l'on obtient

$$m\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

et, en intégrant,

$$m \log' y = \log' x + \log' C = \log' Cx,$$

attendu que l'on peut représenter la constante par $\log' C$,