donnés, lorsqu'on connaîtra les équations du mouvement. Dans le cas où le mouvement, s'effectuant dans un plan, sera rapporté à deux axes seulement, les équations du mouvement étant

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t),$$

les accélérations, dans le mouvement des projections du mobile sur les axes, auront pour valeur (§ 70)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f''(t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi''(t);$$

l'accélération totale du point mobile sera donc la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés, parallèles aux axes, seront respectivement égaux à ces deux quantités. Dans le cas où le mouvement sera rapporté à trois axes coordonnés, les équations du mouvement étant

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

les accélérations dans les mouvements projetés sur les axes seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f''(t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi''(t), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \psi''(t);$$

et par conséquent l'accélération totale du mobile dans l'espace sera la diagonale d'un parallélipipède construit sur trois droites parallèles aux axes et égales respectivement à ces trois quantités.

§ 77. Prenons pour exemple le mouvement circulaire et uniforme que nous avons déjà considéré (§ 14), et rapportons les positions successives du point mobile à deux axes coordonnés rectangulaires passant par le centre du cercle. Les équations de ce mouvement seront de la forme

$$x = r\cos\frac{vt}{r}, \quad y = r\sin\frac{vt}{r}.$$

On trouve d'abord pour les vitesses des projections du point mobile sur les axes

$$\frac{dx}{dt} = -v\sin\frac{vt}{r}, \quad \frac{dy}{dt} = v\cos\frac{vt}{r};$$

et l'on vérifie aisément que ces vitesses sont bien les projections de la vitesse v du mobile dirigée tangentiellement à la circonférence du cercle qu'il décrit. On trouve, en outre, pour les accélérations du mouvement de ces projections du mobile sur les axes,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{v^2}{r}\cos\frac{vt}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{v^2}{r}\sin\frac{vt}{r}.$$

Les valeurs de ces accélérations montrent que l'accélération totale du mobile à un instant quelconque est égale à $\frac{v^2}{r}$, et qu'elle est dirigée de la position qu'il occupe à cet instant vers le centre de sa trajectoire. C'est en effet ce qu'on devait trouver : car, en vertu de l'uniformité du mouvement sur la circonférence, l'accélération tangentielle est nulle; et par suite l'accélération totale se réduit à l'accélération centripète, qui, dans ce cas, a pour valeur $\frac{v^2}{r}$ (§ 73).

Considérons encore la projection orthogonale de ce mouvement circulaire et uniforme sur un plan quelconque. Si nous prenons pour axes coordonnés, dans le plan de projection, les axes de l'ellipse suivant laquelle se projette la trajectoire circulaire de l'espace, et si nous désignons par α l'angle que le plan de cette trajectoire circulaire fait avec le plan de projection, nous trouverons sans peine que les équations de ce mouvement sont de la forme

$$x = r\cos\frac{vt}{r}, \quad y = r\cos\alpha\sin\frac{vt}{r}.$$

Les accélérations, dans les projections de ce mouvement sur les axes coordonnés, auront donc pour valeurs

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{v^2}{r}\cos\frac{vt}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{v^2}{r}\cos\alpha\sin\frac{vt}{r}.$$

On voit que ces accélérations sont proportionnelles aux valeurs de x et y; d'où l'on conclut que l'accélération totale du mobile, dans le mouvement elliptique dont il s'agit, est dirigée de la position qu'occupe le mobile, vers le centre de l'ellipse qu'il décrit. De plus, la valeur de cette accélération totale est

$$\frac{v^2}{r}\sqrt{\cos^2\frac{vt}{r}+\cos^2\alpha\sin^2\frac{vt}{r}},$$

et par conséquent elle est proportionnelle à la distance qui sépare le mobile du centre de sa trajectoire elliptique, distance qui a pour expression

$$r\sqrt{\cos^2\frac{vt}{r}+\cos^2\alpha\sin^2\frac{vt}{r}}.$$

Ces résultats sont d'accord avec ce que nous avons démontré en général relativement à l'accélération dans un mouvement projeté sur un plan fixe (§ 74). Car l'accélération totale d'un mouvement circulaire et uniforme étant toujours dirigée de la position qu'occupe le mobile vers le centre du cercle qu'il décrit, et ayant constamment la même valeur, il s'ensuit nécessairement que l'accélération totale de la projection de ce mouvement sur un plan quelconque est toujours dirigée suivant la ligne qui joint le mobile projeté au centre de sa trajectoire elliptique, et que la valeur de cette accélération totale est proportionnelle à la longueur de la même ligne.

§ 78. **Détermination de l'accélération d'un point, d'après son déplacement dans l'espace.** — Soit AB, *fig.* 46, la trajectoire d'un point mobile, M la position du mobile à la fin du temps t, et MZ la direction de l'accélération totale à cet instant. Menons la tangente MX à la trajectoire, et une ligne MY non située dans le plan osculateur ZMX. Nous pouvons rapporter le mouvement du mobile aux trois axes coordonnés MX, MY, MZ. Désignons par θ le temps compté à partir de l'instant où le point

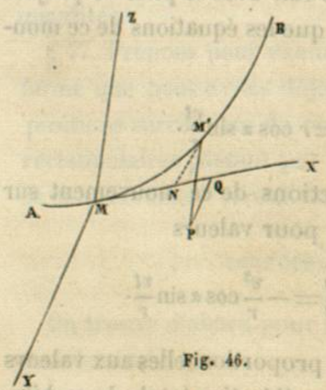


Fig. 46.

mobile se trouve en M, et supposons que ce temps soit assez petit pour que les valeurs des coordonnées x, y, z du mobile puissent se développer suivant ses puissances croissantes, entières et positives. Si nous représentons la vitesse du mobile en M par v, et son accélération totale par j, les valeurs de x, y, z, en fonction de θ, seront les suivantes :

$$\begin{aligned}
x &= v\theta + a\theta^3 + b\theta^4 + \ldots\ldots\ldots, \\
y &= a_1\theta^3 + b_1\theta^4 + \ldots\ldots\ldots, \\
z &= \tfrac{1}{2}j\theta^2 + a_2\theta^3 + b_2\theta^4 + \ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

car, pour $\theta = 0$, on doit avoir

$$\begin{aligned}
&x=0, && y=0, && z=0; \\
&\frac{dx}{d\theta}=v, && \frac{dy}{d\theta}=0, && \frac{dz}{d\theta}=0; \\
&\frac{d^2x}{d\theta^2}=0, && \frac{d^2y}{d\theta^2}=0, && \frac{d^2z}{d\theta^2}=j;
\end{aligned}$$

$a, b, \ldots, a_1, b_1, \ldots, a_2, b_2, \ldots$, sont d'ailleurs des quantités quelconques.

Soit M' la position qu'occupe le mobile à la fin du temps θ. Menons M'P parallèle à MZ, jusqu'à la rencontre du plan XMY, en P; et ensuite PQ parallèle à MY, jusqu'à la rencontre de l'axe MX en Q. Prenons enfin MN égal à $v\theta$. Nous pouvons regarder NM' comme étant la diagonale d'un parallélipipède qui aurait pour côtés NQ, QP et PM'. Portons, sur les directions des trois côtés et de la diagonale de ce parallélipipède qui partent du point N, des longueurs respectivement égales aux quotients de 2NQ, 2QP, 2PM', et 2NM' par θ^2; nous obtiendrons ainsi quatre lignes, dont la dernière sera également la diagonale du parallélipipède construit sur les trois premières. Nous allons chercher ce que devient la diagonale de ce dernier parallélipipède, lorsque le temps θ décroît indéfiniment jusqu'à zéro.

Il est aisé de voir que l'on a

$$\mathrm{NQ} = x - v\theta = \quad a\theta^3 + b\theta^4 + \ldots.,$$
$$\mathrm{QP} = y \quad = \quad a_1\theta^3 + b_1\theta^4 + \ldots.,$$
$$\mathrm{PM}' = z \quad = \tfrac{1}{2}j\theta^2 + a_2\theta^3 + b_2\theta^4 + \ldots.;$$

on a donc aussi

$$\frac{2\mathrm{NQ}}{\theta^2} = \quad 2a\,\theta + 2b\,\theta^2 + \ldots.,$$
$$\frac{2\mathrm{QP}}{\theta^2} = \quad 2a_1\theta + 2b_1\theta^2 + \ldots.,$$
$$\frac{2\mathrm{PM}'}{t^2} = j + 2a_2\theta + \theta 2b_2\theta^2 + \ldots..$$

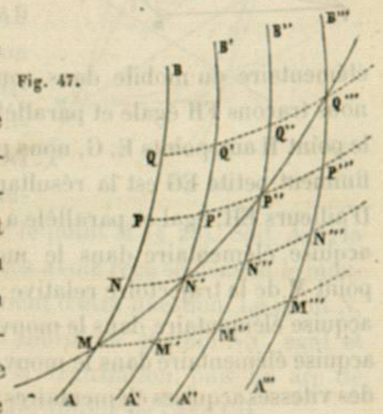
On voit par là que $\frac{2\mathrm{NQ}}{\theta^2}$ et $\frac{2\mathrm{QP}}{\theta^2}$ tendent indéfiniment vers zéro, en même temps que θ; tandis que la limite vers laquelle tend $\frac{2\mathrm{PM}'}{\theta^2}$ est l'accélération j. Ainsi, à mesure que θ décroît, la diagonale $\frac{2\mathrm{NM}'}{\theta^2}$ du second parallélipipède que nous avons considéré tend indéfiniment à se confondre avec le côté $\frac{2\mathrm{PM}'}{\theta^2}$, de ce parallélipipède; et à la limite, elle a la même grandeur et la même direction que ce côté, c'est-à-dire qu'elle se confond avec l'accélération totale du mobile au point M. C'est ce qu'on énonce simplement en disant que, si M et M′ sont les positions que le mobile occupe à la fin du temps t et à la fin du temps $t + dt$, et si MN est le chemin que ce mobile parcourrait uniformément sur la tangente MX pendant le temps dt, en vertu de la vitesse v qu'il possède à la fin du temps t, l'accélération totale de son mouvement est dirigée suivant la ligne NM′, et a pour valeur $\frac{2\mathrm{NM}'}{dt}$.

§ 79. **Accélération dans un mouvement composé.** — Quand on regarde le mouvement d'un point dans l'espace comme résultant de la composition de deux autres mouvements (§ 40), la vitesse du point à un instant quelconque se déduit très simplement des vitesses dont il est animé au même instant dans

chacun des mouvements composants (§ 42). Nous allons voir que l'on peut également trouver l'accélération totale dans le mouvement résultant, d'après la seule connaissance des circonstances que présentent les deux mouvements composants.

Considérons d'abord le cas où celui des deux mouvements composants que nous nommons mouvement d'entraînement est simplement un mouvement de translation; en sorte que, en vertu de ce mouvement, les divers points de la trajectoire relative AB, *fig.* 47, qui se transporte successivement en A′B′, A″B″, A‴B‴,.... sont animés à chaque instant de vitesses égales et parallèles. Si les positions AB, A′B′ de cette trajectoire correspondent aux instants qui terminent les temps t et $t + dt$, et si M et N sont les points où le mobile se trouve sur sa trajectoire relative aux mêmes instants, MN′ sera le déplacement absolu de ce mobile dans l'espace pendant le temps dt.

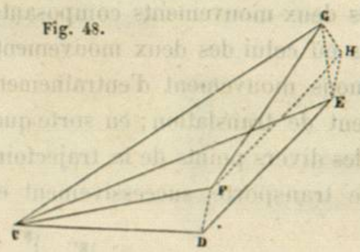
Fig. 47.



Soient v la vitesse absolue de ce mobile lorsqu'il est en M, et $v + dv$ sa vitesse lorsqu'il est en N′; v' la vitesse commune aux différents points de la trajectoire relative, à la fin du temps t, et $v' + dv'$ ce que devient cette vitesse, à la fin du temps $t + dt$; enfin v'' la vitesse du mobile sur sa trajectoire relative, lorsqu'il y occupe la position M, à la fin du temps t, et $v'' + dv''$ sa vitesse relative, lorsqu'il se trouve au point N de cette trajectoire relative, à la fin du temps $t + dt$. A la fin du temps t, la vitesse absolue v du mobile, qui est alors en M, est la résultante de la vitesse d'entraînement v' du point M, et de la vitesse relative v''. A la fin du temps $t + dt$, la vitesse absolue du mobile est de même la résultante de la vitesse d'entraînement $v' + dv'$ du point N′, et de la vitesse relative $v'' + dv''$.

Cela posé, menons par un point quelconque D, *fig.* 48, une droite CD égale et parallèle à la vitesse v' ; puis par le point D une droite DE égale et parallèle à la vitesse v'' : la ligne CE représentera la vitesse v en grandeur et en direction. Si d'un autre côté nous menons CF égale et parallèle à la vitesse $v' + dv'$, puis FG égale et parallèle à $v'' + dv''$, la ligne CG représentera la vitesse $v + dv$ en grandeur et en direction. La ligne EG sera donc égale et parallèle à la vitesse acquise élémentaire du mobile dans son mouvement absolu. Mais, si nous traçons FH égale et parallèle à DE, et que nous joignions le point H aux points E, G, nous pourrons dire que la vitesse infiniment petite EG est la résultante des deux vitesses EH, HG. D'ailleurs EH, égal et parallèle à DF, est évidemment la vitesse acquise élémentaire dans le mouvement d'entraînement du point M de la trajectoire relative ; et HG est de même la vitesse acquise élémentaire dans le mouvement relatif : donc la vitesse acquise élémentaire dans le mouvement absolu est la résultante des vitesses acquises élémentaires correspondantes dans le mouvement d'entraînement et dans le mouvement relatif. On en conclut nécessairement que l'accélération totale, dans le mouvement absolu, s'obtient en composant les accélérations totales dans le mouvement d'entraînement et dans le mouvement relatif, d'après la règle du parallélogramme des vitesses.

Fig. 48.



Si un point mobile est regardé comme animé à la fois de plus de deux mouvements, et que les divers mouvements composants qui jouent le rôle de mouvement d'entraînement (§ 41) soient tous des mouvements de translation, il est clair que l'accélération totale du mouvement résultant se trouvera en composant les accélérations totales des divers mouvements composants, d'après la règle du polygone des vitesses.

§ 80. Voyons maintenant comment l'accélération totale, dans le mouvement absolu d'un point que l'on regarde comme animé à la fois d'un mouvement d'entraînement et d'un mouvement re-

latif, peut se déduire des circonstances que présentent ces deux mouvements composants, dans le cas où le mouvement d'entraînement ne se réduit pas à une translation.

Considérons encore les deux positions AB, A′ B′, *fig.* 49, que la trajectoire relative du mobile occupe à la fin des temps t et $t + dt$, et supposons qu'aux mêmes instants le mobile se trouve aux points M, N de cette ligne. Nous savons que la courbe AB peut être amenée à la position A′B′ par un mouvement de translation égal au déplacement infiniment petit MM′ du point M, suivi d'un mouvement de rotation autour d'un axe CD passant par le point M′ (§ 28). Soit A_1B_1 la position qu'elle prend ainsi, après avoir reçu seulement le mouvement de translation dont il vient d'être question. Le point N, pour aller en N′, parcourra d'abord un chemin NN″ égal et parallèle à MM′, en vertu de la translation, puis un arc de cercle N_1N' en vertu de la rotation autour de l'axe CD.

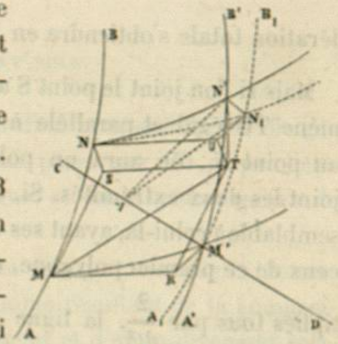


Fig. 49.

Menons en M la tangente à la trajectoire MM′ que décrit ce point M supposé lié invariablement aux axes mobiles, et aussi la tangente à la trajectoire relative AB du mobile que l'on considère ; puis portons sur ces tangentes des longueurs MR, MS respectivement égales aux produits de la vitesse d'entraînement v' du point M, et de la vitesse relative v'', par le temps dt, en sorte qu'on ait

$$MR = v'dt, \qquad MS = v''dt.$$

La diagonale MT du parallélogramme construit sur les lignes MR, MS, sera liée à la vitesse absolue v du mobile, par la relation de même forme

$$MT = vdt;$$

et, de plus, cette diagonale sera tangente en M à la trajectoire absolue de ce point mobile. Il suit de là que, si l'on joint le point T au point N' où le mobile se trouve réellement à la fin du temps $t+dt$, la ligne TN' aura la direction de l'accélération totale du mouvement absolu, et que la grandeur de cette accélération totale s'obtiendra en multipliant TN' par $\frac{2}{dt^2}$ (§ 78).

Mais si l'on joint le point S au point N, que par le point T on mène TU égal et parallèle à SN, puis qu'on joigne le point U au point N_1, on aura un polygone TUN_1N', dont la ligne TN joint les deux extrémités. Si, de plus, on imagine un polygone semblable à celui-là, ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de ce premier polygone, et égaux à ces mêmes côtés multipliés tous par $\frac{2}{dt^2}$, la ligne correspondante à TN' dans ce nouveau polygone sera précisément l'accélération totale j du mobile dans son mouvement absolu : donc cette accélération totale peut être regardée comme étant la résultante de trois accélérations dont les grandeurs sont

$$\frac{2TU}{dt^2}, \quad \frac{2UN_1}{dt^2}, \quad \frac{2N_1N'}{dt^2},$$

et dont les directions sont celles des lignes TU, UN_1, N_1N'.

Observons maintenant que, TU étant égal et parallèle à SN, la première de ces accélérations composantes est l'accélération totale j'' dans le mouvement relatif du mobile le long de la trajectoire AB; et que UN_1 étant évidemment égal et parallèle à RM', la seconde accélération composante est l'accélération totale j' dans le mouvement d'entraînement, c'est-à-dire dans le mouvement qu'aurait le point mobile s'il restait en repos relativement aux axes mobiles en M. Quant à la troisième accélération, nous en trouverons la valeur en remarquant que, si ω est la vitesse angulaire dans la rotation instantanée des axes mobiles autour de CD, et si V est le pied de la perpendiculaire abaissée du point N_1 sur cette ligne CD, on a

$$N_1N' = \omega dt \times N_1V;$$

et que d'ailleurs, si l'on nomme α l'angle formé par cette ligne

CD avec la direction du déplacement élémentaire $M'N_1$ dans le mouvement relatif, on a

$$N_1V = M'N_1 \sin\alpha = v''dt \times \sin\alpha;$$

on a donc

$$\frac{2N_1N'}{dt^2} = 2\omega v'' \sin\alpha.$$

De plus, cette troisième accélération composante est dirigée perpendiculairement au plan qui passe par CD et par l'élément $M'N_1$ de la trajectoire relative, et dans le sens qui va de N_1 à N'.

D'après tout cela, nous pouvons dire que, lorsque le mouvement d'un point est regardé comme résultant de la composition d'un mouvement d'entraînement et d'un mouvement relatif, on peut obtenir l'accélération totale de ce mouvement de la manière suivante. On imagine que le mouvement d'entraînement élémentaire des axes mobiles, à l'instant quelconque que l'on considère, soit décomposé en une rotation autour d'un axe instantané passant par le point où se trouve le mobile à cet instant, et en une translation égale au mouvement de ce même point supposé lié aux axes mobiles (§ 31) ; et l'on détermine la vitesse angulaire ω de cette rotation élémentaire, ainsi que l'angle α que l'axe instantané autour duquel elle s'effectue fait avec la direction de la vitesse relative v'' du mobile. Cela fait, on compose entre elles :

1° L'accélération d'entraînement j', c'est-à-dire l'accélération du mouvement dont serait animé le point mobile s'il restait en repos relatif dans la position où il se trouve ;

2° L'accélération relative j'', c'est-à-dire l'accélération dans le mouvement relatif du point par rapport aux axes mobiles ;

3° Enfin, une accélération égale à $2\omega v'' \sin\alpha$, dirigée perpendiculairement au plan qui passe par la vitesse relative v'' et par l'axe instantané de rotation des axes mobiles, et dans le sens dans lequel l'extrémité de la ligne qui représente la vitesse relative tourne dans la rotation instantanée autour de cet axe.

La composition de ces trois accélérations étant effectuée d'après la règle du polygone des vitesses, l'accélération résultante que l'on obtiendra sera l'accélération totale dans le mouvement absolu du point considéré.

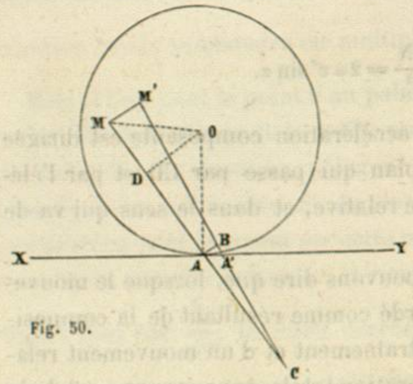


Fig. 50.

§ 81. Pour donner un exemple de l'application des théories précédentes, considérons un cercle qui se meut dans son plan en roulant uniformément sur une ligne droite XY, *fig.* 50, et cherchons l'accélération totale du mouvement dont est animé le point M lié au cercle mobile.

Pour passer de la position actuelle à une position infiniment voisine, le cercle va tourner autour du point de contact A, qui est son centre instantané de rotation. Soit ω la vitesse angulaire dont il est animé dans cette rotation instantanée ; ω est supposé constant. Désignons par r le rayon OA du cercle, par p la distance AM du point M au centre instantané A, et par α l'angle MAO. La vitesse v du point M est liée à la vitesse angulaire ω par la relation

$$v = p\omega.$$

Pendant le temps dt, le point M décrit un arc MM' égal à $p\omega dt$. En même temps le point O marche de $r\omega dt$; et, comme le point de contact A du cercle avec la droite se déplace précisément de la même quantité que le centre O du cercle, il en résulte que la distance AA' des deux positions successives de ce point de contact est égale à $r\omega dt$. Les deux lignes MA, M'A' sont deux normales infiniment voisines de la trajectoire du point M ; donc leur point de rencontre C est le centre de courbure de cette trajectoire. Si l'on décrit du point C comme centre, avec CA pour rayon, l'arc de cercle infiniment petit AB, on trouvera le rayon de courbure MC, ou ρ, au moyen de la proportion suivante :

$$\frac{\rho}{\rho - p} = \frac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{AB}} = \frac{p\omega dt}{r\omega \cos\alpha\, dt},$$

qui donne

$$\rho = \frac{p^2}{p - r\cos\alpha}.$$

D'après cela, on aura : 1° pour l'accélération tangentielle du point M,

$$\frac{dv}{dt} = \omega\frac{dp}{dt} = \omega\frac{\mathrm{BA'}}{dt} = \omega^2 r\sin\alpha = \omega^2 \times \mathrm{OD};$$

2° pour l'accélération centripète du même point,

$$\frac{v^2}{\rho} = \omega^2(p - r\cos\alpha) = \omega^2 \times \mathrm{MD}.$$

On en conclut facilement que l'accélération totale du point M est dirigée suivant MO, et qu'elle est égale à $\omega^2 \times \mathrm{MO}$.

Ce résultat simple peut être obtenu d'une autre manière, en observant que le mouvement du cercle qui roule équivaut à la coexistence d'un mouvement de rotation autour du point O avec la vitesse angulaire ω, et d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme de ce point O parallèlement à la droite XY avec la vitesse $r\omega$. Ce dernier mouvement étant considéré comme mouvement d'entraînement, et le premier comme mouvement relatif, l'accélération totale du point mobile M s'obtiendra par la composition des accélérations totales des mouvements composants (§ 79). Mais l'accélération dans ce mouvement d'entraînement est nulle, puisqu'il est rectiligne et uniforme : donc l'accélération totale dans le mouvement résultant se réduit à celle du mouvement de rotation autour du point O. Or, cette accélération du point M, dans sa rotation uniforme autour du point O, a pour valeur le carré de sa vitesse $\omega \times \mathrm{OM}$, divisé par le rayon OM du cercle qu'il décrit : donc elle est égale à $\omega^2 \times \mathrm{OM}$.