CHAPITRE III

MOUVEMENTS COMPOSÉS

§ 37. **Définition du mouvement relatif.** — Pour étudier le mouvement d'un point dans l'espace, on compare la position qu'il occupe à chaque instant à celle de certains points fixes qu'on nomme *points de repère.* Le mouvement du point mobile est complètement déterminé par la connaissance des changements qu'éprouvent successivement ses distances aux points fixes.

Mais si, au lieu de comparer les positions successives du point mobile à des points fixes, on les compare à des points de repère qui sont eux-mêmes en mouvement, il est clair que le mouvement que l'on trouvera ainsi, pour le point mobile dont on s'occupe, ne sera pas son mouvement réel. Un pareil mouvement, obtenu en se servant de points de repère qui ne sont pas fixes, se nomme *mouvement relatif :* c'est le mouvement du point mobile par rapport à ces points de repère. Par opposition, le mouvement réel du point dans l'espace se nomme *mouvement absolu.*

§ 38. **Ce qu'on entend par mouvements simultanés d'un point.** — Considérons un point en mouvement sur le pont d'un bateau qui se meut lui-même le long d'une rivière. Un observateur, placé sur le bateau et participant à son mouvement, verra le point mobile se déplacer d'une certaine manière par rapport au bateau et à lui-même ; mais ce mouvement *apparent* du point mobile est tout différent de son mouvement réel dans l'espace : ce n'est autre chose que ce que nous venons de nommer mouvement relatif.

La connaissance du mouvement apparent du point, combinée avec celle du mouvement que possède le bateau, conduit facilement à la connaissance du mouvement réel ou absolu de ce point dans l'espace. Supposons en effet que le bateau soit animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme suivant la direction AB, *fig.* 18, avec une vitesse égale à AD, et que le point mobile ait sur le pont du bateau un mouvement apparent rectiligne et uniforme suivant la direction AC, avec une vitesse égale à AE.

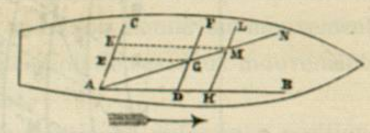


Fig. 18.

Au bout d'une seconde, la ligne AC, emportée parallèlement à elle-même par le bateau, prend la position DF ; mais pendant ce temps, le point mobile a parcouru la portion AE de cette ligne : donc, à la fin de cette première seconde, le point mobile se trouve en G. Au bout d'un temps quelconque t, le bateau s'étant mû d'une quantité $AH = AD \times t$, la droite AC se trouve dans la position HL ; mais, pendant le même temps, le point mobile a parcouru sur la ligne mobile AC un chemin $AK = AE \times t$: donc ce point mobile se trouve en M à la fin du temps t. Le rapport de AH à AD étant égal au rapport de AK à AE, ou, ce qui revient au même, au rapport de HM à DG, il s'ensuit que la position M du mobile à la fin du temps t se trouve sur la ligne droite AN qui passe par les deux points A et G ; donc déjà le mouvement absolu de ce mobile est un mouvement rectiligne dirigé suivant la droite AN. La similitude des triangles ADG, AHM montre que l'on a

$$AM = AG \times t ;$$

donc le mouvement absolu du point mobile est uniforme, et AG est sa vitesse.

§ 39. Concevons en général qu'un point, rapporté à un système d'axes mobiles OX, OY, OZ, *fig.* 19, décrive par rapport à ces axes une ligne quelconque AB ; et que, par suite du mouvement des axes, cette ligne AB prenne successivement dans l'espace les positions A'B', A''B'', A'''B''... Le point mobile aura dans l'espace un mouvement absolu que nous pourrons facilement déterminer d'après la connaissance de son mouvement relatif suivant la ligne AB, et du mouvement dont sont animés les axes.

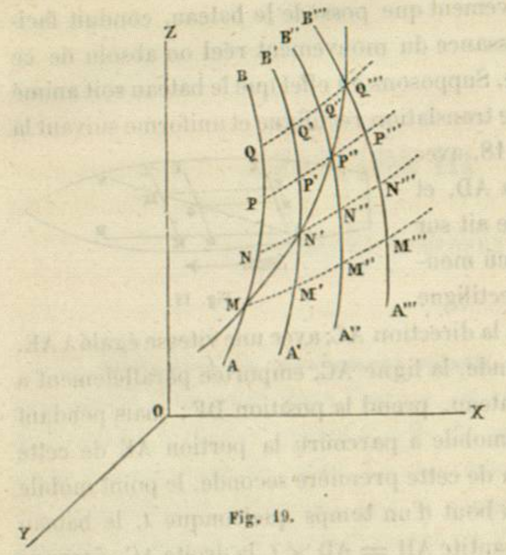


Fig. 19.

Supposons que les positions AB, A′B′, A″B″,..... de la courbe que le mobile décrit par rapport aux axes, correspondent aux valeurs t, t', t'',... du temps ; supposons en outre qu'à ces diverses époques le mobile se trouve aux points M,N,P,... de la courbe mobile AB. A la fin du temps t, le mobile est en M. A la fin du temps t', il est au point N de la courbe AB ; mais cette courbe se trouve alors dans la position A′B′, et le point N a été transporté en N′ : donc à la fin du temps t' le mobile est en N′. On verra de même qu'à la fin du temps t'', il se trouve en P″ ; et ainsi de suite. Le point mobile décrit donc dans l'espace la trajectoire MN′P″Q‴, et il y occupe les positions M,N′,P″,Q‴,... aux instants qui correspondent aux valeurs t, t', t'', t''',...... du temps.

§ 40. Dans les deux cas que nous venons d'examiner, on considère le mouvement du point mobile par rapport au bateau ou aux axes mobiles, et le mouvement du bateau ou des axes, comme étant deux mouvements dont le point est animé simultanément. Le mouvement du point par rapport aux points de repère mobiles auxquels on le compare (bateau ou axes) est désigné sous le nom de mouvement relatif, comme nous l'avons déjà dit ; le mouvement des points de repère eux-mêmes (bateau ou axes) se nomme *mouvement d'entraînement*.

L'opération qui a pour objet de trouver le mouvement absolu d'un point, connaissant son mouvement d'entraînement et son mouvement relatif, constitue ce qu'on nomme *la composition des mouvements*. Le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif sont souvent désignés sous le nom collectif de *mouvements composants ;* et alors on donne au mouvement absolu qui résulte de la composition de ces deux mouvements le nom de *mouvement résultant*.

Un point qui occupe successivement différentes positions dans l'espace ne peut évidemment avoir qu'un seul mouvement. Quand nous regardons ce point comme animé à la fois de deux mouvements, c'est par une pure opération de l'esprit ; cette décomposition d'un mouvement en deux autres ne peut évidemment avoir rien de réel (*).

§ 41. Il est aisé de comprendre que l'on peut également regarder un point comme animé à la fois de trois, de quatre,....

(*) On lit dans le programme officiel de l'enseignement de la Mécanique dans les lycées (classe de rhétorique), et dans la partie de ce programme où il n'est encore question que de l'étude géométrique du mouvement considéré en lui-même :

Indépendance des mouvements simultanés constatée par l'observation.

Cela n'a pas de sens. L'existence des mouvements simultanés d'un corps n'a rien de réel ; ce n'est qu'une conception de l'esprit sur laquelle l'observation n'a pas de prise. Un corps se meut dans l'espace ; au lieu de rapporter ses positions successives à des axes fixes, on les rapporte à des axes qui sont eux-mêmes en mouvement, et par suite on trouve ainsi un mouvement qui n'est pas le mouvement réel ; le mouvement ainsi obtenu (mouvement relatif), combiné avec le mouvement dont les axes sont animés, doit évidemment conduire à la connaissance du mouvement réel, et cette combinaison est ce qu'on nomme la *composition des mouvements simultanés* du corps. Le mouvement des axes étant pris comme on voudra, le mouvement du corps par rapport à ses axes est entièrement déterminé, pour que la combinaison de ces deux mouvements conduise au mouvement réel du corps. Que veut donc dire la dépendance ou l'indépendance de ces deux mouvements simultanés ?

L'erreur commise par les auteurs du programme officiel ne peut être attribuée qu'à une étrange confusion d'idées. On aura placé dans la partie purement géométrique ce qui doit se dire plus tard à l'occasion du mode d'action des forces pour produire le mouvement. Alors, en effet, on doit emprunter à l'expérience les notions relatives à l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieurement acquis par le corps sur lequel elle agit, et aussi à l'indépendance des effets des forces qui agissent simultanément sur un même corps. (*Voir* plus loin §§ 89 et 93.)

mouvements. Un point se meut sur un bateau, le bateau se meut sur une rivière, la terre tourne autour de la ligne des pôles, elle se transporte en même temps aux différents points de son orbite elliptique autour du soleil. Tous ces mouvements peuvent être considérés comme étant des mouvements simultanés du point dont on s'occupe ; le mouvement absolu de ce point peut être obtenu d'après la connaissance de ces mouvements simultanés, tout aussi bien que s'il n'y en avait que deux.

Le mouvement du point sur le bateau est un mouvement relatif ; le mouvement du bateau par rapport à la terre est un mouvement d'entraînement ; la composition de ces deux mouvements donnera le mouvement du point mobile par rapport à la terre. Le mouvement résultant de cette composition est encore un mouvement relatif, puisque la terre n'est pas en repos ; le mouvement de rotation de la terre autour de la ligne des pôles est un mouvement d'entraînement : la composition de ces deux nouveaux mouvements donnera le mouvement du point mobile par rapport à des axes de direction constante, passant par le centre de la terre, et ainsi de suite.

§ 42. **Composition des vitesses.** — Lorsqu'un point mobile est regardé comme animé à la fois de plusieurs mouvements, son mouvement réel s'obtient par la composition de ces mouvements simultanés. Nous allons voir que la vitesse du point, à chaque instant, peut se déduire d'une manière très simple des vitesses qu'il possède au même instant dans chacun des mouvements composants.

Dans l'exemple que nous avions pris d'abord, d'un point animé d'un mouvement rectiligne et uniforme sur un bateau qui se meut lui-même d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme (§ 38), nous avons vu que la vitesse du mouvement absolu du point mobile est AG, *fig.* 18, c'est-à-dire qu'elle est représentée par la diagonale du parallélogramme ADGE dont les côtés sont les vitesses AD, AE des deux mouvements composants.

Nous allons voir que, dans le cas général que nous avons considéré ensuite (§ 39), la vitesse du mobile dans son mouvement absolu se déduit encore de la même manière des vitesses dans

les deux mouvements composants. Si nous supposons que l'intervalle de temps $t'-t$, employé par le mobile à aller de M en N', *fig.* 19, soit infiniment petit, la figure MM'NN' devient un parallélogramme ; car, les côtés MN, M'N' étant deux positions infiniment voisines d'un même élément de la trajectoire relative AB, et faisant entre eux par conséquent un angle qui ne peut être qu'infiniment petit, on doit regarder ces côtés MN, M'N' comme égaux et parallèles. On peut donc dire que le déplacement absolu MN' du mobile, pendant un intervalle de temps infiniment petit, est la diagonale du parallélogramme qui aurait pour côtés : 1° son déplacement relatif MN ; 2° son déplacement d'entraînement MM', c'est-à-dire le déplacement qu'il aurait éprouvé pendant ce temps, s'il n'avait pas changé de position par rapport aux axes mobiles. Les déplacements infiniment petits MN', MN, MM', sont proportionnels aux vitesses absolue, relative et d'entraînement, puisqu'on obtient ces vitesses en divisant les déplacements MN', MN, MM' par le temps infiniment petit $t'-t$: donc, si l'on construit un parallélogramme sur les vitesses relative et d'entraînement MS, MR, *fig.* 20, la diagonale MT de ce parallélogramme représentera en grandeur et en direction la vitesse absolue du mobile. Cette proposition est souvent désignée sous le nom de *parallélogramme des vitesses*.

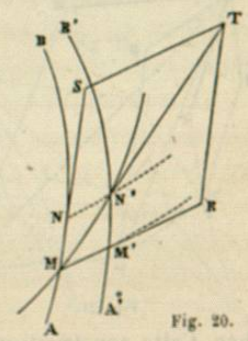


Fig. 20.

On peut observer que, si les vitesses MR, MS changeaient de rôle, si la première était une vitesse relative, et la seconde une vitesse d'entraînement, la construction qui donne la vitesse absolue serait exactement la même. Aussi se contente-t-on souvent de dire que MR et MS sont deux vitesses dont le point est animé simultanément, sans indiquer laquelle des deux est une vitesse relative ; et on les confond sous le nom de *composantes* de la vitesse absolue MT, qui est à son tour nommée leur *résultante*.

§ 43. Lorsqu'on regarde un point mobile comme animé à la fois de plus de deux mouvements (§ 41), on obtient sa vitesse absolue au moyen des vitesses des divers mouvements composants, en appliquant successivement la construction du parallélogramme des vitesses, de la manière suivante :

Soient AB, AC, AD, AE, *fig.* 21, les vitesses du point, dans chacun de ses mouvements composants. On trouve d'abord que AF est la résultante des vitesses AB, AC ; ensuite que AG est la résultante des vitesses AF et AD, et par conséquent la résultante des trois vitesses AB, AC, AD ; enfin que AH est la résultante de AG et de AE, c'est-à-dire la résultante des quatre vitesses données.

Pour trouver cette résultante définitive, on peut se contenter de mener, par l'extrémité B de la première vitesse AB, une droite BF égale et parallèle à AC ; puis, par le point F, une droite FG égale et parallèle à AD ; ensuite par le point G, une droite GH égale et parallèle à AE : la droite AH, qui joint le point A à l'extrémité du polygone ABFGH ainsi formé, est la résultante cherchée. Cette construction, à l'aide de laquelle on détermine la résultante d'un nombre quelconque de vitesses dont un point est animé simultanément, se nomme *polygone* des vitesses.

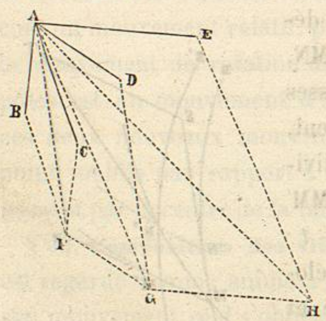


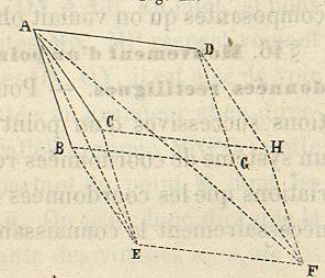
Fig. 21.

Il est clair que le polygone des vitesses, dont le parallélogramme des vitesses n'est qu'un cas particulier, permet de composer les vitesses simultanément d'un point dans tous les cas possibles. Si ces vitesses simultanées sont de même direction et de même sens, on en déduit que la vitesse résultante est égale à leur somme, et qu'elle est dirigée dans la direction et dans le sens de chacune d'elles. Si les vitesses simultanées sont de même direction, et que les unes soient dans un sens, les autres dans le sens opposé, on trouvera leur résultante en faisant la somme de celles qui sont dirigées dans un sens, et la somme de

celles qui sont dans le sens contraire, puis retranchant la plus petite de ces deux sommes de la plus grande : la différence ainsi obtenue sera la vitesse résultante, et elle sera dirigée dans le sens de la plus grande des deux sommes dont nous venons de parler.

§ 44. Dans le cas où les vitesses composantes sont au nombre de trois, et où leurs directions ne sont pas dans un même, plan, on peut trouver la ~~résistance~~ résultante par un moyen un peu différent, que nous allons faire connaître.

Soient AB, AC, AD, *fig.* 22, les trois vitesses composantes. En construisant un parallélogramme sur AB et AC, on trouvera la résultante AE de ces deux vitesses ; si ensuite on mène par le point E, une droite EF égale et parallèle à AD, AF sera la résultante de ces trois vitesses AB, AC, AD. Or, si l'on mène par les points B, C, des droites BG, CH, aussi égales et parallèles à AD, les extrémités D, F, G, H, des quatre droites égales et parallèles AD, EF, BG, CH, formeront un parallélogramme égal et parallèle au parallélogramme ABCE. Donc la vitesse résultante AF est la diagonale d'un parallélipipède construit sur les trois vitesses composantes, AB, AC, AD. Cette construction, spéciale au cas de trois vitesses composantes non situées dans un même plan, se nomme *parallélipipède des vitesses.*

Fig. 22.


§ 45. On a souvent besoin de décomposer une vitesse en deux ou trois composantes suivant des directions données. Cette décomposition s'effectue très facilement, en se fondant sur ce qui précède.

Soit AB, *fig.* 23, une vitesse qu'il s'agit de décomposer en deux autres dirigées suivant les lignes AC, AD. On observe d'abord que, pour que cela soit possible, il faut que la vitesse donnée AB soit dans le plan

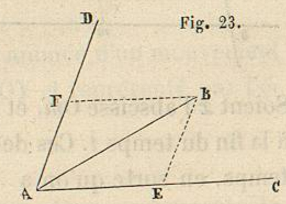
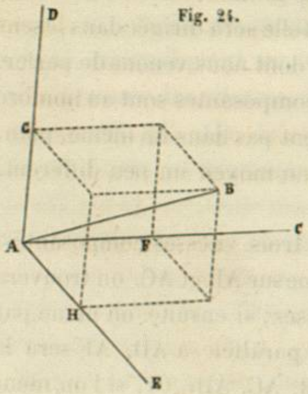


Fig. 23.

CAD. Si cette condition est remplie, il suffit de mener par le point B des parallèles BE, BF aux lignes AD, AC : AE et AF sont les deux composantes cherchées.

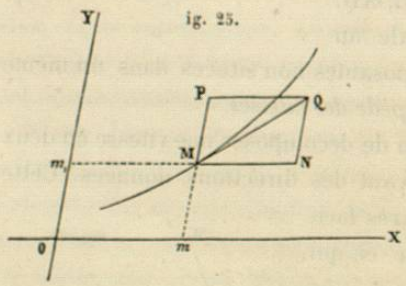
Fig. 24.



Soit encore AB, *fig.* 24, une vitesse qu'il s'agit de décomposer en trois autres dirigées suivant les lignes AC, AD, AE, non situées dans un même plan. Menons par le point B trois plans respectivement parallèles aux plans DAE, CAE, CAD, et cherchons les points F, G, H où ces plans coupent les lignes AC, AD, AE : AF, AG et AH sont les trois vitesses composantes qu'on voulait obtenir.

§ 46. **Mouvement d'un point rapporté à un système de coordonnées rectilignes.** — Pour définir complètement les positions successives d'un point mobile, on peut les rapporter à un système de coordonnées rectilignes ; la connaissance des variations que les coordonnées éprouvent avec le temps entraîne nécessairement la connaissance des diverses circonstances du mouvement de ce point.

Fig. 25.



Considérons d'abord le mouvement d'un point qui reste toujours dans un même plan, et rapportons ses diverses positions à deux axes coordonnés OX, OY tracés dans ce plan, *fig.* 25. Soient x l'abscisse Om, et y l'ordonnée Om_1 du point mobile M à la fin du temps t. Ces deux coordonnées, x, y, varient avec le temps, en sorte qu'on a

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t).$$

Si l'on projette le point M sur l'axe OX, parallèlement à l'axe OY, la projection sera m ; de même, si on le projette sur l'axe OY, parallèlement à l'axe OX, sa projection sera m_1. Les deux relations qui précèdent sont donc les équations du mouvement des projections m, m_1 du point M sur les deux axes. On les nomme aussi souvent les *équations du mouvement* du point M.

L'élimination de t entre ces deux équations fournit une relation entre les variables x, y ; ce n'est autre chose que l'équation de la trajectoire du point M.

Désignons par u et u_1 les vitesses des projections m, m_1 du point M ; nous aurons

$$u = \frac{dx}{dt} = f'(t), \qquad u_1 = \frac{dy}{dt} = \varphi'(t).$$

La connaissance de ces deux vitesses permet de trouver la vitesse v du point M, en se fondant sur ce que u et u_1 sont les projections de v sur les axes OX, OY (§ 13). En effet, si nous menons par le point M deux droites MN, MP respectivement égales à u, u_1, et parallèles aux axes OX, OY, il est aisé de voir que la vitesse v doit être représentée en grandeur et en direction par la diagonale MQ du parallélogramme MNPQ : cette diagonale MQ est la seule ligne partant du point M dont les projections sur les axes soient u, u_1. On peut donc dire que la vitesse v du point M est la résultante des vitesses u, u_1 de ses projections sur les axes OX, OY (§ 42).

Cette conséquence, à laquelle nous venons de parvenir, peut être établie d'une autre manière. On peut concevoir que le point mobile parcoure la droite OX, de manière que l'équation de son mouvement sur cette ligne soit

$$x = f(t);$$

et qu'en même temps la ligne OX soit animée d'un mouvement de translation rectiligne parallèle à OY et représenté par l'équation

$$y = \varphi(t).$$

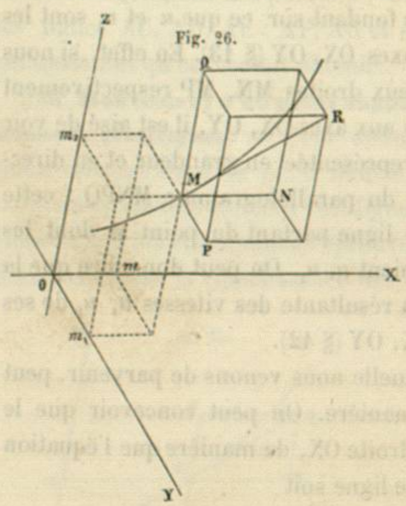
En vertu de l'existence simultanée de ces deux mouvements, le point M se mouvra dans le plan YOX comme nous l'avions supposé d'abord. Ce mouvement absolu du point M peut donc être regardé comme résultant de la composition des mouvements de ses deux projections sur les axes OX, OY; et par suite, sa vitesse v doit être la résultante des vitesses u, u_1 de ces projections.

§ 47. Il est facile d'étendre ce qui vient d'être dit au cas où l'on rapporte les positions successives d'un point mobile M à trois axes OX, OY, OZ, *fig.* 26. Si l'on désigne par x, y, z les trois coordonnées Om, Om_1, Om_2 du point M, à la fin du temps t, ces quantités varient avec le temps, en sorte qu'on a

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t).$$

Les points m, m_1, m_2 sont les projections de M sur les axes, faites parallèlement aux plans YOZ, XOZ, XOY. Les trois relations qui précèdent sont donc les équations du mouvement de ces projections du point M; on leur donne aussi le nom d'équations du mouvement du point M.

Fig. 26.



En éliminant la variable t entre ces trois équations, on trouve deux relations entre les variables x, y, z : ce sont les équations de la trajectoire du point M dans l'espace.

Représentons par u, u_1, u_2 les vitesses des projections m, m_1, m_2 du point M, nous aurons

$$u = \frac{dx}{dt} = f'(t), \quad u_1 = \frac{dy}{dt} = \varphi'(t), \quad u_2 = \frac{dz}{dt} = \psi'(t).$$

Ces vitesses u, u_1, u_2 sont les projections de la vitesse v du point M dans l'espace. On en conclura sans peine que, si l'on mène par le point M trois droites parallèles aux axes OX, OY,

OZ, et égales respectivement à u, u_1, u_2, la vitesse v est la diagonale du parallélipipède construit sur ces trois droites. Donc cette vitesse v du point M est la résultante des trois vitesses u, u_1, u_2, de ses projections sur les axes (§ 44).

On parvient au même résultat en supposant que le point mobile se meuve sur l'axe OX conformément à l'équation

$$x = f(t);$$

qu'en même temps cet axe OX ait un mouvement de translation rectiligne, parallèle à l'axe OY, et représenté par l'équation

$$y = \varphi(t);$$

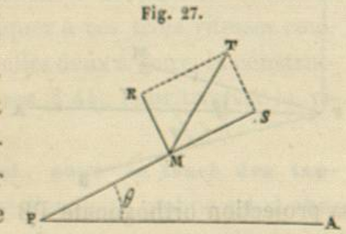
et qu'enfin le plan XOY ait aussi un mouvement de translation rectiligne, parallèle à l'axe OZ, et représenté par l'équation

$$z = \psi(t).$$

La coexistence de ces trois mouvements équivaut au mouvement du point M dans l'espace tel que nous l'avions d'abord considéré. On peut donc regarder les mouvements des projections du point M sur les axes comme étant les mouvements composants de son mouvement absolu, et par conséquent les vitesses u, u_1, u_2, des projections m, m_1, m_2, sont les composantes de la vitesse v de ce point M.

§ 48. **Mouvement d'un point rapporté à un système de coordonnées polaires.** — On peut encore rapporter les diverses positions d'un point mobile à un système de coordonnées polaires. Nous allons examiner successivement le cas des coordonnées polaires dans un plan, et celui des coordonnées polaires dans l'espace.

Fig. 27.



Soient P le pôle, et AP l'axe polaire, *fig.* 27, auxquels sont rapportées les positions du point mobile M, qui se meut en restant dans un plan passant par l'axe AP. Désignons par r le rayon vecteur MP, et par θ l'angle MPA. Les quantités r et θ varient avec le temps t; la connaissance des relations qui les lient à cette dernière variable suffit pour que le mouvement du point M soit complètement connu. Ces relations constituent les équations du mouvement du point.

On peut regarder le point M comme marchant le long du rayon vecteur pendant que ce rayon vecteur tourne autour du pôle. La composition de ces deux mouvements simultanés du point M donnera son mouvement réel. Le mouvement du point M le long du rayon vecteur est un mouvement relatif; le mouvement de rotation du rayon vecteur autour du pôle est un mouvement d'entraînement.

La vitesse du point M dans son mouvement le long du rayon vecteur est

$$\frac{dr}{dt}.$$

La vitesse d'entraînement du point M, supposé immobile sur le rayon vecteur, est

$$r\frac{d\theta}{dt}.$$

Si l'on porte la première en MS, sur le prolongement du rayon vecteur PM, et la seconde en MR, suivant une perpendiculaire à ce rayon vecteur, on trouvera la vitesse absolue MT du point M, en appliquant la construction du parallélogramme des vitesses aux deux composantes MR, MS.

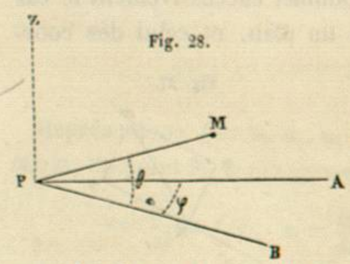


Fig. 28.

§ 49. Lorsqu'un point mobile M se meut d'une manière quelconque dans l'espace, on peut définir sa position à chaque instant en donnant : 1° sa distance r à un point fixe ou pôle P, *fig.* 28; 2° l'angle θ que le rayon vecteur MP fait avec sa projection orthogonale PB sur un plan fixe APB; 3° enfin l'angle φ que la projection PB fait avec une ligne fixe PA tracée dans ce plan. Les trois coordonnées r, θ, φ varient avec le

temps t. Les relations qui les lient à cette dernière variable constituent les équations du mouvement du point M.

On peut regarder le mouvement du point M dans l'espace comme résultant de la composition de trois mouvements simultanés, savoir : 1° un mouvement de glissement du point M le long du rayon vecteur PM ; 2° un mouvement de rotation du rayon vecteur PM autour du point P, dans le plan BPM; 3° un mouvement de rotation du plan BPM autour de l'axe PZ perpendiculaire au plan ABP. La vitesse de glissement du point M, le long du rayon vecteur, est

$$\frac{dr}{dt}.$$

La vitesse du point M, supposé immobile sur le rayon vecteur, pendant que cette ligne tourne autour du point P, dans le plan BPM, est

$$r\frac{d\theta}{dt}.$$

La vitesse du point M, supposé immobile sur le plan BPM pendant que ce plan tourne autour de PZ, est

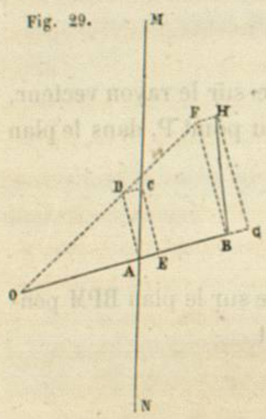
$$r\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}.$$

Supposons que l'on porte la première de ces trois vitesses sur le prolongement du rayon vecteur PM; la seconde sur une perpendiculaire à PM, menée par le point M, dans le plan BPM ; et la troisième sur une perpendiculaire au plan BPM, menée par le point M : il suffira d'appliquer à ces trois vitesses composantes, perpendiculaires entre elles deux à deux, la construction du parallélipipède des vitesses (§ 44), pour trouver la vitesse du point M dans l'espace.

§ 50. **Méthode de Roberval, pour le tracé des tangentes aux courbes.** — La vitesse d'un point mobile est, à chaque instant, dirigée suivant la tangente à la courbe qu'il décrit. Il en résulte que la connaissance de cette vitesse entraîne celle de la tangente. Concevons que le mouvement du mobile soit décomposé en plusieurs mouvements composants : si l'on peut trouver les vitesses simultanées dans ces mouvements composants, ou simplement les rapports qui existent entre elles, on en déduira la direction de la vitesse absolue du mobile, et, par suite, la direction de la tangente à sa trajectoire. Telle est la méthode indiquée par Roberval pour le tracé des tangentes aux courbes. Nous allons donner quelques exemples de son application.

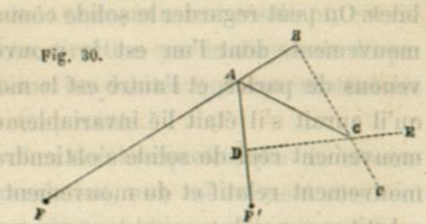
Reprenons la conchoïde, dont nous nous sommes déjà occupés (§ 24). On mène par le point fixe O, *fig.* 29, une droite quelconque OAB, et l'on porte sur cette droite une longueur constante AB, à partir du point A où elle coupe une droite fixe MN : la conchoïde est le lieu des points B ainsi obtenus. Si nous regardons le point O comme un pôle autour duquel tourne le rayon vecteur OAB, nous pourrons regarder les vitesses des points A et B comme résultant chacune de la composition d'une vitesse de glissement le long du rayon vecteur (§ 48), et d'une vitesse d'entraînement due à la rotation du rayon vecteur autour du point O. Les vitesses de glissement de ces deux points A et B sont évidemment égales, puisque la distance de ces deux points ne varie pas. D'un autre côté, leurs vitesses d'entraînement sont proportionnelles à leurs distances OA, OB au point fixe O. La vitesse absolue du point A est dirigée suivant la ligne MN ; soit AC cette vitesse : en construisant le rectangle AECD, on aura AD pour la vitesse d'entraînement du point A, et AE pour sa vitesse de glissement. Si nous traçons BF perpendiculaire à OB, jusqu'à la rencontre de la ligne OD prolongée, BF sera la vitesse d'entraînement du point B ; si nous portons en outre, sur le prolongement de OB, une longueur BG égale à AE, BG sera la vitesse de glissement du

Fig. 29.



point B : la diagonale BH du rectangle BFGH sera donc la vitesse du point B, et, par conséquent, cette ligne BH sera la tangente à la conchoïde au point B.

Fig. 30.



L'ellipse est le lieu des points A, *fig.* 30, tels que la somme de leurs distances AF, AF', à deux points fixes F, F', est constante. Si nous regardons le point A comme appartenant au rayon vecteur AF, mobile autour du point F, sa vitesse pourra être décomposée en une vitesse suivant le rayon et une vitesse d'entraînement. Il en sera de même si nous regardons ce point A comme appartenant au rayon vecteur AF', mobile autour du point F'. La somme AF + AF' restant constante, il en résulte nécessairement que les deux vitesses du point A suivant les rayons AF, AF' sont égales, et que, si l'une des deux est dirigée suivant le prolongement de FA, l'autre est dirigée de A vers F'. Soit AB la vitesse du point A sur le rayon vecteur FA ; si nous connaissions la vitesse d'entraînement correspondante, il nous suffirait de la porter sur la perpendiculaire BC au rayon vecteur FAB, puis de joindre son extrémité au point A : la ligne ainsi obtenue serait la vitesse du point A. Soit de même AD la vitesse de glissement du point A sur le rayon vecteur F'A ; en portant la vitesse d'entraînement correspondante sur la perpendiculaire DE au rayon vecteur F'A, et joignant son extrémité au point A, nous aurions encore la vitesse de ce point. L'extrémité de la ligne qui représente la vitesse du point A, devant se trouver à la fois sur BC et sur DE, sera donc le point G, où les deux lignes BC, DE se rencontrent ; et par conséquent AG sera cette vitesse. L'égalité des lignes AB, AD montre que la ligne AG, qui est la tangente à l'ellipse en A, divise l'angle BAD en deux parties égales.

§ 51. **Mouvements simultanés d'un solide.** — Si l'on rapporte les positions successives des différents points d'un solide en mouvement à des axes coordonnés qui se déplacent dans l'espace, on trouvera ainsi, non pas le mouvement absolu du solide, mais son mouvement relatif par rapport à ces axes mobiles. On peut regarder le solide comme animé à la fois de deux mouvements dont l'un est le mouvement relatif, dont nous venons de parler, et l'autre est le mouvement d'entrainement qu'il aurait s'il était lié invariablement aux axes mobiles. Le mouvement réel du solide s'obtiendra par la composition du mouvement relatif et du mouvement d'entrainement que nous substituons par la pensée à ce mouvement réel.

Nous avons fait usage de cette considération, qui consiste à regarder le mouvement réel d'un solide comme dû à la coexistence de deux autres mouvements, lorsque nous avons dit qu'une vis qui pénètre dans son écrou glisse le long de son axe et tourne en même temps autour de cet axe (§ 31).

Un solide peut d'ailleurs, comme un point, être regardé comme animé à la fois de trois, de quatre,...... mouvements distincts, dont la composition fournira toujours le mouvement réel du solide dans l'espace.

Nous allons voir comment on pourra composer entre eux les divers mouvements simultanés d'un solide, dans tous les cas possibles ; et pour cela, il nous suffira de nous occuper de la composition des mouvements élémentaires simultanés, puisqu'en appliquant les propositions que nous allons établir aux mouvements élémentaires qui se produisent pendant les éléments successifs du temps, on en déduira sans peine la composition des mouvements continus simultanés du solide, de quelque nature que soient ces mouvements.

§ 52. **Composition des mouvements élémentaires simultanés d'un solide**. — *Composition des translations.* — Si un solide est animé à la fois de deux mouvements élémentaires de translation, chacun de ses points décrira, en vertu du mouvement résultant, la diagonale du parallélogramme construit sur les chemins infiniment petits qu'il parcourrait en vertu de chacun des mouvements composants (§ 42). Mais tous les parallélogrammes construits ainsi, pour les divers points du solide, ont leurs côtés égaux et parallèles ; leurs diagonales seront donc

aussi égales et parallèles : donc le mouvement résultant du solide sera encore un mouvement de translation. On voit de plus que la vitesse du solide, dans ce mouvement résultant, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent les vitesses des mouvements composants.

Si un solide est animé d'un nombre quelconque de mouvements élémentaires de translation, son mouvement résultant sera encore un mouvement de translation ; et la vitesse de ce mouvement résultant se déduira des vitesses des mouvements composants, par la construction du polygone des vitesses (§ 43). Dans le cas où il n'y aura que trois mouvements composants, et où les vitesses de ces trois mouvements ne seront pas parallèles à un même plan, la construction du polygone des vitesses pourra être remplacée par celle du parallélipipède des vitesses (§ 44).

§ 53. *Composition d'une translation et d'une rotation.* — Considérons un solide animé à la fois d'une translation et d'une rotation autour d'un axe perpendiculaire à la direction de la translation. Soient O, *fig.* 31, la projection de l'axe autour duquel s'effectue la rotation dans le sens indiqué par la flèche a ; et AB la direction de la translation, dont le sens est indiqué par la flèche b. Désignons par ω la vitesse angulaire de la rotation et par v la vitesse de la translation ; ωdt sera l'angle dont le solide tourne autour de l'axe O, pendant le temps dt, et vdt sera la quantité dont il se déplace parallèlement à AB, en vertu de la translation, pendant le même temps.

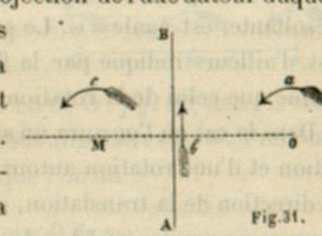


Fig. 31.

Abaissons du point O une perpendiculaire sur AB, et prenons sur cette perpendiculaire un point M tel que l'on ait

$$(v = \varphi \times \mathrm{OM}.) \quad v = \omega \times OM$$

Le point M s'abaisse au-dessous de OM, et perpendiculairement à cette ligne, d'une quantité $\omega td \times \mathrm{OM}$, pendant le temps td, en vertu de la rotation autour de l'axe O ; il s'élève en même temps, suivant la même direction d'une quantité vdt, en vertu de la translation : ces deux quantités étant égales, d'après la manière dont le point M a été choisi, il en résulte que ce point M reste immobile. On conclut immédiatement de là que le mouvement résultant du solide est une rotation autour d'un axe mené par le point M, parallèlement à l'axe O de la rotation composante. Pour trouver la vitesse angulaire avec laquelle s'effectue cette rotation résultante, nous observerons que le point O se déplace, pendant le temps dt, d'une quantité vdt, en vertu de la translation, et qu'il ne se déplace pas du tout en vertu de la rotation composante ; son déplacement total est vdt, et si nous le regardons comme dû à la rotation résultante, il nous suffira de le diviser par OM, pour avoir l'angle décrit pendant le temps dt en vertu de cette rotation : le quotient

$$\frac{vdt}{\mathrm{OM}}$$

étant égal à ωdt, d'après la relation qui nous a servi à déterminer OM, il s'ensuit que la vitesse angulaire, dans la rotation résultante, est égale à ω. Le sens de cette rotation résultante est d'ailleurs indiqué par la flèche c, c'est-à-dire qu'il est le même que celui de la rotation composante.

Dans le cas où l'on aura un solide animé à la fois d'une translation et d'une rotation autour d'un axe non perpendiculaire à la direction de la translation, on décomposera la translation en deux composantes (§§ 52 et 45), dont l'une soit parallèle à l'axe de la rotation, et dont l'autre lui soit perpendiculaire. On composera la seconde de ces translations composantes avec la rotation, ce qui donnera une rotation égale autour d'un axe parallèle au premier. Il restera alors une rotation, et une translation dirigée suivant l'axe de cette rotation, dont la coexistence équivaut à un mouvement hélicoïdal, tel que le mouvement d'une vis qui pénètre dans son écrou (§ 31).

Le mouvement hélicoïdal élémentaire d'un solide pouvant être regardé comme résultant de la composition d'une rotation

autour de l'axe instantané de rotation et de glissement du solide, et d'une translation le long de cet axe, il est facile d'en conclure l'expression de la vitesse d'un point quelconque du solide mobile. Si l'on désigne par v la vitesse de la translation, par ω la vitesse angulaire de la rotation, et par r la distance du point que l'on considère à l'axe instantané de rotation et de glissement, on aura

$$v \text{ et } \omega r$$

pour les deux composantes de la vitesse du point ; et comme ces deux composantes sont dirigées à angle droit l'une sur l'autre, la vitesse résultante a pour valeur

$$\sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}.$$

On voit par là que la vitesse d'un point du solide mobile est d'autant plus grande que ce point est plus éloigné de l'axe instantané de rotation et de glissement, et que cet axe est le lieu des points du solide dont la vitesse est minimum.

§ 54. *Composition des rotations autour d'axes parallèles.* — Supposons qu'un solide soit animé à la fois de deux rotations autour de deux axes parallèles projetés en O, O′, *fig.* 32, dans le sens des flèches a, a', et avec des vitesses angulaires ω, ω'. Prenons, sur la ligne OO′, un point M tel que l'on ait

Fig. 32.

$$\omega \times \mathrm{OM} = \omega' \times \mathrm{O'M}.$$

En vertu de la rotation ωdt autour de l'axe O, le point M s'abaisse au-dessous de OO′ d'une quantité $\omega dt \times \mathrm{OM}$; en vertu de la rotation $\omega' dt$ autour de l'axe O′, ce point M s'élève au-dessus de OO′ d'une quantité $\omega' dt \times \mathrm{O'M}$: ces deux déplacements simultanés étant égaux et directement opposés, il s'ensuit que le point M reste immobile. Donc le mouvement résultant est une rotation autour d'un axe qui passe par le point M, et qui est parallèle aux axes des rotations composantes. Cet axe de la rotation résultante, situé dans le plan des axes des