O'A qui traverse le plan NSN' pendant le temps dt, et par r, r' les rayons OA, O'A de ces circonférences, et cette expression du glissement élémentaire du point M deviendra

$$p\left(\frac{1}{r}\cos\alpha+\frac{1}{r'}\cos\alpha'\right)ds.$$

Il est aisé de voir que l'expression analogue, trouvée dans le cas des engrenages cylindriques, n'est qu'un cas particulier de celle que nous venons d'obtenir : il suffit en effet de supposer α et α' nuls dans cette dernière expression, pour qu'elle devienne identique avec celle qui se rapporte aux engrenages cylindriques.

CHAPITRE IV

ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT D'UN POINT.

§ 69. **Accélération dans le mouvement rectiligne uniformément varié.** — Considérons un point se mouvant en ligne droite, d'un mouvement uniformément accéléré (§ 11). L'équation de ce mouvement est de la forme

$$s=a+bt+ct^2,$$

et la vitesse est donnée à un instant quelconque par la relation

$$v=b+2ct.$$

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, dans un pareil mouvement, la vitesse v s'accroît proportionnellement au temps t ; et $2c$ est la quantité dont elle s'accroît dans l'unité de temps.

On peut dire que $2c$ sert de mesure au degré plus ou moins grand de rapidité ou de lenteur avec lequel s'effectue l'accroissement de la vitesse dans le mouvement particulier dont on s'occupe. Cette quantité $2c$ est désignée sous le nom d'*accélération*. On voit qu'elle joue, relativement à la variation de la vitesse, dans le mouvement rectiligne uniformément accéléré, le rôle que joue la vitesse relativement à la variation de l'arc de trajectoire qui sépare le point mobile d'un point fixe de cette trajectoire, dans le mouvement uniforme (§ 6). Cette définition de l'accélération, établie en admettant implicitement que b et c sont tous deux positifs, s'applique, en général, quelsque soient les signes de b et c ; c'est-à-dire que, dans le mouvement rectiligne uniformément varié quelconque, représenté également par l'équation ci-dessus, on désigne toujours $2c$ sous le nom d'accélération. On voit que l'accélération est positive ou négative en même temps que c.

Pendant un intervalle de temps infiniment petit dt, la vitesse v s'accroît de $2cdt$: c'est ce que nous nommerons l'*élément de vitesse acquise*, ou la *vitesse acquise élémentaire*, correspondant à ce temps infiniment petit. Il suffit, comme on voit, de diviser la vitesse acquise élémentaire par dt, pour avoir l'accélération.

§ 70. **Accélération dans le mouvement rectiligne varié en général.** — Nous avons vu (§ 8) par quelles considérations on est autorisé à regarder un mouvement varié quelconque comme étant la succession d'une infinité de mouvements uniformes dont chacun a lieu pendant un intervalle de temps infiniment petit. Des considérations entièrement analogues, appliquées au cas d'un mouvement rectiligne dans lequel la vitesse varie d'une manière quelconque d'un instant à un autre, nous permettront également de regarder le mouvement rectiligne varié en général, comme étant la succession d'une infinité de mouvements rectilignes uniformément variés, tous de même direction, dont chacun a lieu pendant un intervalle de temps infiniment petit.

Cela posé, on nomme accélération à un instant quelconque, dans un mouvement rectiligne varié, l'accélération du mouvement rectiligne uniformément varié qui forme un des éléments du mouvement rectiligne varié à l'instant que l'on considère.

Soit v la vitesse du mobile à la fin du temps t, et $v + dv$ ce que devient cette vitesse à la fin du temps $t + dt$, dv est la vitesse acquise par le mobile pendant l'élément du temps dt. Si nous regardons le mouvement comme uniformément varié pendant cet élément du temps, conformément à ce que nous venons de dire, nous n'aurons qu'à diviser la vitesse acquise élémentaire dv par le temps dt, pour avoir l'accélération à la fin du temps t ; en sorte que, si nous désignons cette accélération par j, nous aurons

$$j = \frac{dv}{dt}.$$

Si le mouvement rectiligne varié a pour équation

$$s = f(t),$$

on en déduit

$$v = f'(t),$$

et par suite

$$j = f''(t).$$

§ 71. La loi de variation de la vitesse du mobile, dans le mouvement rectiligne varié, peut être représentée par une ligne courbe, de même que précédemment nous avons représenté par une courbe la loi de variation de la distance qui sépare le mobile d'un point fixe de sa trajectoire (§ 5). Il suffit en effet, pour cela, de représenter un temps quelconque t par une certaine ligne dont la longueur lui soit proportionnelle, et de regarder cette ligne et celle qui représente la vitesse correspondante v du mobile, comme étant l'abscisse et l'ordonnée d'un point, rapportées à un système d'axes coordonnés rectangulaires. La forme de la courbe, dont les différents points correspondent ainsi aux divers systèmes de valeurs de t et de v, donnera une idée nette de la manière dont la vitesse du mobile varie avec le temps.

Dans le cas du mouvement uniformément varié, la vitesse variant proportionnellement au temps, la courbe qui représente la loi de cette variation de la vitesse se réduit à une ligne droite AB, *fig.* 43. L'accélération, dans un pareil mouvement, étant la quantité dont la vitesse du mobile s'accroît dans l'unité de temps, on l'obtiendra par une construction analogue à celle qui nous a permis de trouver la vitesse dans le cas du mouvement uniforme dont la loi est également représentée par une ligne droite (§ 7). On mènera, par un point quelconque C, une ligne CD parallèle à l'axe OT et égale à la ligne que l'on a adoptée pour représenter l'unité de temps; puis, par le point D, on mènera une parallèle DE à l'axe OV, jusqu'à la rencontre de la ligne AB, en E : la longueur de la ligne DE fera connaître la quantité dont la vitesse s'accroît dans l'unité de temps, c'est-à-dire l'accélération. Il est à peine nécessaire d'ajouter que la construction que nous venons d'expliquer, en admettant implicitement que la vitesse augmente avec le temps, s'appliquerait également dans le cas où la vitesse irait en diminuant, c'est-à-dire où l'accélération serait négative.

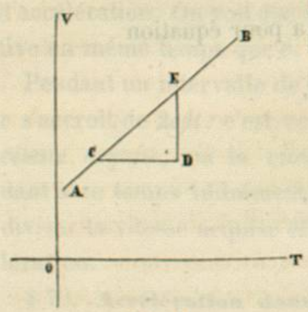

Fig. 43.

Lorsqu'un mouvement rectiligne n'est pas uniformément varié, la ligne qui représente la loi de variation de la vitesse du mobile n'est plus une ligne droite. Il est aisé de voir que la considération sur laquelle nous nous sommes appuyés pour définir l'accélération, et qui consiste à regarder le mouvement varié comme formé par la succession d'une infinité de mouvements uniformément variés ayant lieu chacun pendant un intervalle de temps infiniment petit, revient à regarder la courbe qui représente la loi de variation de la vitesse du mobile comme un polygone infinitésimal.

Soit C, *fig.* 44, le point de cette courbe qui correspond à une valeur quelconque t du temps. Le mouvement uniformément varié qui forme un des éléments du mouvement varié, à l'instant que nous considérons, est représenté par l'élément de la courbe AB correspondant au point C; et si ce mouvement uniformément varié se continuait pendant un temps quelconque, il serait représenté par le prolongement rectiligne de l'élément de courbe dont nous venons de parler, c'est-à-dire par la tangente CD. L'accélération

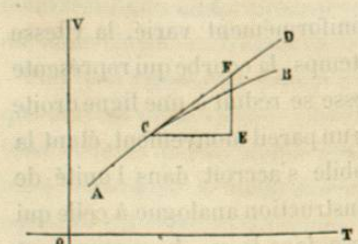

Fig. 44.

dans le mouvement varié à la fin du temps t, étant précisément l'accélération de ce mouvement uniformément varié (§ 70), nous en trouverons la valeur en opérant sur la tangente CD comme nous avons opéré il n'y a qu'un instant sur la ligne AB de la *fig.* 43. Traçons la ligne CE parallèle à OT et égale à la ligne qui représente l'unité de temps ; puis menons par le point E une parallèle EF à l'axe OV, jusqu'à la rencontre de la tangente CD : la longueur de la ligne EF nous fera connaître l'accélération dans le mouvement varié, à la fin du temps t.

§ 72. **Accélération dans le mouvement curviligne.** — Dans un mouvement rectiligne quelconque, la vitesse acquise élémentaire relative à l'élément du temps dt n'est autre chose que la vitesse infiniment petite qui, en se composant avec la vitesse du mobile à la fin du temps t, produit la vitesse qu'il possède à la fin du temps $t + dt$; c'est la vitesse qui lui a été communiquée pendant le temps infiniment petit dt. Dans le cas où le mouvement sera curviligne, nous nommerons encore *élément de vitesse acquise*, ou *vitesse acquise élémentaire*, la vitesse que le point mobile acquiert pendant le temps infiniment petit dt, c'est-à-dire la vitesse qui, en se composant avec la vitesse du mobile à la fin du temps t, produit celle dont il est animé à la fin du temps $t + dt$.

En outre, nous nommerons *accélération* du mobile, à la fin du temps t, la vitesse qu'acquerrait ce mobile pendant l'unité de temps, si, dans chacune des portions infiniment petites et égales dans lesquelles on peut concevoir que cette unité de temps soit partagée, il acquérait un élément de vitesse de même grandeur et de même direction que l'élément de vitesse qu'il acquiert réellement pendant le même temps infiniment petit à partir de la fin du temps t. Il est clair que l'accélération dans le mouvement rectiligne est comprise, comme cas particulier, dans l'accélération telle que nous la définissons pour le mouvement curviligne.

Il résulte de cette définition que l'accélération, à un instant quelconque, dans le cas général, est une vitesse finie, dont la direction et le sens sont les mêmes que la direction et le sens de la vitesse acquise élémentaire relative à cet instant; et que, de plus, pour avoir la grandeur de cette accélération, il suffit de diviser la vitesse acquise élémentaire par le temps infiniment petit dt qui lui correspond.

Dans le cas où le mouvement est rectiligne, la vitesse du mobile a toujours la même direction; la vitesse acquise élémentaire, et, par suite, l'accélération, auront donc aussi toujours la même direction, qui est celle du mouvement. Lorsque le mouvement est curviligne, il n'en est plus de même; la direction de l'accélération n'est pas connue immédiatement, comme dans le mouvement rectiligne. Aussi a-t-on à déterminer, dans chaque cas particulier, à la fois la grandeur et la direction de l'accélération : c'est ce qu'on fait en déterminant les grandeurs de deux composantes de cette accélération suivant des directions connues, ainsi que nous allons l'indiquer.

§ 73. **Accélération tangentielle, accélération centripète.** — Soit AB, *fig.* 45, la trajectoire du point mobile. Supposons qu'il se trouve en M à la fin du temps t et en M′ à la fin du temps $t + dt$. Par un point quelconque C menons une droite CD égale et parallèle à la vitesse v du mobile en M; puis une seconde droite CE égale et parallèle à la vitesse $v + dv$ qu'il possède en M′. La ligne DE est évidemment égale et parallèle à la vitesse qui, en se composant avec la vitesse v du mobile en M, produit la vitesse $v + dv$ du mobile en M′ : donc cette ligne DE est égale et parallèle à la vitesse acquise élémentaire correspondant à l'élément du temps que le mobile emploie à aller de M en M′. Il résulte de là que l'accélération du mobile, à la fin du temps t, est di-

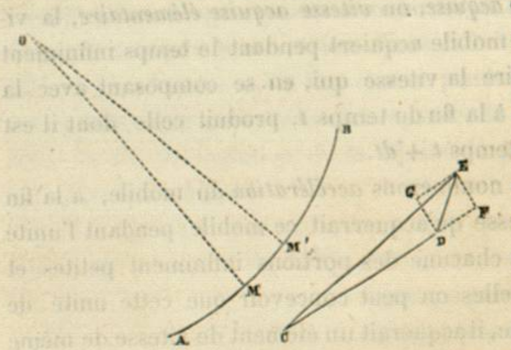

Fig. 45.

rigée suivant une parallèle à DE menée par le point M, et de plus, que la grandeur de cette accélération s'obtiendra en divisant DE par dt.

Si nous abaissons EF perpendiculaire sur CD, et que nous construisions le rectangle DFEG, nous pourrons regarder la vitesse infiniment petite DE comme résultant de la composition des vitesses DF, DG. Nous pouvons donc aussi regarder la vitesse acquise élémentaire du mobile en M, comme résultant de la composition de deux autres vitesses, dont l'une, égale à DF, est dirigée suivant la tangente à la trajectoire en M, et l'autre, égale à DG, est dirigée suivant une perpendiculaire à cette tangente menée dans le plan osculateur de la courbe, c'est-à-dire suivant le rayon de courbure MO. En divisant ces deux composantes de la vitesse acquise élémentaire par dt, on aura les grandeurs des deux composantes de l'accélération suivant les mêmes directions.

La composante de l'accélération du mobile suivant la tangente à la trajectoire se nomme l'*accélération tangentielle*. Sa valeur s'obtient en divisant DF par dt; mais on a

$$\mathrm{DF} = (v + dv)\cos d\alpha - v,$$

en désignant par $d\alpha$ l'angle infiniment petit que forment entre elles les directions des vitesses v et $v + dv$, ou, ce qui revient au même, l'angle des tangentes à la trajectoire menées par les points M, M′; on a donc pour l'expression de l'accélération tangentielle

$$\frac{\mathrm{DF}}{dt} = \frac{(v + dv)\cos d\alpha - v}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{1}{2} v \frac{d\alpha}{dt} d\alpha,$$

quantité qui se réduit simplement à

$$\frac{dv}{dt}.$$

La vitesse v, qui est fournie par la relation (§ 9)

$$v = \frac{ds}{dt},$$

est positive ou négative, suivant qu'elle est dirigée dans le sens dans lequel on compte les distances positives sur la trajectoire, ou en sens contraire; il en est de même de l'accélération tangentielle, qui est également positive ou négative, suivant qu'elle est dans le sens des vitesses positives ou en sens contraire.

La composante de l'accélération suivant le rayon de courbure de la trajectoire se nomme l'*accélération centripète*. Elle est toujours dirigée de la courbe vers le centre de courbure O. Sa valeur s'obtient en divisant DG par dt, et comme on a

$$DG = (v + dv) \sin d\alpha,$$

il en résulte que l'accélération centripète est égale à

$$\frac{(v + dv) \sin d\alpha}{dt}$$

on simplement

$$v \frac{d\alpha}{dt}.$$

Observons maintenant que l'angle $d\alpha$ est égal à l'angle des normales qui joignent les deux points M, M' au centre de courbure O; en sorte que, si l'on désigne le rayon de courbure MO par ρ, on a

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{ds}{\rho dt} = \frac{v}{\rho}.$$

D'après cela, la valeur de l'accélération centripète devient

$$\frac{v^2}{\rho}.$$

Si l'on construit un parallélogramme sur l'accélération tangentielle $\frac{dv}{dt}$, et l'accélération centripète $\frac{v^2}{\rho}$, la diagonale de ce parallélogramme sera l'accélération j du mobile au point M, à laquelle on donne souvent le nom d'*accélération totale*, pour la distinguer de ses composantes.

Dans le cas du mouvement rectiligne, ρ est infini, l'accélération centripète est nulle, et l'accélération totale se réduit à sa composante tangentielle $\frac{dv}{dt}$. Dans le cas du mouvement curviligne uniforme, $\frac{dv}{dt}$ est nul, et l'accélération totale se réduit à sa composante normale $\frac{v^2}{\rho}$. Enfin, dans le cas du mouvement rectiligne uniforme, les deux composantes de l'accélération totale sont nulles, en sorte que l'accélération totale est aussi nulle.

Il est aisé de voir que, si l'on construit une courbe pour représenter la loi de variation de la vitesse d'un point mobile sur sa trajectoire curviligne, en opérant comme nous l'avons indiqué (§ 71) pour le cas d'un mouvement rectiligne, on pourra se servir de cette courbe pour trouver l'accélération tangentielle à un instant quelconque, exactement de la même manière qu'on s'en sert pour prouver l'accélération dans un mouvement rectiligne; puisque l'expression de l'accélération tangentielle dans le mouvement curviligne est la même que l'expression de l'accélération dans le mouvement rectiligne.

§ 74. **Accélération dans le mouvement projeté sur un plan fixe.** — Quand on projette le mouvement d'un point sur un plan fixe (§ 12), la vitesse de la projection est à chaque instant la projection de la vitesse du point dans l'espace. Imaginons donc que l'on ait construit, pour le mouvement que l'on projette, le triangle CDE, *fig.* 45, dans lequel les trois côtés CD, CE, DE sont respectivement égaux et parallèles à la vitesse v du mobile à la fin du temps t, à la vitesse $v + dv$ relative à la fin du temps $t + dt$, et à la vitesse acquise élémentaire correspondant à l'élément du temps dt. Si l'on projette ce triangle CDE sur un plan fixe, on aura un autre triangle que nous désignerons par *cde*. Dans ce triangle projeté, le côté *cd*, projection de CD, sera égal et parallèle à la vitesse de la projection du mobile sur le plan fixe à la fin du temps t; le côté *ce*, projection de CE, sera aussi égal et parallèle à la vitesse de la projection du mobile à la fin du temps $t + dt$: donc le troisième côté *de*, projection de DE, jouera, par rapport au mouvement projeté, exactement le même rôle que DE par rapport au mouvement de l'espace, c'est-à-dire que *de* sera égal et parallèle à la vitesse acquise élémentaire de la projection du mobile correspondant au temps infiniment petit *dt*. On en conclut de suite que l'accélération dans le mouvement projeté est la projection de l'accélération dans le mouvement de l'espace.

Il faut bien observer qu'il s'agit ici uniquement des accélérations totales, dans le mouvement que l'on projette, et dans la projection de ce mouvement. Si l'on construit le rectangle à l'aide duquel l'accélération totale du mouvement de l'espace se décompose en une accélération tangentielle et une accélération centripète, et que l'on projette ce rectangle sur le plan fixe, sa projection sera en général un parallélogramme dont les angles ne seront pas droits. La diagonale de ce parallélogramme représentera bien l'accélération totale dans le mouvement projeté, d'après ce que nous venons de démontrer; et ses côtés, dont l'un est dirigé suivant la tangente à la trajectoire du mouvement projeté, représenteront en même temps deux composantes de cette accélération ; mais ces composantes, qui ne sont pas rectangulaires, sont nécessairement différentes de l'accélération tangentielle et de l'accélération centripète, dans le mouvement projeté. Il ne serait donc pas vrai, en général, de dire que l'accélération tangentielle et l'accélération centripète, dans le mouvement projeté, sont respectivement les projections de l'accélération tangentielle et de l'accélération centripète dans le mouvement de l'espace.

§ 75. **Accélération dans le mouvement projeté sur une droite fixe.** — Lorsqu'on projette le mouvement d'un point sur une droite fixe (§ 13), la vitesse de la projection est encore, à chaque instant, la projection de la vitesse du point dans l'espace. Il nous sera facile d'en conclure, comme dans le cas précédent, que l'accélération dans le mouvement projeté est la projection de l'accélération dans le mouvement que l'on projette.

Pour cela, concevons encore que l'on ait construit, pour le mouvement du point dans l'espace, le triangle CDE de la *fig.* 45, dont nous venons déjà de nous servir, et supposons que l'on projette ce triangle sur la droite fixe sur laquelle on projette le mouvement du point. La projection du côté CE sera égale à la somme des projections des côtés CD, DE; et comme les projections de CD et de CE sont respectivement égales aux vitesses du point projeté, à la fin du temps t et à la fin du temps $t + dt$, il en résulte que la projection de DE sera égale à la différence de ces deux vitesses, c'est-à-dire que ce sera la vitesse acquise élémentaire du point projeté correspondant au temps infiniment petit *dt*. Donc la vitesse acquise élémentaire, dans le mouvement projeté, est la projection de la vitesse acquise élémentaire dans le mouvement de l'espace; et, par suite, l'accélération dans le mouvement projeté est la projection de l'accélération totale dans le mouvement que l'on projette.

§ 76. **Accélération dans le mouvement d'un point rapporté à un système de coordonnées rectilignes.** — Un point mobile étant rapporté à un système de coordonnées rectilignes, supposons que nous considérions à la fois le mouvement de ce point et les mouvements de ses projections sur les axes. Nous avons déjà vu (§§ 46 et 47) que la vitesse du mobile à un instant quelconque est la résultante des vitesses de ses projections sur les axes; il est aisé de voir qu'il en est de même pour les accélérations. En effet, d'après ce qui vient d'être démontré (§ 75), l'accélération du mouvement projeté sur un quelconque des axes est la projection de l'accélération totale du mouvement de l'espace : donc, si l'on mène, par la position qu'occupe le point mobile à un instant quelconque, des droites égales et parallèles aux accélérations des projections de ce point sur les axes, et que l'on construise sur ces droites un parallélogramme ou un parallélipipède, suivant qu'il y a deux axes ou qu'il y en a trois, la diagonale de ce parallélogramme ou de ce parallélipipède sera précisément l'accélération totale du point mobile dans l'espace. Ainsi, on peut dire que cette accélération totale du mobile est la résultante des accélérations de ses projections sur les axes coordonnés.

Il sera facile d'après cela de trouver l'accélération totale, dans le mouvement d'un point rapporté à deux ou trois axes coor-