

valeur positive attribuée à m , elle sera comprise entre deux nombres entiers consécutifs p et $p + 1$. Or on peut écrire

$$\left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^p < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1},$$

et ces inégalités subsisteront quand on fera tendre m , et par suite p , vers l'infini. Mais on a

$$\left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^{p+1} : \left(1 + \frac{1}{p+1}\right),$$

quantité qui a pour limite e , car, $p + 1$ étant entier, le dividende tend vers e , et le diviseur vers 1.

On a aussi

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1} = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p \times \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

quantité qui a aussi pour limite e , car le premier facteur tend vers e , puisque p est entier, et le second tend vers l'unité.

Il en résulte que $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ est compris entre deux quantités qui ont pour limite commune e , lorsqu'on fait tendre m , et par suite p , vers l'infini; donc cette quantité intermédiaire $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ a elle-même pour limite le nombre e .

On peut même faire voir que l'expression proposée tend encore vers e , lorsqu'on donne à m des valeurs négatives. On a, en effet,

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \times \left(1 + \frac{1}{m-1}\right),$$

quantité qui a pour limite e , puisque, $m - 1$ étant positif, le premier facteur tend vers e , tandis que le second tend vers l'unité.

III

Lorsqu'un polynome est ordonné par rapport aux puissances croissantes d'une variable h , on peut toujours donner à cette variable une valeur assez petite pour que le premier terme du polynome donne son signe à tout le développement.

Supposons d'abord que le premier terme soit constant, et que l'on ait à considérer le polynome

$$A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \dots + Nh^n.$$

Il s'agit de démontrer que l'ensemble des termes qui suivent le premier peut être rendu moindre que A en prenant h suffisamment petit. En effet, soit M le plus grand de tous les coefficients, en valeur absolue, à partir de B ; l'ensemble de tous les termes qui suivent A est évidemment moindre que

$$Mh + Mh^2 + Mh^3 + \dots + Mh^n$$

ou moindre que

$$M(h + h^2 + h^3 + \dots + h^n),$$

expression qui revient à

$$M \cdot \frac{h - h^{n+1}}{1 - h},$$

et tend vers zéro en même temps que h , et peut par conséquent être rendue moindre que toute quantité donnée, en prenant h suffisamment petit. Cette expression peut donc être rendue moindre que A ; et, à plus forte raison, on pourra rendre l'ensemble des termes qui suivent A dans le polynome proposé moindre que ce premier terme. Donc enfin ce premier terme donnera son signe à tout le développement.

Supposons, en second lieu, que le premier terme contienne en facteur une puissance de h , et qu'on ait à considérer le polynôme

$$Ah^n + Bh^{n+1} + Ch^{n+2} + \dots + Ph^{n+p},$$

on pourra l'écrire

$$h^n (A + Bh + Ch^2 + \dots + Ph^p).$$

Or, d'après ce qui a été démontré ci-dessus, on peut prendre h assez petit pour que la quantité entre parenthèses prenne le signe de A ; donc le polynôme proposé aura le signe de Ah^n , c'est-à-dire le signe de son premier terme.

176
72
174
FIN DE L'APPENDICE.

D. Paris - 16 Oct. -
Mathématiques - 18 Oct. 24 d. -
Anglais 20 Oct. 2 d. -
H. universel 21 Oct. 11 d. -
Ordonnance 6 Nov. 6 d. -
Caballona 22 Nov. 6 d. -
H. Patria 20 Nov. 8 d. -

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE I

PREMIÈRE PARTIE.

PREMIERS ÉLÉMENTS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

I. — Notions préliminaires. 4
 II. — Principes de différentiation. 5
 § 1. Différentiation des fonctions explicites. 5
 § 2. Différentiation des fonctions implicites. 21
 III. — Application des principes de différentiation aux fonctions
 les plus usitées. 25
 IV. — Différentielles successives des fonctions. 38
 § 1. Fonctions explicites d'une variable. 39
 § 2. Différentielles successives des fonctions explicites de
 plusieurs variables. 42
 § 3. Différentielles successives des fonctions composées. 47
 V. — Développement des fonctions en séries. 49
 § 1. Fonctions d'une seule variable. 49
 § 2. Développement des fonctions de deux variables. 61

VI. — Applications analytiques.	64
§ 1. Exemples de développement de fonctions en séries.	64
§ 2. Véritable valeur des expressions qui prennent l'une des formes $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$	74
§ 3. Maxima et minima des fonctions d'une variable.	78
§ 4. Maxima et minima des fonctions de deux variables.	87
VII. — Applications géométriques.	91
§ 1. Tangentes et normales aux courbes planes.	91
§ 2. Courbes enveloppes.	99
§ 3. Convexité et courbure des lignes planes.	104
§ 4. Développées des lignes planes.	117
§ 5. Points singuliers des courbes planes.	126
§ 6. Courbes à double courbure.	154
§ 7. Surfaces courbes. — Notions sur la courbure.	151
§ 8. Surfaces enveloppes.	155
§ 9. Courbure des surfaces.	160
§ 10. Caractères analytiques des principales familles de surfaces.	176

DEUXIÈME PARTIE.

PREMIERS ÉLÉMENTS DU CALCUL INTÉGRAL.

I. — Notions préliminaires.	189
II. — Intégration des différentielles.	197
§ 1. Principes et procédés d'intégration.	197
§ 2. Intégration des différentielles les plus usitées.	205
§ 3. Intégration des différentielles par développement en série.	255
§ 4. Calcul des intégrales définies par approximation.	241
III. — Applications du calcul des intégrales définies.	247
§ 1. Rectification des courbes.	247
§ 2. Calcul de l'aire des courbes planes.	252

§ 3. Calcul de l'aire des surfaces courbes.	261
§ 4. Calcul des volumes terminés par des surfaces courbes.	271
IV. — Des équations différentielles et de leur intégration.	280
§ 1. Des équations différentielles.	281
§ 2. De l'intégration des équations différentielles ordinaires du premier ordre, à deux variables.	282
§ 3. De l'intégration des équations différentielles du second ordre, à deux variables.	298
§ 4. Des équations différentielles simultanées.	310
§ 5. Des équations différentielles totales.	316
§ 6. Des équations aux différences partielles.	320
§ 7. Applications géométriques de l'intégration des équations différentielles.	327

APPENDICE.

Démonstration de quelques principes d'algèbre employés dans les Premiers Éléments du Calcul infinitésimal.	341
--	-----

