TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE RATIONNELLE

---

§ 1. La Mécanique est la science des forces et du mouvement.

Un corps est dit *en mouvement*, lorsqu'il occupe successivement différentes positions dans l'espace. Il est *en repos*, lorsque, au contraire, il conserve la position qu'il avait d'abord.

Un corps qui est en repos ne tend pas de lui-même à sortir de cet état pour passer à l'état de mouvement; une fois en mouvement, il continue de lui-même à se mouvoir suivant certaines lois. Toutes les fois qu'un corps passe de l'état de repos à l'état de mouvement, ou bien que ce corps, une fois en mouvement, se meut suivant des lois différentes de celles dont nous venons de parler, c'est qu'il est soumis à l'action de quelque cause qui détermine ces changements dans son état de repos ou de mouvement. Cette cause, quelle qu'elle soit, on la nomme *force*. Une force est donc une cause quelconque de mouvement ou de modification de mouvement.

§ 2. On peut étudier le mouvement d'un corps sans s'occuper en aucune manière des forces auxquelles sont dues les diverses modifications de ce mouvement. Cette étude du mouvement en lui-même constitue une branche de la Mécanique, à laquelle on a donné le nom de *Cinématique* (du mot grec Κίνημα, qui signifie mouvement). Il est clair que, dans une pareille étude du mouvement des corps, on peut faire abstraction de la matière dont ils sont formés, de manière à les réduire à des corps purement géométriques.

On considère déjà des mouvements en Géométrie : en faisant mouvoir des lignes données, suivant certaines conditions, on engendre des surfaces. Mais on ne s'occupe que des diverses positions que prennent successivement les lignes mobiles, sans s'inquiéter du temps qu'elles ont pu employer pour aller de l'une à l'autre. Dans la Cinématique, l'idée de temps se joint à celle des déplacements que prennent les corps ou les figures que l'on considère.

Lorsque, aux idées de déplacement et de temps, on joint l'idée de force, on entre dans une autre branche de la Mécanique, à laquelle nous attribuerons le nom de *Dynamique* (du mot grec Δύναμις, qui signifie force). Alors il n'est plus permis de faire abstraction de la matière dont les corps sont formés ; la quantité plus ou moins grande de matière qui constitue un corps tout entier ou bien les diverses parties dans lesquelles on le divise par la pensée, doit nécessairement entrer en considération dans l'étude du mouvement que prend ce corps sous l'action de certaines forces.

Ainsi, la Mécanique se divise naturellement en deux branches, savoir : la Cinématique et la Dynamique. La Dynamique ayant un développement beaucoup plus grand que la Cinématique, nous la diviserons elle-même en trois parties. L'ensemble des théories que nous allons exposer sera donc réparti entre quatre livres, de la manière suivante :

LIVRE I. — Cinématique.
LIVRE II. — Dynamique, 1re partie. — De l'équilibre et du mouvement d'un point matériel.
LIVRE III. — Dynamique, 2e partie. — De l'équilibre des systèmes matériels.
LIVRE IV. — Dynamique, 3e partie. — Du mouvement des systèmes matériels.

LIVRE PREMIER

CINÉMATIQUE

CHAPITRE PREMIER

MOUVEMENT D'UN POINT.

§ 3. **Trajectoire.** — La suite des positions par lesquelles passe successivement un point mobile, forme une ligne droite ou courbe, que l'on nomme sa *trajectoire*. Le point décrit cette ligne d'une manière continue ; c'est-à-dire qu'il ne peut pas aller d'une position à une autre sans passer par toutes les positions intermédiaires que l'on peut imaginer sur sa trajectoire.

Le mouvement d'un point est dit *rectiligne* ou *curviligne*, suivant que sa trajectoire est une ligne droite ou une ligne courbe.

§ 4. **Équation du mouvement sur la trajectoire.** — Pour que le mouvement d'un point soit complètement connu, il faut que l'on connaisse non seulement sa trajectoire, mais encore la loi suivant laquelle il en parcourt les diverses parties ; il faut que l'on sache quel temps il emploie à passer d'une quelconque des positions qu'il occupe successivement à une autre de ces positions.

Soient AB, *fig.* 1, la trajectoire d'un point mobile, O un point fixe pris sur cette trajectoire, et M la position du point mobile à la fin du temps t. Désignons par s la distance OM comptée sur la trajectoire, distance qui sera positive ou négative suivant que

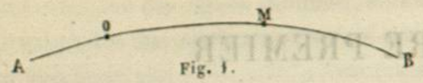


Fig. 1.

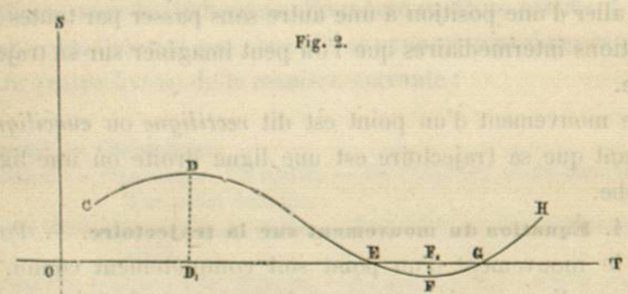
le point M se trouvera d'un côté ou de l'autre du point fixe O. Le mouvement du point mobile sera connu, si, à la connaissance de la trajectoire AB, on joint celle de la relation

$$s=f(t)$$

qui existe entre la distance s et le temps t. A l'aide de cette relation, qu'on nomme l'*équation du mouvement sur la trajectoire*, on peut déterminer toutes les circonstances que présente le mouvement.

§ 5. **Représentation graphique de la loi du mouvement.** — Convenons de représenter un temps quelconque par une ligne dont la longueur soit proportionnelle à ce temps ; et pour cela adoptons arbitrairement une certaine ligne pour représenter l'unité de temps. Si nous regardons la ligne qui représente le temps t, et la valeur correspondante de la distance s, comme étant l'abscisse et l'ordonnée d'un point rapportées à un système d'axes coordonnés rectangulaires OT, OS, *fig.* 2, les divers sys-

Fig. 2.



tèmes de valeurs des variables s et t fourniront, sur le plan SOT, une série de points formant une ligne telle que CDEFGH. Cette ligne, dont l'équation n'est autre chose que l'équation du mouvement

$$s=f(t),$$

permet de saisir d'un coup d'œil les diverses particularités que présente successivement le mouvement dont on s'occupe.

C'est ainsi que, d'après la forme qui a été donnée à la ligne dont il s'agit, sur la *fig.* 2, on voit que le point mobile s'éloigne d'abord de plus en plus du point fixe à partir duquel on compte la distance s, jusqu'à ce que le temps t ait pris la valeur qui correspond à l'abscisse OD_1 du point D ; alors la distance du mobile au point fixe est égale à l'ordonnée du point D. A partir de cet instant, le mouvement change de sens ; le point mobile revient vers le point fixe, et finit par l'atteindre, lorsque le temps t prend la valeur correspondant à l'abscisse OE. Alors, la courbe s'abaissant au-dessous de l'axe OT, s prend des valeurs négatives ; c'est-à-dire que le point mobile, après avoir atteint le point fixe, le dépasse en continuant à se mouvoir dans le même sens. Lorsque le temps t acquiert la valeur qui correspond à l'abscisse OF, du point F, le point mobile cesse de s'éloigner du point fixe, le sens de son mouvement change de nouveau ; il se rapproche de ce point fixe, l'atteint lorsque le temps t devient égal à l'abscisse OG_1, puis le dépasse et revient ainsi se placer du côté où il se trouvait d'abord.

Il est clair que, dans la construction de la courbe destinée à la représentation de la loi d'un mouvement, il n'est pas nécessaire de prendre les diverses ordonnées précisément égales aux distances s du point mobile au point fixe : on peut réduire ces distances dans un rapport quelconque, pris arbitrairement, c'est-à-dire adopter une ligne quelconque pour représenter l'unité de longueur avec laquelle les distances s sont évaluées. Les abscisses et les ordonnées se trouvent ainsi construites à des échelles que l'on choisit à volonté ; en sorte que l'on peut donner à la figure totale telles dimensions qu'on veut dans les deux sens.

Il faut bien se garder de confondre la ligne que nous venons de définir, et qui sert à représenter la loi du mouvement d'un point, avec la ligne que ce point décrit dans l'espace, et que nous nommons sa trajectoire.

§ 6. **Mouvement uniforme, vitesse.** — Le mouvement d'un point est dit *uniforme*, lorsque ce point parcourt sur sa trajectoire des espaces égaux en temps égaux, quels que soient ces temps; ou, en d'autres termes, lorsque les espaces qu'il parcourt dans des temps quelconques sont proportionnels aux temps employés à les parcourir. Il résulte de cette définition que l'équation du mouvement uniforme est

$$s = a + bt.$$

a est la distance du point mobile au point fixe, à l'instant à partir duquel on compte le temps t. Le coefficient b est positif ou négatif suivant que la distance s augmente ou diminue avec le temps, c'est-à-dire suivant que le mouvement a lieu dans le sens des s positifs, ou en sens contraire.

Les mouvements uniformes se distinguent les uns des autres par le degré plus ou moins grand de rapidité ou de lenteur de chacun d'eux. Il est naturel de prendre pour mesure de ce degré de rapidité ou de lenteur, le chemin que parcourt le point mobile pendant l'unité de temps : c'est ce qu'on nomme la *vitesse* du mobile.

D'après la forme que nous venons d'assigner à l'équation du mouvement uniforme, il est clair que la valeur absolue du coefficient b n'est autre chose que la quantité dont la distance s varie pendant l'unité de temps; c'est-à-dire que cette valeur absolue de b est précisément la vitesse du mobile. D'ailleurs, en attribuant à la vitesse le sens dans lequel s'effectue le mouvement, on voit qu'elle est dirigée dans le sens des s positifs ou en sens contraire, suivant que b est positif ou négatif. Si donc nous convenons de regarder la vitesse comme positive lorsqu'elle est dirigée dans le premier sens, et comme négative lorsqu'elle est dirigée dans le sens opposé, nous pouvons dire que, dans tous les cas, la vitesse du mouvement uniforme est égale à b.

§ 7. Dans le cas du mouvement uniforme, la ligne qui représente la loi du mouvement (§ 5) se réduit à une ligne droite. Cette ligne CD est dirigée, comme on le voit, sur la *fig*. 3 ou sur la *fig*. 4, suivant que le mouvement a lieu dans le sens des s positifs ou en sens contraire.

Fig. 3.

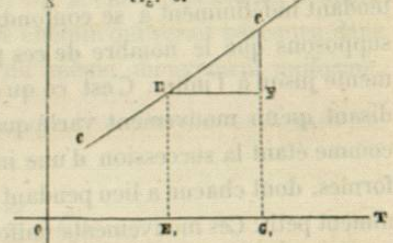
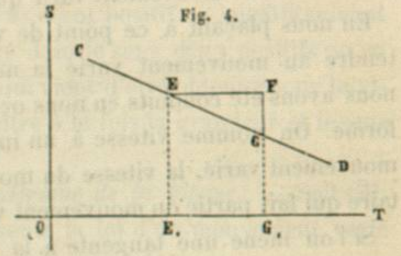


Fig. 4.



Pour trouver la vitesse du mouvement uniforme représenté par la ligne CD, dans l'un ou l'autre cas, il suffit de tracer, à partir d'un point quelconque E, une ligne droite EF parallèle à OT et égale à la ligne qui représente l'unité de temps, puis de mener par le point F une parallèle à OS jusqu'à la rencontre de la ligne CD, en G. La ligne FG représente la quantité dont s varie dans l'unité de temps, c'est-à-dire la valeur absolue de la vitesse du mobile. Quant au signe de cette vitesse, il est indiqué par la position de la ligne CD; la vitesse est positive dans le cas de la *fig*. 3, négative dans le cas de la *fig*. 4.

§ 8. **Mouvement varié, vitesse.** — Tout mouvement qui n'est pas uniforme est dit *varié;* dans un pareil mouvement, les espaces parcourus dans des temps quelconques ne sont généralement pas proportionnels aux temps employés à les parcourir.

Imaginons que le temps total pendant lequel s'effectue un mouvement varié soit divisé en un nombre quelconque de parties égales. Concevons en outre que le mouvement du mobile, pendant chacun de ces intervalles de temps partiels, soit remplacé par un mouvement uniforme, en vertu duquel ce mobile parcourt la même portion de sa trajectoire pendant la durée de cet intervalle de temps partiel. La succession des mouvements uniformes, que nous substituons ainsi au mouvement varié, dans les diverses parties dans lesquelles la durée totale du mouvement a été décomposée, constituera un nouveau mouvement varié différent de celui que nous avions d'abord. Mais la différence qui existe entre ces deux mouvements sera de plus en plus faible, à mesure que le nombre des parties égales dans lesquelles nous avons divisé le temps total sera plus considérable ; et nous pouvons regarder le second mouvement comme tendant indéfiniment à se confondre avec le premier, si nous supposons que le nombre de ces parties du temps total augmente jusqu'à l'infini. C'est ce qu'on exprime simplement, en disant qu'un mouvement varié quelconque peut être regardé comme étant la succession d'une infinité de mouvements uniformes, dont chacun a lieu pendant un intervalle de temps infiniment petit. Ces mouvements uniformes successifs constituent les *éléments* du mouvement varié que l'on considère.

En nous plaçant à ce point de vue, il nous sera facile d'étendre au mouvement varié la notion de vitesse à laquelle nous avons été conduits en nous occupant du mouvement uniforme. On nomme vitesse à un instant quelconque, dans un mouvement varié, la vitesse du mouvement uniforme élémentaire qui fait partie du mouvement varié à cet instant.

Si l'on mène une tangente à la trajectoire, au point où se trouve le mobile à un instant quelconque, c'est suivant cette tangente qu'est dirigé le mouvement élémentaire du mobile à cet instant. Il suffit alors de porter sur la tangente, à partir du point de contact et dans le sens du mouvement, une longueur égale à la vitesse que possède le mobile dans ce mouvement élémentaire, pour avoir une ligne droite qui représente à la fois la grandeur, la direction et le sens de cette vitesse du mobile.

§ 9. *Détermination analytique de la vitesse.* — Si nous supposons que l'on connaisse l'équation du mouvement sur la trajectoire

$$s = f(t),$$

nous en déduirons facilement la valeur de la vitesse v du point mobile à un instant quelconque. La distance du mobile au point fixe étant s à la fin du temps t, et $s + ds$ à la fin du temps $t + dt$, il est clair que ds est le chemin parcouru par ce mobile sur sa trajectoire pendant le temps dt. Si nous regardons le mouvement comme uniforme pendant le temps infiniment petit dt, conformément aux considérations qui viennent d'être indi-

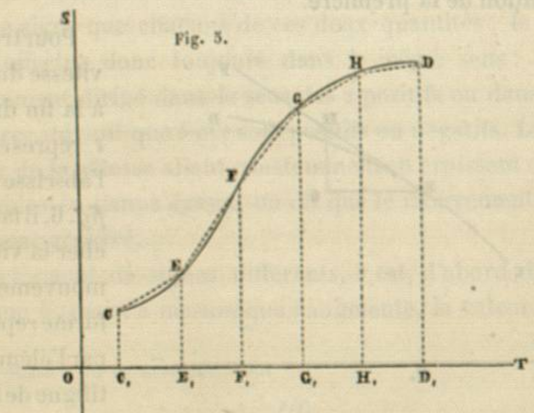
quées (§ 8), la vitesse de ce mouvement uniforme sera la vitesse du mobile à la fin du temps t. Or, le chemin parcouru pendant le temps dt étant égal à ds, le chemin qui serait parcouru dans l'unité de temps, en vertu du même mouvement uniforme, est égal à $\frac{ds}{dt}$: donc la vitesse v que l'on cherche est donnée par l'expression

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Il est bon d'observer que ds étant positif ou négatif suivant que le mouvement est dirigé dans le sens des s positifs ou en sens contraire, l'expression qui vient d'être obtenue pour la vitesse v du mobile fait connaître à la fois la grandeur et le sens de cette vitesse.

§ 10. *Détermination géométrique de la vitesse.* — Soit CD, *fig.* 3, la courbe qui représente la loi d'un mouvement varié (§ 3). La substitution d'un mouvement uniforme au mouvement

Fig. 3.



varié, pendant le temps qui est représenté par C_1E_1, avec la condition que le chemin parcouru par le mobile pendant ce temps soit le même que celui qu'il parcourt dans le même temps en vertu de ce mouvement varié, revient à la substitution de la corde CE à la portion de la courbe CD que cette corde soustend. En sorte que, si nous divisons la durée totale du mouvement, représentée par $C_1 D_1$, en cinq parties égales, et que nous supposions que le mouvement varié soit remplacé par un mouvement uniforme dans chacune de ces cinq parties, toujours avec la condition que le chemin parcouru dans chacune d'elles reste le même, cela revient à remplacer la courbe CD par un polygone formé des cinq cordes CE, EF, FG, GH, HD. Telle est la traduction géométrique de la considération indiquée au commencement du § 8.

D'après cela, quand nous disons qu'un mouvement varié peut être regardé comme étant la succession d'une infinité de mouvements uniformes, dont chacun a lieu pendant un intervalle de temps infiniment petit, nous faisons exactement la même chose que si nous disions que la courbe CD, qui représente la loi de ce mouvement, peut être regardée comme un polygone formé d'une infinité de côtés, dont chacun est infiniment petit. Cette dernière idée, avec laquelle on est familiarisé en géométrie, permet de saisir plus facilement la véritable signification de la première.

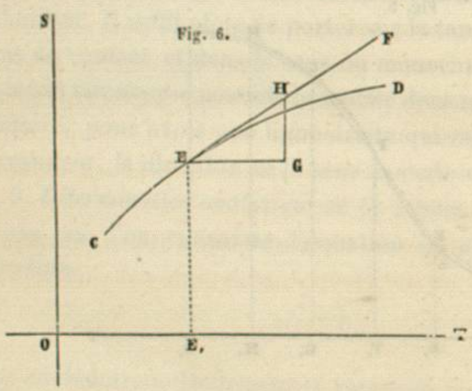


Fig. 6.

Pour trouver la vitesse du mobile à la fin du temps t représenté par l'abscisse OE_1, *fig*. 6, il faut chercher la vitesse du mouvement uniforme représenté par l'élément rectiligne de la courbe CD auquel appartient le point E de cette courbe. Si ce mouvement uniforme, qui n'a lieu que pendant un intervalle de temps infiniment petit, persistait pendant un temps quelconque, il serait représenté par le même élément rectiligne prolongé indéfiniment en ligne droite, c'est-à-dire par la tangente EF menée par le point E à la courbe CD. Or nous savons trouver la vitesse d'un mouvement uniforme, lorsque nous connaissons la ligne droite qui le représente (§ 7). Menons par le point E une ligne droite EG parallèle à OT, et égale à la ligne que nous avons adoptée pour représenter l'unité de temps; menons ensuite, par le point G, la ligne GH parallèle à Os: cette dernière ligne, terminée à la tangente EF, représente la vitesse que nous cherchons (1).

§ 11. **Mouvement uniformément varié.** — Comme exemple de mouvement varié, prenons le mouvement qui a pour équation

$$s = a + bt + ct^2.$$

La vitesse, à un instant quelconque, a pour valeur (§ 9)

$$v = b + 2ct.$$

On voit que la vitesse varie proportionnellement au temps. C'est pour cela qu'on donne au mouvement dont il s'agit le nom de *mouvement uniformément varié*.

Si b et c sont de même signe, la vitesse v conserve toujours le même signe que chacune de ces deux quantités; le mouvement s'effectue donc toujours dans le même sens: il reste constamment dirigé dans le sens des s positifs ou dans le sens contraire, suivant que b et c sont positifs ou négatifs. La valeur absolue de la vitesse allant constamment en croissant de quantités égales en temps égaux, on dit que le mouvement est *uniformément accéléré*.

Si b et c sont de signes différents, v est d'abord de même signe que b; mais, à mesure que t augmente, la valeur absolue

(1) L'équation du mouvement étant

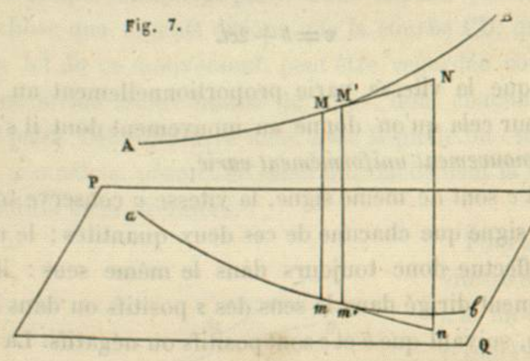
$$s = f(t),$$

la vitesse à un instant quelconque est exprimée par $f'(t)$. Il ne faut pas en conclure que la vitesse a pour valeur la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente EF fait avec l'axe des abscisses OT; parce que l'échelle des abscisses et celle des ordonnées sont tout à fait indépendantes l'une de l'autre (§ 5), et que, par conséquent, l'angle FEG peut être plus ou moins grand, tout en correspondant toujours à une même vitesse, suivant qu'on fera varier une de ces échelles dans un sens ou dans l'autre. Cette conclusion ne serait exacte qu'autant que la ligne par laquelle on représente l'unité de temps serait égale à celle par laquelle on représente l'unité de distance s.

de v diminue, et cette valeur finit bientôt par devenir nulle : à partir de là, v prend et conserve indéfiniment un signe contraire à celui de b, et sa valeur absolue va constamment en augmentant. Le mouvement a donc lieu d'abord dans le sens indiqué par le signe de b, et se ralentit de plus en plus ; il est alors *uniformément retardé*. Puis, au bout de quelque temps, il change de sens, et dès lors il s'accélère indéfiniment : il devient *uniformément accéléré*.

§ 12. **Projection du mouvement sur un plan fixe.** — Pendant qu'un point se meut dans l'espace, en décrivant une trajectoire AB, *fig*. 7, on peut concevoir qu'on le projette à

Fig. 7.



chaque instant sur un plan fixe PQ, en menant par la position M qu'il occupe une droite Mm parallèle à une ligne fixe donnée. Les projections ainsi obtenues, pour les diverses positions du point mobile dans l'espace, peuvent être regardées comme les positions successives d'un second point qui se mouvrait dans le plan PQ. Le mouvement de ce second point est ce qu'on nomme la projection du mouvement du premier point sur le plan PQ.

Il est clair que la trajectoire ab du mouvement projeté n'est autre chose que la projection de la trajectoire AB du mouvement dans l'espace.

Soient MM′ et mm' les chemins infiniment petits parcourus, pendant le même élément dt du temps, par le point mobile

dans l'espace, et par sa projection sur le plan PQ ; mm' est évidemment la projection de MM′. Pour avoir la vitesse MN du point mobile dans l'espace, il faut diviser MM′ par dt ; la vitesse mn de la projection de ce point sur le plan PQ s'obtiendra de même en divisant mm' par dt. Ces deux vitesses sont donc entre elles dans le même rapport que les lignes infiniment petites MM′, mm' ; et comme leurs directions sont les mêmes que celles de ces lignes MM′, mm', il en résulte que la vitesse mn du mouvement projeté est la projection de la vitesse MN du mouvement de l'espace.

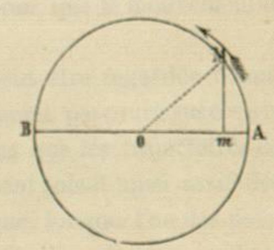
Ce que nous venons de dire, ayant lieu pour une projection oblique quelconque, a lieu également pour la projection orthogonale, qui n'en est qu'un cas particulier.

§ 13. **Projection du mouvement sur une droite fixe.** — Au lieu de projeter le point mobile sur un plan fixe, on peut le projeter sur une droite fixe, en menant par chacune de ses positions successives un plan parallèle à un plan directeur donné. Le mouvement projeté est alors un mouvement rectiligne dirigé suivant la droite fixe.

En raisonnant comme dans le cas de la projection sur un plan, on reconnaît facilement que la vitesse du point projeté, à un instant quelconque, est la projection de la vitesse que possède le point de l'espace au même instant.

Cette propriété de la projection du mouvement sur une droite fixe a lieu de quelque manière que le plan directeur soit placé par rapport à la droite fixe, et convient par conséquent aussi au cas où la projection est orthogonale.

Fig. 8.



§ 14. Prenons pour exemple le mouvement uniforme d'un point suivant une circonférence de cercle, *fig*. 8, et cherchons la projection orthogonale de ce mouvement sur le diamètre AB. Désignons par r le rayon du cercle, par v la vitesse du mobile, par t le temps compté à partir de l'instant où le mobile part du point A, et par x la distance Om de la projection m du point mobile au centre du cercle. L'arc AM décrit par le mobile pendant le temps t est égal à vt; l'angle AOM est donc égal à $\frac{vt}{r}$, et par suite on a

$$x = r \cos \frac{vt}{r}.$$

Telle est l'équation du mouvement projeté. Soit u la vitesse de ce mouvement, on aura (§ 9)

$$u = -v \sin \frac{vt}{r}.$$

On vérifie sans peine que la vitesse u du point m est bien la projection de la vitesse v du point M, conformément à ce qui vient d'être dit. On voit en outre que cette vitesse u est proportionnelle à la ligne Mm.

CHAPITRE II

MOUVEMENT D'UN SOLIDE OU SYSTÈME INVARIABLE.

§ 15. Après avoir donné quelques notions générales sur le mouvement d'un point, occupons-nous du mouvement d'un solide, c'est-à-dire d'un système de points dont les distances mutuelles restent invariablement les mêmes, quel que soit le déplacement que le système tout entier prenne dans l'espace.

On peut concevoir que la figure du système soit définie : 1° par la connaissance des distances mutuelles de trois points A, B, C, non en ligne droite; 2° par la connaissance des distances de chacun des autres points du système aux trois points A, B, C. D'après cela, on voit qu'il suffit de connaître la position du triangle dont les trois points A, B, C sont les sommets, pour que la position du système tout entier soit connue. La connaissance des mouvements que prennent simultanément les trois points A, B, C, suffit donc pour que le mouvement du système soit complètement connu.

La trajectoire d'un point mobile peut être regardée comme un polygone infinitésimal dont ce point parcourt successivement les différents côtés. Imaginons que les trajectoires des divers points d'un solide en mouvement soient ainsi assimilées à des polygones, avec la condition que, lorsque l'un des points mobiles se trouve à l'un des sommets du polygone qu'il parcourt, tous les autres points soient dans le même cas. Alors le mouvement du solide sera tel que, pendant un premier élé-