Lorsque deux solides se meuvent l'un par rapport à l'autre, et que leurs surfaces se touchent constamment par un point, le point de contact se déplace en général sur chacune de ces surfaces. Considérons le lieu géométrique des positions que ce point de contact occupe successivement sur la surface du premier solide, et aussi le lieu géométrique des positions qu'il occupe sur la surface du second solide. Si, dans le mouvement des deux solides l'un par rapport à l'autre, la première de ces deux courbes roule sur la seconde, conformément à la définition que nous venons de donner du roulement des courbes, on dit que le premier solide roule sur le second.

Deux solides peuvent se toucher à la fois par plus d'un point. S'il y a un nombre fini de points de contact isolés les uns des autres, il y aura roulement des deux solides l'un sur l'autre pour ceux de ces points de contact pour lesquels les conditions qui ont été indiquées dans le cas d'un seul point de contact seront remplies.

Dans le cas où deux solides se touchent par un nombre infini de points de contact, formant par leur ensemble ce qu'on nomme une ligne de contact, on dit qu'il y a roulement de l'un sur l'autre dans toute l'étendue de la ligne de contact, lorsque les choses se passent comme nous allons l'indiquer. Concevons qu'on ait tracé une courbe quelconque sur la surface du premier solide, de telle manière que cette courbe rencontre la ligne de contact du premier solide avec le second, dans les diverses positions qu'elle prend successivement sur ce premier solide. Concevons en outre que l'on ait marqué, sur la surface du second solide, la suite des points où cette surface est touchée successivement par la courbe que l'on a tracée sur la surface du premier ; cette suite de points de contact formera une autre courbe tracée sur la surface du second solide. Si, dans le mouvement du premier solide sur le second, les deux courbes dont nous venons de parler roulent l'une sur l'autre, de quelque manière que la première de ces courbes ait été tracée sur le solide correspondant, il y a roulement du premier solide sur le second, tout le long de leur ligne de contact.

§ 64. La définition que nous venons de donner du roulement d'une courbe sur une autre, ou d'un solide sur un autre, dans les divers cas qui peuvent se présenter, ne suppose en aucune manière que l'une des deux courbes, ou l'un des deux solides, est en repos. Le roulement est *absolu* ou *relatif*, suivant que l'une des deux courbes ou l'un des deux solides est immobile, ou bien que les deux courbes ou les deux solides se déplacent en même temps dans l'espace. Le roulement relatif peut d'ailleurs être ramené à un roulement absolu, par le moyen que nous avons indiqué pour ramener un mouvement relatif quelconque à un mouvement absolu (§ 62).

Lorsqu'une courbe mobile roule sur une courbe immobile, soit que ces courbes existent seules, soit qu'elles se trouvent tracées sur les surfaces de deux solides qui roulent l'un sur l'autre, il est clair que le point de contact des deux courbes, considéré comme appartenant à la courbe mobile, reste en repos pendant un intervalle de temps infiniment petit ; le mouvement élémentaire de la courbe mobile, ou du solide auquel elle appartient, doit donc être une rotation autour d'un axe passant par ce point de contact (§ 27). Il résulte de là que, si un solide en mouvement touche constamment un solide immobile par plusieurs points, et s'il y a roulement du premier solide sur le second en chacun de ces points de contact, le mouvement élémentaire du solide mobile est à chaque instant une rotation autour d'un axe passant par ses divers points de contact avec le solide immobile ; et que, par conséquent, tous ces points sont nécessairement en ligne droite. Dans le cas où le solide en mouvement touche le solide immobile en une infinité de points formant une ligne, il ne peut y avoir roulement du premier solide sur le second tout le long de leur ligne de contact, qu'autant que cette ligne est droite. Pour qu'un solide puisse ainsi rouler d'une manière continue, pendant un temps quelconque, sur un autre solide immobile, tout le long d'une ligne de contact de leurs surfaces, il est nécessaire que les surfaces de ces deux solides soient des surfaces *réglées*.

Ce résultat auquel nous venons de parvenir, pour le cas du roulement absolu d'un solide mobile sur un solide immobile dont il touche la surface en plusieurs points, est directement applicable au cas d'un roulement relatif; puisqu'un pareil roulement peut être ramené à un roulement absolu des mêmes solides se touchant successivement par les mêmes points.

§ 65. Toutes les fois que deux solides sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, sans que leurs surfaces cessent de se toucher, et que les conditions qui caractérisent le roulement (§ 63) ne sont pas remplies, on dit qu'il y a *glissement* de l'un des solides sur l'autre. Le glissement est *absolu* ou *relatif*, suivant qu'un seul des deux solides se meut dans l'espace, ou bien qu'ils sont tous deux en mouvement. Nous n'avons besoin de nous occuper que du glissement absolu, puisque le glissement relatif peut toujours être ramené à être un glissement absolu, par l'application de ce qui a été dit dans le paragraphe 62.

Il peut arriver que le contact de deux solides, que nous supposerons d'abord n'avoir lieu qu'en un point, reste toujours en un même point de la surface de l'un de ces solides, et qu'en même temps il se déplace sur la surface de l'autre. La quantité dont les points des deux surfaces, qui coïncidaient au commencement d'un mouvement élémentaire quelconque du solide mobile, se trouvent écartés l'un de l'autre à la fin de ce mouvement élémentaire, forme ce qu'on nomme le *glissement élémentaire*; la vitesse de celui de ces deux points qui appartient au solide mobile est la *vitesse de glissement*.

En général, le point de contact se déplace à la fois sur les surfaces des deux solides. Le glissement élémentaire est toujours la quantité dont les deux points qui coïncidaient se sont écartés en vertu d'un mouvement élémentaire du solide mobile, et la vitesse du glissement est toujours la vitesse de celui de ces deux points qui appartient au solide mobile; ce glissement élémentaire et la vitesse de glissement qui lui correspond sont toujours dirigés dans le plan tangent commun aux deux solides mené par leur point de contact.

Le mouvement du solide mobile peut se décomposer à chaque instant en un mouvement de rotation autour d'un axe passant par son point de contact avec le solide immobile, et un mouvement de translation : la vitesse de ce mouvement de translation est précisément la vitesse de glissement.

Le solide en mouvement peut toucher le solide immobile par plusieurs points isolés et en nombre fini, ou bien par une infinité de points formant une ligne ou même une surface de contact. Dans ce cas, on peut dire pour chacun de ces points ce que nous venons de dire du point de contact unique, dans le cas où nous supposions qu'il n'y en avait qu'un. Il y a un glissement élémentaire et une vitesse de glissement pour chacun de ces points de contact, et on les déterminera exactement de la même manière que si les solides ne se touchaient que par un point.

§ 66. **Application aux engrenages.** — Les engrenages sont des organes de machines destinés à transmettre le mouvement de rotation d'un arbre à un autre arbre. Ils se composent de roues garnies de dents sur tout leur contour, ou, suivant l'expression admise, de *roues dentées*, que l'on adapte aux arbres entre lesquels on veut établir cette communication de mouvement. Les dents de la roue montée sur le premier arbre pénètrent entre les dents de la roue que porte le second arbre, ou, en d'autres termes, les dents des deux roues *engrènent* les unes avec les autres; en sorte que l'un des deux arbres ne peut pas tourner sans que l'autre tourne en même temps.

On construit les dents des engrenages de telle manière que, si le mouvement de rotation de l'une des deux roues est uniforme, le mouvement qui en résulte pour l'autre roue soit aussi uniforme; ou bien, ce qui revient au même, de manière que le rapport des vitesses angulaires des deux roues reste constant, quel que soit le mouvemcnt de l'une d'elles.

Nous distinguerons les engrenages cylindriques qui servent à établir la communication du mouvement de rotation entre deux arbres de direction parallèles, et les engrenages coniques qui jouent le même rôle dans le cas de deux arbres dont les axes de rotation concourent en un même point.

§ 67. *Engrenages cylindriques.* — Soient O, O′, *fig.* 40, les projections des axes de deux arbres parallèles, sur un plan perpendiculaire à leur direction. Désignons par ω la vitesse angulaire de l'arbre O, et par ω' celle de l'arbre O'; nous supposerons que ces deux vitesses restent constantes pendant le mouvement. Divisons la distance OO', en deux parties OA, O'A telles que l'on ait

$$\frac{OA}{O'A}=\frac{\omega'}{\omega};$$

puis décrivons deux circonférences de cercle, des points O,O' comme centres, avec OA et O'A pour rayons : ces deux circonférences se nomment les *circonférences primitives* de l'engrenage.

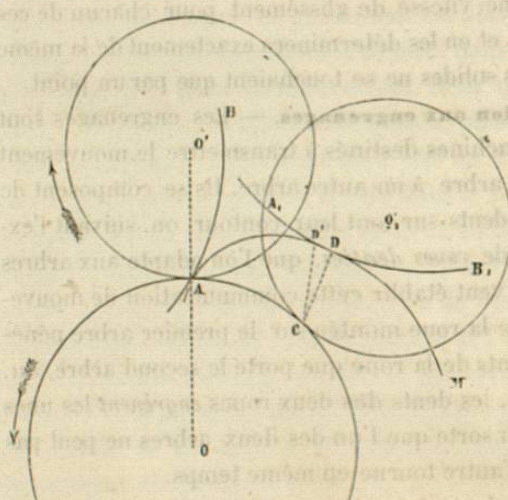

Fig. 40.

L'arc décrit pendant le temps *dt*, par un point de la circonférence OA, est égal à $\omega dt \times OA$; l'arc décrit dans le même temps par un point de la circonférence O'A est égal à $\omega' dt \times O'A$: donc ces deux arcs sont égaux, d'après la position que le point A occupe sur la ligne OO'. Ainsi l'engrenage doit être construit de manière qu'il passe en même temps des arcs égaux des deux circonférences primitives par la ligne des centres. On en conclut facilement que, pendant le mouvement des deux roues, les circonférences primitives roulent l'une sur l'autre (§ 63).

On adopte pour surfaces des dents des roues, des surfaces cylindriques ayant leurs génératrices parallèles aux axes des arbres; on n'a donc qu'à déterminer la forme des bases de ces

surfaces cylindriques, c'est-à-dire les profils des dents. Le profil des dents de l'une des deux roues peut être pris arbitrairement; celui des dents de l'autre roue s'en déduira par la condition que, le mouvement se transmettant par l'intermédiaire de ces dents, les circonférences primitives de l'engrenage roulent l'une sur l'autre.

Soit AB le profil d'une dent de la roue O'. Si l'on fait tourner les deux roues indépendamment l'une de l'autre, en leur donnant les vitesses angulaires ω, ω', le profil de la dent correspondante de la roue O devra rester constamment tangent à la courbe AB, tant que ces deux dents se trouveront dans des conditions convenables pour être en prise l'une avec l'autre, eu égard à leur longueur. Il en sera encore de même si, outre les mouvements de rotation isolés dont nous venons de parler, on donne à l'ensemble des deux roues un mouvement commun de rotation égal et contraire au mouvement de la roue O, afin de réduire cette roue O à l'état de repos, et de donner à la roue O' un mouvement absolu qui soit précisément le mouvement relatif qu'elle avait par rapport à la roue O (§ 62). Le mouvement que prendra ainsi la roue O' sera évidemment un roulement de la circonférence primitive O'A, sur la circonférence OA supposée immobile. Donc le profil ADM, que l'on doit donner à la dent de la roue O, est l'*enveloppe* des positions successives que prend la courbe AB, lorsqu'elle est entraînée par le cercle O'A, roulant sur le cercle OA.

Le cercle O'A, roulant, comme nous venons de le dire, sur le cercle OA qui reste immobile, et étant venu dans une position quelconque O'_1A_1 de manière à toucher le cercle OA en C, on obtient le point où la position correspondante A_1B_1 de la courbe AB touche son enveloppe, en abaissant du point C la normale CD sur A_1B_1. Car le cercle mobile, en continuant à rouler, tourne d'abord d'une quantité infiniment petite autour du centre instantané C. Soit DCD' l'angle dont il tourne ainsi : l'arc DD', de la courbe A_1B_1 peut être regardé comme un arc de cercle décrit du point C comme centre, avec CD pour rayon. Après la rotation infiniment petite dont nous parlons, le point D' de la courbe A_1B_1 sera donc venu en D ; et par suite, le point D est situé à la fois sur la courbe A_1B_1 et sur la position infiniment voisine qu'elle va prendre en tournant autour du point C : donc enfin le point D appartient à l'enveloppe, qui est le lieu géométrique des intersections successives de la courbe mobile AB.

Le profil des dents de la roue O étant déduit, comme nous venons de le dire, du profil adopté arbitrairement pour les dents de la roue O', considérons ces deux roues dans une position telle que les deux profils se touchent en un point quelconque M, *fig.* 41. D'après ce qui a été dit, la ligne AM est la normale commune aux deux profils en M. Le mouvement relatif de la roue O' par rapport à la roue O étant un mouvement de roulement du cercle OA sur le cercle OA', le mouvement relatif élementaire de cette roue O' sera une rotation infiniment petite autour du point A; dans ce mouvement élémentaire le profil EF adapté à la roue O' glisse d'une certaine quantité sur le profil GH adapté à la roue O : nous allons déterminer la valeur de ce glissement. La roue O tourne avec une vitesse angulaire ω, et la roue O avec une vitesse angulaire ω' ; lorsque nous donnons à l'ensemble des deux roues un mouvement égal et contraire au mouvement de la roue O, pour ramener celle-ci à l'état de repos, et faire prendre à la roue O' un mouvement absolu égal au mouvement relatif qu'elle avait d'abord, cette roue O' se trouve animée à la fois d'une vitesse angulaire ω autour de l'axe O, et d'une vitesse angulaire ω' de même sens que la précédente, autour de l'axe O' : ces deux rotations simultanées de la roue O', considérées pendant l'élément de temps dt, équivalent à une rotation unique autour d'un axe parallèle aux axes O,O', mené par

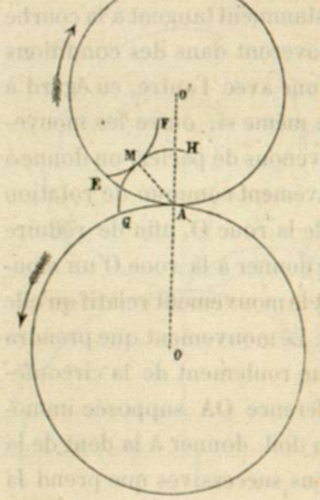

Fig. 41.

le point A, et la vitesse angulaire de cette rotation résultante est égale à $\omega + \omega'$ (§ 54). L'angle décrit par la roue O', pendant le temps dt, en vertu de son mouvement relatif, est donc $(\omega + \omega')\,dt$; et si nous désignons par p la longueur de la normale AM, nous aurons

$$p\,(\omega+\omega')\,dt$$

pour le déplacement relatif élémentaire du point M pris sur le profil EF, c'est-à-dire pour ce que nous nommons le glissement élémentaire (§ 65). Si nous désignons par ds l'arc infiniment petit de chacune des circonférences primitives qui passe par la ligne des centres pendant le temps dt, et par r, r', les rayons OA, O'A de ces circonférences, nous aurons

$$\omega dt=\frac{ds}{r},\qquad \omega' dt=\frac{ds}{r'},$$

et par suite l'expression du glissement élémentaire deviendra

$$p\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)ds.$$

§ 68. *Engrenages coniques.* — Dans le cas où les axes de rotation des deux arbres concourent vers un même point S, *fig.* 42, on détermine la forme des dents des roues qui doivent transmettre le mouvement de rotation de l'un de ces deux arbres à l'autre, par des considérations analogues à celles que nous venons de présenter pour le cas où les axes des deux arbres sont parallèles.

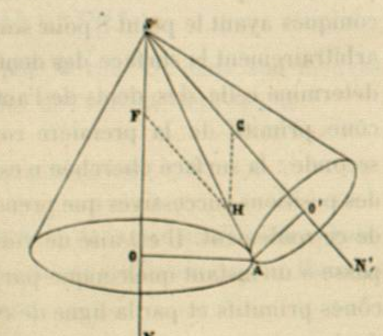

Fig. 42.

Soit encore ω la vitesse angulaire de l'arbre qui tourne autour de l'axe SN, et ω' celle de l'autre arbre, qui tourne autour de SN'.

Prenons, dans le plan NSN′, un point A tel que les distances OA, O′A de ce point aux axes SN, SN′ satisfassent à la condition

$$\frac{OA}{O'A}=\frac{\omega}{\omega'};$$

puis décrivons, des points O, O′ comme centres, dans les plans respectivement perpendiculaires aux axes SN, SN′, des circonférences de cercle ayant OA et O′A pour rayons. L'intersection des plans de ces deux cercles passe par le point A ; elle est perpendiculaire au plan NSN′, et par conséquent aux deux lignes OA, O′A : donc cette intersection est une tangente commune aux deux cercles en A. Si nous regardons les deux circonférences OA, O′A comme les bases de deux cônes ayant tous deux le point S pour sommet, ces deux cônes, qui se touchent le long de la génératrice AS, se nomment les *cônes primitifs* de l'engrenage.

Pendant le mouvement des deux arbres, les deux circonférences OA, O′A roulent l'une sur l'autre ; on le reconnaît exactement de la même manière que dans le cas des engrenages cylindriques. Les deux cônes primitifs roulent également l'un sur l'autre.

On prend pour surfaces des dents des deux roues des surfaces coniques ayant le point S pour sommet commun. Si l'on donne arbitrairement la surface des dents de l'une des deux roues, on détermine celle des dents de l'autre roue, en faisant rouler le cône primitif de la première roue sur le cône primitif de la seconde : la surface cherchée n'est autre chose que l'*enveloppe* des positions successives que prend la surface donnée, en vertu de ce roulement. Il est aisé de voir, en outre, que le plan qui passe à un instant quelconque par la ligne de contact des deux cônes primitifs et par la ligne de contact des surfaces coniques de deux dents, appartenant l'une à la première roue, l'autre à la seconde roue, est dirigé normalement à ces dernières surfaces, tout le long de leur ligne de contact.

Si l'on veut, à un instant quelconque, déterminer le glissement élémentaire des dents l'une sur l'autre, en un point M pris sur leur ligne de contact, on y arrivera encore comme dans le cas des engrenages cylindriques. Pour trouver le mouvement relatif élémentaire de la roue O′, par rapport à la roue O, pendant le temps dt, compté à partir de l'instant que l'on considère, appliquons à l'ensemble des deux roues O, O′, un mouvement commun égal et contraire au mouvement de la roue O : cette roue O sera réduite au repos, et la roue O′ sera animée à la fois d'une vitesse angulaire ω autour de l'axe SN, et d'une vitesse angulaire ω' autour de l'axe SN′. Mais ces deux rotations simultanées de la roue O équivalent à une rotation unique (§ 55) autour d'un axe que l'on reconnaîtra sans peine être dirigé suivant la ligne de contact SA des deux cônes primitifs ; et la vitesse angulaire Ω de cette rotation résultante sera représentée par la diagonale SH du parallélogramme SFGH, si les côtés SF, SG sont pris de manière à représenter les vitesses angulaires composantes ω, ω'. Si l'on désigne l'angle OSA par α, et l'angle O′SA par α', on a

$$SH = SF\cos\alpha + SG\cos\alpha';$$

on aura donc aussi

$$\Omega = \omega\cos\alpha + \omega'\cos\alpha.$$

D'après cela, l'angle décrit par la roue O′, dans son mouvement relatif élémentaire autour de l'axe SA, sera égal à

$$(\omega\cos\alpha + \omega'\cos\alpha')\,dt;$$

et si l'on désigne par p la longueur de la perpendiculaire abaissée du point M dont on veut évaluer le glissement sur l'axe de rotation instantané SA, on aura

$$p\,(\omega\cos\alpha + \omega'\cos\alpha')\,dt$$

pour le glissement élémentaire de ce point M. Désignons encore par ds l'arc infiniment petit de chacune des circonférences OA, O'A qui traverse le plan NSN' pendant le temps dt, et par r, r' les rayons OA, O'A de ces circonférences, et cette expression du glissement élémentaire du point M deviendra

$$p\left(\frac{1}{r}\cos\alpha+\frac{1}{r'}\cos\alpha'\right)ds.$$

Il est aisé de voir que l'expression analogue, trouvée dans le cas des engrenages cylindriques, n'est qu'un cas particulier de celle que nous venons d'obtenir : il suffit en effet de supposer α et α' nuls dans cette dernière expression, pour qu'elle devienne identique avec celle qui se rapporte aux engrenages cylindriques.

CHAPITRE IV

ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT D'UN POINT.

§ 69. **Accélération dans le mouvement rectiligne uniformément varié.** — Considérons un point se mouvant en ligne droite, d'un mouvement uniformément accéléré (§ 11). L'équation de ce mouvement est de la forme

$$s=a+bt+ct^2,$$

et la vitesse est donnée à un instant quelconque par la relation

$$v=b+2ct.$$

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, dans un pareil mouvement, la vitesse v s'accroît proportionnellement au temps t ; et $2c$ est la quantité dont elle s'accroît dans l'unité de temps.

On peut dire que $2c$ sert de mesure au degré plus ou moins grand de rapidité ou de lenteur avec lequel s'effectue l'accroissement de la vitesse dans le mouvement particulier dont on s'occupe. Cette quantité $2c$ est désignée sous le nom d'*accélération*. On voit qu'elle joue, relativement à la variation de la vitesse, dans le mouvement rectiligne uniformément accéléré, le rôle que joue la vitesse relativement à la variation de l'arc de trajectoire qui sépare le point mobile d'un point fixe de cette trajectoire, dans le mouvement uniforme (§ 6). Cette définition de l'accélération, établie en admettant implicitement que b et c sont tous deux positifs, s'applique, en général, quels que soient les signes de b et c ; c'est-à-dire que, dans le mouvement rec-