du point A, et par x la distance Om de la projection m du point mobile au centre du cercle. L'arc AM décrit par le mobile pendant le temps t est égal à vt; l'angle AOM est donc égal à $\frac{vt}{r}$, et par suite on a

$$x = r \cos \frac{vt}{r}.$$

Telle est l'équation du mouvement projeté. Soit u la vitesse de ce mouvement, on aura (§ 9)

$$u = -v \sin \frac{vt}{r}.$$

On vérifie sans peine que la vitesse u du point m est bien la projection de la vitesse v du point M, conformément à ce qui vient d'être dit. On voit en outre que cette vitesse u est proportionnelle à la ligne Mm.

CHAPITRE II

MOUVEMENT D'UN SOLIDE OU SYSTÈME INVARIABLE.

§ 15. Après avoir donné quelques notions générales sur le mouvement d'un point, occupons-nous du mouvement d'un solide, c'est-à-dire d'un système de points dont les distances mutuelles restent invariablement les mêmes, quel que soit le déplacement que le système tout entier prenne dans l'espace.

On peut concevoir que la figure du système soit définie : 1° par la connaissance des distances mutuelles de trois points A, B, C, non en ligne droite; 2° par la connaissance des distances de chacun des autres points du système aux trois points A, B, C. D'après cela, on voit qu'il suffit de connaître la position du triangle dont les trois points A, B, C sont les sommets, pour que la position du système tout entier soit connue. La connaissance des mouvements que prennent simultanément les trois points A, B, C, suffit donc pour que le mouvement du système soit complètement connu.

La trajectoire d'un point mobile peut être regardée comme un polygone infinitésimal dont ce point parcourt successivement les différents côtés. Imaginons que les trajectoires des divers points d'un solide en mouvement soient ainsi assimilées à des polygones, avec la condition que, lorsque l'un des points mobiles se trouve à l'un des sommets du polygone qu'il parcourt, tous les autres points soient dans le même cas. Alors le mouvement du solide sera tel que, pendant un premier élément du temps, les divers points qui le composent parcourront chacun le premier côté de sa trajectoire polygonale; pendant un second élément du temps, ces mêmes points parcourront les seconds côtés de leurs trajectoires, et ainsi de suite. Chacun de ces mouvements successifs, qui s'effectuent pendant les divers éléments du temps, est ce que nous nommerons un *mouvement élémentaire* du solide.

§ 16. **Mouvement de translation.** — Supposons qu'un solide se déplace de telle manière que les trois côtés du triangle ABC, formé par les trois points A, B, C, non en ligne droite, restent constamment parallèles à leurs positions primitives; il est aisé de voir que les lignes droites qui joignent un autre point quelconque aux trois points A, B, C, resteront également parallèles à leurs positions primitives, et qu'il en sera encore de même de toute autre ligne droite tracée entre deux points pris comme on voudra dans le solide. Un pareil mouvement se nomme *mouvement de translation*.

Fig. 9.

Si l'on considère les chemins infiniment petits MM', NN', *fig.* 9, parcourus par deux points quelconques M, N, du solide pendant un même élément du temps, on voit que ces deux chemins, que l'on peut regarder comme rectilignes, sont égaux et parallèles : car M'N' est égal et parallèle à MN, et par conséquent la figure MM'NN' est un parallélogramme. Mais les vitesses dont les points M et N sont animés en même temps sont dirigées suivant les éléments MM', NN', de leurs trajectoires respectives; et de plus elles sont proportionnelles aux longueurs de ces éléments : donc ces vitesses des points M et N sont égales et parallèles. Ainsi, lorsqu'un solide est animé d'un mouvement de translation, tous ses points ont en même temps des vitesses égales et parallèles. Cette vitesse commune de tous les points à un même instant est ce qu'on nomme la vitesse du solide à cet instant.

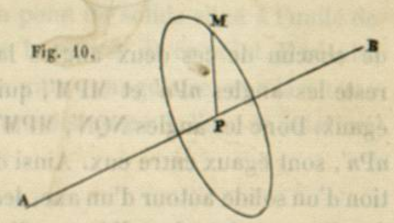
La vitesse d'un solide animé d'un mouvement de translation

peut changer de grandeur et de direction, d'une manière quelconque, d'un instant à un autre.

Une figure plane, mobile dans son plan, peut être animée d'un mouvement de translation, tout aussi bien qu'un solide mobile dans l'espace; ce que nous venons de dire du mouvement de translation d'un solide est directement applicable au cas d'une figure plane mobile dans son plan.

§ 17. **Mouvement de rotation; vitesse angulaire.** — Si deux points d'un solide en mouvement restent constamment immobiles dans l'espace, tous les autres points du solide, situés sur la direction de la ligne droite qui joint les deux premiers, restent également immobiles; le solide ne fait alors que *tourner* autour de cette ligne droite, à laquelle on donne le nom d'*axe de rotation*. Le mouvement du solide est, dans ce cas, un *mouvement de rotation*.

Fig. 10.



Soient M, *fig.* 10, un point quelconque du solide, et AB son axe de rotation. Si l'on abaisse la perpendiculaire MP sur l'axe AB, cette ligne MP restera perpendiculaire à AB dans toutes les positions que prendra le solide : donc elle décrira un plan perpendiculaire à AB. D'ailleurs, la distance MP ne varie pas : le point M se mouvra donc dans le plan dont nous venons de parler, en parcourant une circonférence de cercle ayant le point P pour centre. Ainsi, lorsqu'un solide est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, chacun de ses points décrit une circonférence de cercle, dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est sur cet axe.

Soient M, N, *fig.* 11, deux points quelconques du solide; M', N' les positions qu'ils occupent au bout d'un certain temps, et P, Q les centres des circonférences de cercle qu'ils décrivent. Il est facile de voir que les angles MPM', NQN' sont égaux. En effet, menons Pn parallèle à QN; cette ligne Pn sera perpendiculaire à AB, et par conséquent située dans le plan du cercle décrit par le point M. Lorsque les points M, N viennent prendre les positions M′, N′, la ligne Pn prend la direction Pn' parallèle à QN′, et l'angle nPn' qu'elle fait avec sa position primitive est égal à l'angle NQN′. Mais l'angle nPM ne change pas pendant la rotation du solide; n'PM′, qui est la nouvelle position de cet angle, est donc égal à nPM. Si l'on retranche de chacun de ces deux angles la partie commune n'PM, il reste les angles nPn' et MPM′, qui sont par conséquent aussi égaux. Donc les angles NQN′, MPM′, égaux tous deux à l'angle nPn', sont égaux entre eux. Ainsi dans le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe, les perpendiculaires abaissées des divers points du solide sur l'axe décrivent dans le même temps des angles égaux; la valeur commune de ces divers angles correspondant à un temps quelconque est ce qu'on appelle l'angle dont le solide a tourné pendant ce temps.

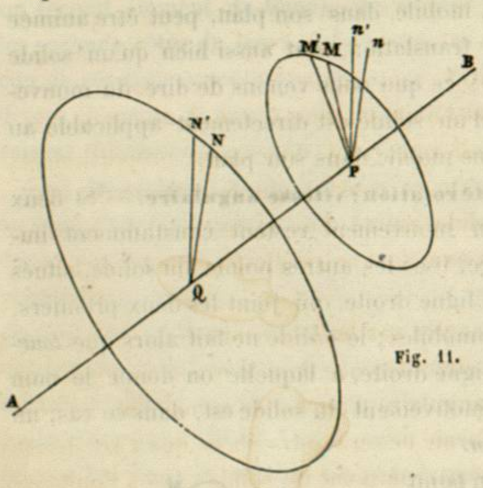


Fig. 11.

§ 18. Le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe est uniforme lorsque ce solide tourne d'angles égaux en temps égaux, quels que soient ces temps; ou, en d'autres termes, lorsque les angles dont il tourne dans des intervalles de temps quelconques sont proportionnels à ces intervalles de temps. Le degré plus ou moins grand de rapidité ou de lenteur d'un pareil mouvement se mesure par l'angle dont le solide tourne dans l'unité de temps; cet angle se nomme la *vitesse angulaire* du solide.

Lorsqu'un solide est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe, ses divers points se meuvent uniformément sur leurs circonférences de cercle respectives: mais les vitesses de ces points ne sont pas les mêmes. Les arcs MM′, NN′, *fig.* 11, décrits dans le même temps par deux points quelconques M, N, sont proportionnels à leurs rayons MP, NQ, puisque les angles MPM′, NQN′ sont égaux; les arcs que les deux points décrivent dans l'unité de temps, dans le cas du mouvement de rotation uniforme, sont donc aussi proportionnels aux rayons MP, NQ. On en conclut que les vitesses des différents points d'un solide animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe, sont entre elles comme les distances de ces points à l'axe.

Si l'on mesure les angles par les longueurs des arcs qui leur correspondent sur la circonférence dont le rayon est l'unité de longueur, la vitesse angulaire d'un solide animé d'un mouvement de rotation uniforme ne sera autre chose que l'arc décrit dans l'unité de temps par un point du solide situé à l'unité de distance de l'axe, c'est-à-dire la vitesse de ce point. Il résulte de là que si l'on nomme ω la vitesse angulaire, et v la vitesse d'un point quelconque situé à une distance r de l'axe de rotation, on aura

$$v = r\omega.$$

§ 19. Tout mouvement de rotation qui n'est pas uniforme est dit varié.

Un mouvement de rotation varié peut être regardé comme étant la succession d'une infinité de mouvements de rotation uniformes, dont chacun a lieu pendant un intervalle de temps infiniment petit. On nomme vitesse angulaire à un instant quelconque, dans un mouvement de rotation varié, la vitesse angulaire du mouvement de rotation uniforme élémentaire qui fait partie du mouvement de rotation varié à cet instant.

Si θ est l'angle dont le solide a tourné pendant un temps quelconque t, c'est-à-dire le chemin parcouru pendant ce temps par un point du solide situé à l'unité de distance de l'axe de rotation, $\frac{d\theta}{dt}$ sera la vitesse de ce point à la fin du temps t; ce sera donc aussi la vitesse angulaire du solide à cet instant. En sorte que, si l'on nomme ω cette vitesse angulaire, on aura

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Un mouvement de rotation varié pouvant être regardé, à chaque instant, comme étant uniforme pendant un intervalle de temps infiniment petit, il est clair que les vitesses dont sont animés les divers points du solide à un même instant ont entre elles les mêmes rapports que dans le cas d'un mouvement de rotation uniforme; ces vitesses sont proportionnelles aux distances des points à l'axe de rotation. Si l'on nomme v la vitesse d'un point situé à la distance r de l'axe, on aura encore

$$v = r\omega.$$

§ 20. Si l'on imagine qu'une figure plane soit animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire à son plan, on voit que cette figure ne sortira pas de ce plan. On peut la regarder comme tournant dans son plan, autour du point d'intersection de ce plan avec l'axe dont nous venons de parler: ce point prend le nom de *centre de rotation* de la figure.

Tout ce qui a été dit du mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe peut s'appliquer directement au mouvement de rotation d'une figure plane dans son plan.

§ 21. **Mouvement élémentaire d'une figure plane dans son plan.** — Pour nous rendre compte de la manière dont s'effectue un mouvement élémentaire (§ 15) quelconque d'une figure plane qui se déplace dans son plan, nous commencerons par établir la proposition suivante : Une figure plane, mobile dans son plan, peut être amenée d'une quelconque de ses positions à une autre, par un mouvement de rotation autour d'un des points du plan.

Pour le démontrer, considérons une droite faisant partie de la figure mobile; et supposons que cette droite soit dirigée suivant MN, *fig.* 12, dans la première position de la figure, et suivant M'N' dans sa seconde position. En A se trouvent deux points,

l'un de la ligne MN, l'autre de la ligne M'N'. Soit B le point de la ligne MN qui est venu se placer en A sur M'N'; soit de même

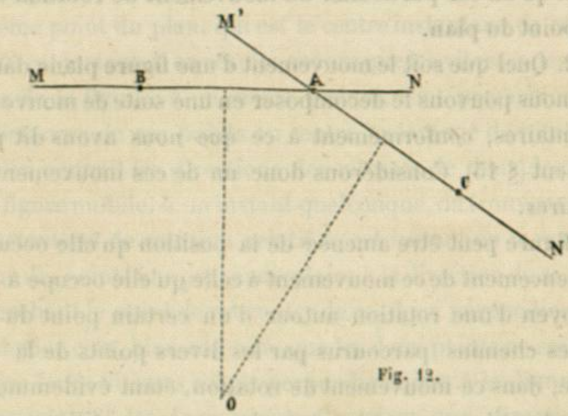


Fig. 12.

C le point de M'N' où est venu se placer le point A considéré comme appartenant à MN. On aura nécessairement

$$AB = AC.$$

Soit enfin O le centre du cercle passant par les trois points A, B, C. Si l'on fait tourner la droite MN autour du point O comme centre, jusqu'à ce que le point B vienne en A, le point A de cette droite viendra en C; la droite MN se placera suivant M'N'; et la figure mobile, supposée liée à cette droite qui l'entraîne dans son mouvement, passera de la première position à la seconde.

Cette démonstration suppose que les deux positions MN, M'N' de la droite que l'on considère se coupent en un certain point A. Il pourrait arriver qu'il n'en fût pas ainsi : les deux lignes MN, M'N' pourraient être parallèles, ou bien se superposer. Dans ce cas, pour amener tous les points de MN à coïncider avec les points qui leur correspondent sur M'N', il suffirait de donner à MN, et par conséquent à la figure mobile que nous supposons liée à cette ligne, un mouvement de translation rectiligne d'une direction convenable. Or un mouvement de ce genre peut être regardé comme étant un mouvement de rotation autour d'un centre situé à l'infini. La proposition énoncée ci-dessus est donc toujours vraie, à la condition de regarder le mouvement de translation rectiligne d'une figure plane dans son plan comme n'étant qu'un cas particulier du mouvement de rotation autour d'un point du plan.

§ 22. Quel que soit le mouvement d'une figure plane dans son plan, nous pouvons le décomposer en une suite de mouvements élémentaires, conformément à ce que nous avons dit précédemment (§ 15). Considérons donc un de ces mouvements élémentaires.

La figure peut être amenée de la position qu'elle occupe au commencement de ce mouvement à celle qu'elle occupe à la fin, au moyen d'une rotation autour d'un certain point du plan. Mais les chemins parcourus par les divers points de la figure mobile, dans ce mouvement de rotation, étant évidemment infiniment petits, on peut les regarder comme rectilignes, et par conséquent ils coïncident exactement avec les chemins que ces points parcourent dans le mouvement élémentaire dont nous nous occupons : donc ce mouvement élémentaire est identique avec la rotation à l'aide de laquelle on a amené la figure de sa position initiale à sa position finale.

On voit par là que tout mouvement élémentaire d'une figure plane, dans son plan, est un mouvement de rotation infiniment petit autour d'un des points du plan, point qui peut être situé à l'infini. Les centres autour desquels s'effectuent ainsi les divers mouvements élémentaires dont la succession constitue le mouvement total de la figure, sont généralement différents les uns des autres, et la figure ne tourne autour de chacun d'eux que pendant un intervalle de temps infiniment petit : c'est pour cela qu'on donne à chacun de ces points le nom de *centre instantané de rotation*.

§ 23. Il résulte de ce que nous venons de dire que, dans le mouvement d'une figure plane qui se déplace d'une manière quelconque dans son plan, les chemins infiniment petits parcourus par les différents points de la figure pendant un même élément de temps, sont des arcs de cercle ayant tous pour centre le centre instantané de rotation de la figure correspondant à cet élément

du temps, ou, en d'autres termes, les normales aux trajectoires des différents points de la figure mobile, menées par les positions que ces points occupent à un même instant, passent toutes par un même point du plan, qui est le centre instantané de rotation relatif à cet instant. Il en résulte encore que les vitesses des divers points de la figure, à un même instant, sont proportionnelles aux distances de ces points au centre instantané de rotation.

Si l'on connaît les directions des vitesses de deux des points de la figure mobile, à un instant quelconque, on trouvera le centre instantané de rotation relatif à cet instant en menant par chacun des points une perpendiculaire à la direction de sa vitesse et cherchant le point de rencontre de ces deux perpendiculaires. Il faut pour cela, bien entendu, que les deux points ne soient pas tels que leurs vitesses soient perpendiculaires à la ligne droite qui les joint. Si les deux perpendiculaires aux directions des vitesses des deux points sont parallèles entre elles, le centre instantané de rotation se trouve à l'infini, et le mouvement élémentaire de la figure est un mouvement de translation.

Si, outre les directions des vitesses de deux des points de la figure mobile, on connaît la grandeur de l'une de ces vitesses, on peut en déduire les vitesses de tous les autres points de la figure. Il suffit, en effet, pour cela, de déterminer d'abord le centre instantané de rotation, comme il vient d'être dit, et de s'appuyer ensuite sur ce que la vitesse d'un point quelconque est à la vitesse connue dans le rapport des distances du centre instantané de rotation aux deux points auxquels se rapportent ces vitesses.

Il faut bien se garder de croire que le centre instantané de rotation d'une figure plane, mobile dans son plan, est le centre de courbure des trajectoires des divers points de la figure. Dans le mouvement de rotation élémentaire autour de ce centre instantané, chaque point ne décrit qu'un élément de sa trajectoire. La position du centre instantané de rotation fait donc seulement connaître la direction de la tangente à la trajectoire, sans rien indiquer relativement à sa courbure.

§ 24. Appliquons ce qui précède à quelques exemples.

Soit AB, *fig.* 13, une ligne droite de longueur constante qui glisse dans l'angle droit YOX, de manière que son extrémité A reste toujours sur l'axe OX, et que son extrémité B reste toujours sur l'axe OY. Dans la position qu'occupe la ligne mobile AB, les normales aux trajectoires des deux points A, B sont les lignes AC, BC menées perpendiculairement aux axes OX, OY : le point C est donc le centre instantané de rotation de la ligne AB. On sait que, d'après la manière dont la ligne AB se déplace, la trajectoire du point D est une ellipse ayant ses axes dirigés suivant OX et OY; d'ailleurs la ligne DC doit être normale à la trajectoire de ce point D : donc la ligne EF, perpendiculaire à DC, est la tangente à l'ellipse dont nous venons de parler.

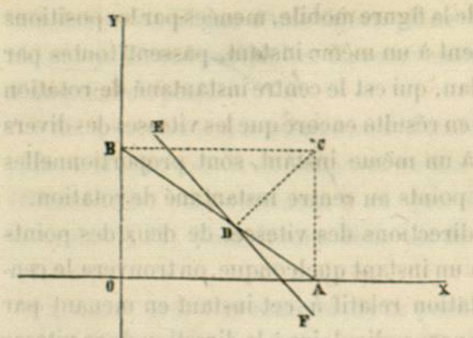


Fig. 13.

Soit encore ABD, *fig.* 14, une ligne droite qui se meut de manière à passer toujours par un point fixe O, et à avoir toujours son point B sur la ligne fixe MN. La vitesse du point B étant dirigée suivant MN, la perpendiculaire BC à la ligne MN doit passer par le centre instantané de rotation de la ligne mobile. Le point de cette ligne ABD, qui est actuellement en O, va s'en éloigner pour se placer à une distance infiniment petite de O, sur la position infiniment voisine de la droite mobile; la vitesse de ce point, qui est actuellement en O, est donc dirigée suivant la position que la ligne mobile prendra après s'être déplacée d'une quantité infiniment petite, et par

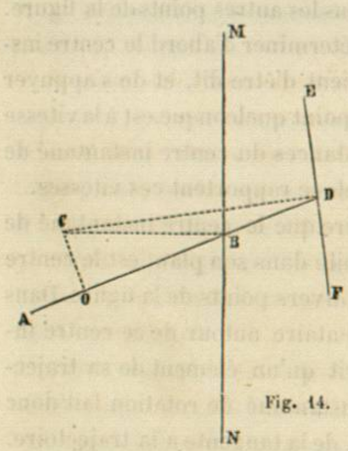


Fig. 14.

conséquent sa direction se confond avec celle de la ligne ABD elle-même : la perpendiculaire OC à la ligne ABD doit donc aussi passer par le centre instantané de rotation. Ainsi le centre autour duquel s'effectue le mouvement élémentaire de la droite mobile, à partir de sa position actuelle, est le point C où se coupent les deux perpendiculaires BC, OC. On sait que le point D décrit une conchoïde; CD est la normale à cette courbe, et la ligne EF, perpendiculaire à CD, est sa tangente.

Soit enfin AB, *fig.* 15, une ligne droite de longueur constante, dont les extrémités A, B se meuvent sur deux circonférences de cercle ayant les points O, O′ pour centres. Les normales aux trajectoires des points A et B sont les rayons OA, O′B des circonférences de cercle suivant lesquelles ces deux points se meuvent : le point de concours C de ces deux rayons est donc le centre instantané de rotation de la droite AB. On trouvera, comme précédemment, les tangentes EF, E′F′ aux trajectoires des points D, D′, pris comme on voudra sur cette droite mobile.

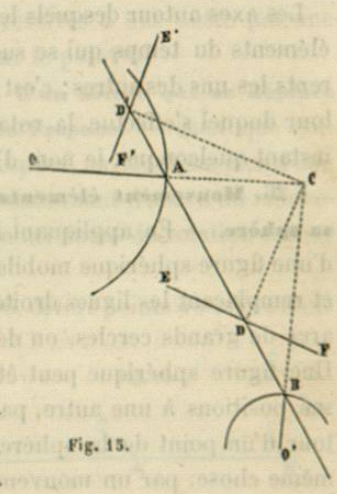


Fig. 15.

§ 25. **Mouvement élémentaire d'un solide dont tous les points se déplacent parallèlement à un même plan.** — Pour voir en quoi consiste un mouvement élémentaire quelconque d'un solide dont tous les points se déplacent parallèlement à un plan fixe P, considérons les points du solide qui se trouvent dans un même plan P′ parallèle à P. L'ensemble de ces points forme une figure plane mobile dans son plan P′. Or tout mouvement élémentaire de cette figure plane est un mouvement de rotation autour d'un certain point C du plan P′, ou, ce qui est la même chose, un mouvement de rotation autour de la perpendiculaire au plan P′, ou au plan P, menée par le point C. Le solide tout entier, qui est lié invariablement à la figure dont nous parlons, participe au même mouvement : donc tout mouvement élémentaire d'un solide dont tous les points se déplacent parallèlement à un plan fixe, est un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan.

Il peut arriver que l'axe de rotation autour duquel s'effectue le mouvement élémentaire du solide se trouve à l'infini : dans ce cas, ce mouvement élémentaire se réduit à un mouvement de translation.

Les axes autour desquels le solide tourne pendant les divers éléments du temps qui se succèdent sont généralement différents les uns des autres ; c'est pour cela qu'on donne à l'axe autour duquel s'effectue la rotation élémentaire du solide à un instant quelconque, le nom d'*axe instantané de rotation*.

§ 26. **Mouvement élémentaire d'une figure sphérique sur sa sphère.** — En appliquant le raisonnement du § 21 au cas d'une figure sphérique mobile sur la sphère où elle est placée, et remplaçant les lignes droites que l'on a considérées par des arcs de grands cercles, on démontre la proposition suivante : Une figure sphérique peut être amenée d'une quelconque de ses positions à une autre, par un mouvement de rotation autour d'un point de la sphère comme pôle, ou, ce qui est la même chose, par un mouvement de rotation autour d'un diamètre de la sphère comme axe.

On en conclut, comme dans le § 22, que tout mouvement élémentaire d'une figure sphérique sur sa phère est un mouvement de rotation infiniment petit autour d'un point de la sphère comme pôle, ou bien encore autour d'un diamètre de la sphère comme axe.

§ 27. **Mouvement élémentaire d'un solide dont un point reste immobile.** — Lorsqu'un solide se meut de telle manière qu'un point O qui en fait partie reste constamment en repos, les divers points du solide qui se trouvaient d'abord sur la surface d'une sphère ayant le point O pour centre, forment une figure sphérique qui se déplace en restant sur cette sphère. Or tout mouvement élémentaire de cette figure sphérique est un mouvement de rotation autour d'un diamètre de la sphère :

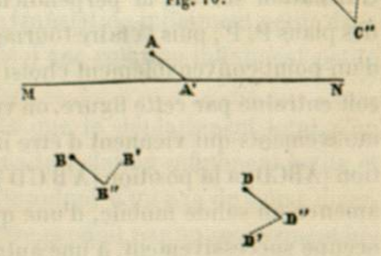
le mouvement que prend en même temps le solide tout entier est donc aussi une rotation autour de ce diamètre. Ainsi tout mouvement élémentaire d'un solide dont un point reste immobile est une rotation autour d'un axe instantané passant par ce point.

La considération de la figure sphérique formée par les divers points du solide situés à une même distance du point immobile O, fait voir encore que le solide peut être amené d'une quelconque de ses positions successives à une autre par une rotation autour d'un axe mené par le point O.

§ 28. **Mouvement élémentaire d'un solide qui se déplace d'une manière quelconque dans l'espace.** — Quel que soit le mouvement d'un solide dans l'espace, on peut l'amener d'une de ses positions à une autre, en lui donnant d'abord un mouvement de translation, ensuite un mouvement de rotation autour d'un certain axe.

Soient en effet A, B, C, D, *fig.* 16, divers points du solide dans sa première position, et A', B', C', D', ces mêmes points, pris dans la seconde position du solide. Joignons le point A au point A' par une ligne droite, et menons par les points B, C, D, des droites BB'', CC'', DD'', égales et parallèles à la droite AA'.

Fig. 16.



Pour amener le solide de la première position (ABCD) à la seconde (A'B'C'D'), donnons-lui d'abord un mouvement de translation rectiligne représenté en grandeur et en direction par la ligne AA' ; les points B, C, D viendront en B'', C'', D''. Il n'y aura donc plus qu'à donner au solide un second mouvement en vertu duquel, le point A' restant immobile, les points B'', C'', D'' viendront en B', C', D'. Mais nous savons que ce second déplacement du solide peut s'effectuer par une rotation autour d'un axe passant par le point immobile A' (§ 27). Donc, en définitive, on peut amener le solide de la première position (ABCD) à la seconde (A'B'C'D') en lui faisant subir : 1° une translation suivant AA'; 2° une rotation autour d'un axe MN passant par A'.

§ 29. Le système de ces deux mouvements que l'on donne au solide peut être varié d'une infinité de manières, tout en produisant le même résultat définitif. Il suffit en effet, pour cela, de faire jouer successivement, à chacun des points que l'on peut imaginer faire partie du solide, le rôle que l'on a fait jouer au point A. Parmi ces divers systèmes de mouvements, il en existe toujours un dans lequel la translation s'effectue parallèlement à l'axe de la rotation.

Menons en effet un plan P perpendiculaire à l'axe MN, et considérons la figure F suivant laquelle ce plan coupe le solide. Dans la translation suivant AA', la figure F se transporte dans un plan P', parallèle au plan P; dans la rotation qui s'effectue ensuite autour de MN, cette figure F tourne dans le plan P' et y prend une certaine position F'. Mais pour faire passer la figure plane dont il s'agit de sa première position F à sa dernière position F', on peut d'abord lui donner un mouvement de translation suivant la perpendiculaire qui mesure la distance des plans P, P', puis la faire tourner dans ce dernier plan autour d'un point convenablement choisi : si l'on conçoit que le solide soit entraîné par cette figure, on voit que la succession des deux mouvements qui viennent d'être indiqués l'amènera de la position (ABCD) à la position (A'B'C'D'). Il résulte de là que l'on peut amener un solide mobile, d'une quelconque des positions qu'il occupe successivement, à une autre de ces positions, au moyen d'une translation suivie d'une rotation autour d'un axe de même direction que la translation.

§30. Considérons maintenant un mouvement élémentaire d'un solide qui se déplace d'une manière quelconque dans l'espace. Il résulte de ce qui vient d'être dit que le solide peut être amené de la position qu'il occupe au commencement de ce mouvement à celle qu'il occupe à la fin, par une translation infiniment petite suivie d'une rotation infiniment petite autour d'un axe de même direction que la translation. Mais ce n'est pas dans la succession de ces deux mouvements infiniment petits que consiste

le mouvement élémentaire du solide; car, dans ce mouvement élémentaire, chacun des points du solide décrit un élément rectiligne de sa trajectoire ; tandis qu'en vertu de la succession de la translation et de la rotation dont nous venons de parler, chaque point va de sa position initiale à sa position finale, en parcourant une ligne brisée formée de deux éléments rectilignes perpendiculaires l'un à l'autre. Voyons donc par quoi nous pourrons remplacer la succession de la translation et de la rotation, pour avoir le mouvement élémentaire tel qu'il se produit en réalité.

Lorsqu'une vis se meut en pénétrant à l'intérieur d'un écrou fixe, chacun des points de la vis décrit une hélice : les diverses hélices qui forment ainsi les trajectoires des différents points de la vis sont tracées sur des surfaces cylindriques de même axe, et ont toutes un même pas. Un mouvement de ce genre peut être désigné sous le nom de *mouvement hélicoïdal*. Dans un mouvement élémentaire de cette vis, chacun de ses points décrit un élément rectiligne de sa trajectoire hélicoïdale; d'ailleurs la vis pourrait évidemment être amenée de la position qu'elle a au commencement de ce mouvement élémentaire à celle qu'elle occupe à la fin, au moyen d'une translation infiniment petite dans la direction de son axe, suivie d'une rotation infiniment petite autour de cet axe.

On conclut facilement de là que le déplacement total d'un solide, dû à la succession d'une translation infiniment petite et d'une rotation infiniment petite autour d'un axe de même direction que la translation, peut être produit par un mouvement hélicoïdal infiniment petit autour du même axe; et par suite que tout mouvement élémentaire d'un solide qui se déplace d'une manière quelconque dans l'espace est un mouvement hélicoïdal, c'est-à-dire qu'il peut être assimilé au mouvement d'une vis qui pénètre dans son écrou.

§ 31. Lorsqu'une vis se meut à l'intérieur de son écrou, on la regarde souvent comme animée de deux mouvements existant simultanément : on dit qu'elle glisse le long de son axe, et qu'en même temps elle tourne autour de cet axe. D'après cette manière de voir, un mouvement élémentaire quelconque d'un solide mobile peut être regardé comme dû à la *coexistence* d'une rotation autour d'un certain axe et d'un glissement le long de cet axe.

La ligne droite autour de laquelle le solide tourne et le long de laquelle il glisse, dans chacun de ses mouvements élémentaires successifs, change généralement de position dans l'espace d'un instant à un autre. C'est pour cela qu'on lui donne le nom d'*axe instantané de rotation et de glissement du solide.*

Si l'on se fonde sur la première manière que nous avons indiquée pour amener un solide d'une quelconque de ses positions à une autre (§ 28), on peut dire encore que tout mouvement élémentaire du solide est dû à la coexistence d'une translation égale et parallèle au mouvement élémentaire d'un de ses points, et d'une rotation autour d'un axe passant par ce point.

§ 32. Soit ε la quantité infiniment petite dont le solide glisse le long de son axe instantané de rotation et de glissement, pendant le temps infiniment petit *dt*. Il est clair que les déplacements correspondants des différents points du solide sont tels que leurs projections sur cet axe sont toutes égales à ε. La vitesse d'un point quelconque s'obtient en divisant son déplacement pendant le temps *dt*, par ce temps ; la projection de cette vitesse sur l'axe instantané de rotation et de glissement s'obtiendra donc en divisant ε par *dt*. Donc les vitesses dont tous les points du solide sont animés simultanément, à un instant quelconque, sont telles, que leurs projections sur l'axe instantané de rotation et de glissement relatif à cet instant, sont toutes égales entre elles.

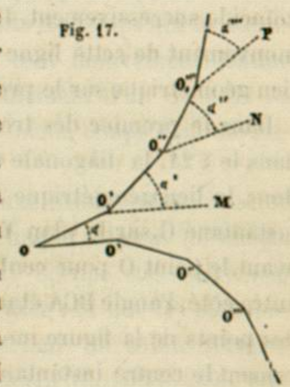
Il résulte de là que si l'on mène, à partir d'un même point O de l'espace, des lignes droites égales et parallèles aux vitesses dont les divers points du solide sont animés à un même instant, les extrémités de ces lignes droites seront toutes dans un même plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation et de glissement ; en sorte que, si l'on abaisse du point O une perpendiculaire sur ce plan, cette perpendiculaire sera parallèle à l'axe instantané. Or, pour déterminer le plan dont il s'agit, il suffit d'en connaître trois points non en ligne droite ; il suffit

donc aussi d'avoir mené par le point O trois lignes droites égales et parallèles aux vitesses simultanées de trois points du solide, avec la condition que ces trois vitesses ne soient pas parallèles à un même plan.

§ 33. **Mouvement continu d'une figure plane dans son plan.** — Pour arriver à nous représenter nettement le mouvement continu d'une figure plane dans son plan, nous commencerons par considérer le cas suivant.

Supposons que la figure mobile tourne d'abord d'un angle α autour d'un point O, *fig.* 17, puis d'un angle α' autour d'un second point O', ensuite d'un angle α'' autour du point O'', etc. Prenons la figure à l'instant où elle va commencer sa rotation autour du point O, et traçons-y la droite OO'_1 égale à OO', et faisant avec celle-ci un angle α ; après avoir mené par O'_1 la droite O'_1M, telle que l'angle OO'_1M soit égal à l'angle OO'O'', traçons la droite $O'_1O''_1$, égale en longueur à O'O'', et faisant avec O'_1M un angle α' ; construisons de même l'angle $O'_1O''_1N$ égal à l'angle O'O''O''', puis menons la ligne $O''_1O'''_1$, égale à O''O''', et faisant un angle α'' avec O''_1N ; et ainsi de suite. Lorsque la figure mobile aura tourné de l'angle α autour du point O, le point O'_1, entraîné par elle, sera venu en O', et O'_1M aura pris la direction O'O''. La figure tournant alors d'un angle α' autour de O', la droite $O'_1O''_1$ viendra coïncider avec O'O'', et le point O''_1 tombera en O''. La troisième rotation de cette figure amènera le point O'''_1 en O''', et ainsi de suite : en sorte que, pendant le mouvement de la figure mobile, le polygone $OO'_1O''_1O'''_1$... roulera sur le polygone OO'O''O'''.... ; ou bien encore, si le premier polygone roule sur le second, en entraînant avec lui la figure mobile, il donnera à cette figure précisément le mouvement que nous lui avions supposé.

Fig. 17.



§ 34. Passons maintenant au cas où une figure plane se meut d'une manière quelconque dans son plan. Cette figure est animée d'une rotation infiniment petite autour d'un cercle instantané, pendant chaque élément du temps (§ 22). Ce centre instantané de rotation occupe généralement des positions différentes sur le plan, d'un instant à un autre; généralement aussi il coïncide successivement avec divers points de la figure mobile. Supposons que l'on cherche : 1° le lieu géométrique des positions successives de ce centre instantané sur le plan; 2° le lieu géométrique des points de la figure mobile avec lesquels il coïncide successivement. Il est clair qu'on pourra regarder le mouvement de cette ligne comme dû au roulement du second lieu géométrique sur le premier.

Dans le premier des trois exemples que nous avons donnés dans le § 24, la diagonale OC, *fig.* 13, est toujours égale à AB : donc le lieu géométrique des positions successives du centre instantané C sur le plan YOX est une circonférence de cercle ayant le point O pour centre et la ligne AB pour rayon. D'un autre côté, l'angle BCA étant toujours droit, le lieu géométrique des points de la figure mobile avec lesquels coïncide successivement le centre instantané de rotation est une circonférence de cercle décrite sur AB comme diamètre. Le mouvement de la ligne AB, dont les extrémités glissent sur les axes OX, OY, peut donc être produit par le roulement de la seconde de ces deux circonférences à l'intérieur de la première.

§ 35. **Mouvement continu d'un solide dont un point reste immobile.** — On peut étendre immédiatement ce qui vient d'être dit du mouvement continu d'une figure plane dans son plan, au mouvement continu d'un solide dont un point reste immobile.

Les positions que l'axe instantané de rotation du solide prend successivement dans l'espace forment un cône ayant pour sommet le point qui reste immobile. Les positions que cet axe instantané occupe successivement à l'intérieur du corps forment un second cône ayant le même sommet que le premier. Le mouvement continu du solide peut être regardé comme dû au roulement du second cône sur le premier.

§ 36. **Mouvement continu d'un solide qui se déplace d'une manière quelconque dans l'espace.** — Nous pouvons considérer ce mouvement de deux manières différentes.

Tout mouvement élémentaire d'un solide peut être regardé comme dû à la coexistence d'une translation égale et parallèle au mouvement élémentaire d'un des points du solide, et d'une rotation autour d'un axe passant par ce point (§ 31). Si l'on prend toujours le même point du solide pour appliquer cette considération dans les divers éléments du temps qui se succèdent, on arrive au résultat suivant : tout mouvement continu d'un solide peut être attribué au roulement d'un cône lié au solide, sur un cône qui est animé en même temps d'un mouvement de translation dans l'espace.

D'un autre côté, si l'on considère l'axe instantané de rotation et de glissement du solide relatif à chaque élément du temps, on voit que les positions que cet axe occupe successivement dans l'espace forment une surface réglée ; et que les positions qu'il occupe successivement à l'intérieur du solide forment une autre surface réglée. Le mouvement du solide peut être regardé comme dû au roulement de la seconde de ces deux surfaces sur la première, accompagné d'un glissement le long de la génératrice suivant laquelle les deux surfaces se touchent.