valeur positive attribuée à m, elle sera comprise entre deux nombres entiers consécutifs p et $p+1$. Or on peut écrire

$$\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}<\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1},$$

et ces inégalités subsisteront quand on fera tendre m, et par suite p, vers l'infini. Mais on a

$$\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p}=\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}:\left(1+\frac{1}{p+1}\right),$$

quantité qui a pour limite e, car, $p+1$ étant entier, le dividende tend vers e, et le diviseur vers 1.

On a aussi

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1}=\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p}\times\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

quantité qui a aussi pour limite e, car le premier facteur tend vers e, puisque p est entier, et le second tend vers l'unité.

Il en résulte que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ est compris entre deux quantités qui ont pour limite commune e, lorsqu'on fait tendre m, et par suite p, vers l'infini; donc cette quantité intermédiaire $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ a elle-même pour limite le nombre e.

On peut même faire voir que l'expression proposée tend encore vers e, lorsqu'on donne à m des valeurs négatives. On a, en effet,

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m}=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\times\left(1+\frac{1}{m-1}\right),$$

quantité qui a pour limite e, puisque, $m-1$ étant positif, le premier facteur tend vers e, tandis que le second tend vers l'unité.

III

Lorsqu'un polynome est ordonné par rapport aux puissances croissantes d'une variable h, *on peut toujours donner à cette variable une valeur assez petite pour que le premier terme du polynome donne son signe à tout le développement.*

Supposons d'abord que le premier terme soit constant, et que l'on ait à considérer le polynome

$$A+Bh++Ch^2+Dh^3+\ldots+Nh^n.$$

Il s'agit de démontrer que l'ensemble des termes qui suivent le premier peut être rendu moindre que A en prenant h suffisamment petit. En effet, soit M le plus grand de tous les coefficients, en valeur absolue, à partir de B; l'ensemble de tous les termes qui suivent A est évidemment moindre que

$$Mh+Mh^2+Mh^3+\ldots+Mh^n$$

ou moindre que

$$M\,(h+h^2+h^3+\ldots+h^n),$$

expression qui revient à

$$M.\frac{h-h^{n+1}}{1-h},$$

et tend vers zéro en même temps que h, et peut par conséquent être rendue moindre que toute quantité donnée, en prenant h suffisamment petit. Cette expression peut donc être rendue moindre que A; et, à plus forte raison, on pourra rendre l'ensemble des termes qui suivent A dans le polynome proposé moindre que ce premier terme. Donc enfin ce premier terme donnera son signe à tout le développement.

Supposons, en second lieu, que le premier terme contienne en facteur une puissance de h, et qu'on ait à considérer le polynome

$$Ah^n + Bh^{n+1} + Ch^{n+2} + \ldots + Ph^{n+p},$$

on pourra l'écrire

$$h^n (A + Bh + Ch^2 + \ldots + Ph^p).$$

Or, d'après ce qui a été démontré ci-dessus, on peut prendre h assez petit pour que la quantité entre parenthèses prenne le signe de A ; donc le polynome proposé aura le signe de Ah^n, c'est-à-dire le signe de son premier terme.

176

FIN DE L'APPENDICE.

D. Paisaje – 16 oct. –
Matemáticas – 18 oct. 24 d. –
Ingles 20 oct. 2 d. –
H. Universal 21 oct. 11 d. –
Ordenanza 6 nov. 6 d. –
Caballería 12 nov. 6 d. –
H. Patria 20 nov. 8 d. –

TABLE DES MATIÈRES

DEUXIÈME PARTIE.

PREMIERS ÉLÉMENTS DU CALCUL INTÉGRAL.

APPENDICE.

Coulommiers. — Typ. PAUL BRODARD et Cie.