

LIVRE DEUXIÈME  
DYNAMIQUE

PREMIÈRE PARTIE

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

CHAPITRE PREMIER

MODE D'ACTION ET COMPOSITION DES FORCES APPLIQUÉES A UN  
POINT MATÉRIEL.

§ 82. **Ce qu'on entend par point matériel.** — Quand on parle du mouvement d'un corps, il arrive très souvent que l'on fait abstraction des dimensions de ce corps, et qu'on l'assimile à un simple point dans lequel toute sa matière serait condensée. C'est ainsi que, quand on dit qu'un boulet lancé dans l'espace décrit une ligne courbe, on conçoit implicitement que le boulet soit réduit à son centre; il en est encore de même de la terre et des planètes, quand on dit que ces corps décrivent des ellipses autour du soleil. Un pareil point, dans lequel on imagine que toute la matière d'un corps soit condensée, constitue ce que nous nommerons un *point matériel*. Il faut bien observer que la petitesse des dimensions du corps n'est nullement une condition nécessaire pour qu'on puisse le réduire, par la pensée, à un point matériel.



Nous allons entrer dans l'étude du mouvement des corps sous l'action des forces qui leur sont appliquées, en les supposant d'abord réduits à de simples points matériels ; c'est-à-dire que nous commencerons par faire abstraction de leurs dimensions. Ensuite, lorsque nous aurons acquis des notions nettes et précises sur la question du mouvement ainsi simplifiée, nous reviendrons à la réalité, en considérant les corps tels qu'ils existent dans la nature.

Nous retrouverons encore plusieurs fois, dans la suite, cette manière de procéder, qui consiste à faire abstraction tout d'abord d'une partie des circonstances qui compliquent les questions dont on s'occupe, et à les ramener ainsi à un certain état de simplicité idéale, pour les aborder ensuite dans toute leur réalité. Cette marche est indispensable pour que nous puissions attaquer la question si complexe du mouvement des corps naturels et arriver à la connaissance des lois d'après lesquelles ce mouvement s'effectue.

§ 83. PREMIER PRINCIPE. — **Inertie de la matière.** — Les lois de la dynamique n'ont pu être établies qu'en partant d'un certain nombre de *principes*, ou vérités fondamentales, dont la connaissance a été puisée dans l'observation des faits. Ces principes, qui sont au nombre de quatre, et que nous énoncerons successivement dans ce chapitre, ne sont pas d'une évidence absolue ; il a fallu des hommes de génie pour les démêler dans les phénomènes qui s'accomplissent sur la terre et dans l'univers. Aussi la vérité de ces principes ne peut-elle pas être reconnue d'une manière complète à priori ; on ne peut que faire concevoir leur existence, au moyen de certains exemples de phénomènes dans lesquels chacun d'eux se manifeste d'une manière spéciale. Mais leur exactitude est rendue incontestable par l'exactitude des conséquences qu'on en déduit au moyen d'une suite de raisonnements rigoureux. La plus grande preuve de cette exactitude se trouve dans l'accord des mouvements des corps célestes avec les lois théoriques de ces mouvements, obtenues en se fondant sur les principes dont il s'agit.

Le premier principe dont nous parlerons est celui qui est

connu sous le nom de *Principe de l'inertie de la matière*. En voici l'énoncé :

*Un point matériel ne peut passer de lui-même de l'état de repos à l'état de mouvement. Une fois en mouvement, il ne peut modifier de lui-même son état de mouvement ; en sorte que, si aucune cause extérieure n'agit sur lui, sa vitesse sera constamment la même en grandeur et en direction, c'est-à-dire que son mouvement sera rectiligne et uniforme.*

§ 84. **Forces.** — Pour qu'un point matériel passe de l'état de repos à l'état de mouvement, il faut qu'il soit soumis à l'action d'une certaine cause. Pour qu'un point matériel, déjà en mouvement, ne continue pas à se mouvoir uniformément et en ligne droite, il faut également qu'il soit soumis à l'action d'une certaine cause qui modifie les circonstances de son mouvement. Cette cause de mouvement ou de modification de mouvement, quelle qu'elle soit, on la nomme *force*.

Les mouvements que nous observons autour de nous, sur la terre, nous manifestent l'existence de diverses espèces de forces. La chute des corps que l'on abandonne à eux-mêmes, à une certaine distance au-dessus de la surface du sol, est due à l'action d'une force qu'on nomme la *pesanteur*. Lorsqu'on déforme une lame d'acier, et qu'ensuite on l'abandonne à elle-même, ses diverses parties prennent un mouvement de vibration, qui est produit par l'action de ce qu'on nomme les *forces moléculaires*. Les mouvements des corps électrisés ou aimantés, qui s'approchent ou s'éloignent les uns des autres, sont le résultat de l'action de certaines forces d'une nature particulière, qu'on nomme *forces électriques*, *forces magnétiques*. Les êtres animés, par la contraction de leurs muscles, peuvent exercer une action sur les corps qu'ils touchent, de manière à les mettre en mouvement ou à modifier le mouvement qu'ils possèdent déjà.

Une force appliquée à un point matériel ne détermine pas toujours le mouvement de ce point. Si un obstacle s'oppose à ce mouvement, la force donne lieu à une *pression* ou à une *tension*. L'action de la pesanteur sur un corps qui repose sur



une table détermine une pression exercée sur la table; si le corps est suspendu à une corde dont l'extrémité supérieure est fixe, cette action de la pesanteur détermine une tension de la corde. Ces deux exemples suffisent pour faire comprendre en général ce qu'on entend par la pression ou la tension résultant de l'action d'une force sur un point matériel qui ne peut pas céder à cette action.

§ 85. **Poids des corps.** — Lorsqu'un corps n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur, et qu'un obstacle l'empêche de tomber sous cette action, la pression ou la tension qui en résulte se nomme le *poids* du corps. Le poids d'un corps produit toujours une déformation de l'obstacle qui s'oppose à la chute du corps; cette déformation, qui est souvent insensible à l'œil, est quelquefois, au contraire, extrêmement marquée, comme par exemple dans le cas où le corps est suspendu à un appareil formé de lames de ressort présentant une certaine flexibilité. On comprend que la grandeur de la déformation produite par le poids d'un corps, dans un appareil de ce genre, peut servir à constater l'énergie de ce poids.

On dit que les poids de deux corps sont égaux, lorsque ces deux corps, suspendus successivement à un même appareil à ressort, le font fléchir d'une même quantité. Deux corps de même poids étant réunis ensemble pour ne former qu'un seul corps, on dit que le poids de ce corps unique est double de chacun des deux poids primitifs. De même, en réunissant ensemble trois, quatre, cinq,..... corps de même poids, on a un corps unique dont le poids est triple, quadruple, quintuple,..... de chacun des premiers.

On conçoit d'après cela qu'il suffit de choisir à volonté un corps A, dont on prendra le poids pour unité, pour pouvoir évaluer en nombre le poids d'un corps quelconque B. Car, au moyen de l'appareil à ressort, on pourra se procurer autant de corps que l'on voudra ayant tous même poids que le corps A; puis on pourra chercher combien on doit suspendre de ces corps ensemble au même appareil à ressort, pour déterminer la même déformation que le corps B suspendu seul à cet appareil : le

poids du corps B sera représenté par le nombre de ces corps que l'on aura dû suspendre ensemble pour produire sur l'appareil à ressort le même effet que le corps B seul.

On a adopté en France, pour unité de poids, le poids d'un centimètre cube d'eau pure, prise à la température de 4°, 1; et on lui a donné le nom de *gramme*. On se sert souvent aussi d'une autre unité de poids, le *kilogramme*, qui vaut mille grammes, et qui est par conséquent le poids d'un litre d'eau pure, prise à la température de 4°, 1. Le poids d'un corps quelconque peut s'évaluer en grammes ou en kilogrammes, par le moyen qui vient d'être indiqué.

§ 86. **Évaluation des forces en nombres.** — Il est naturel de prendre le poids d'un corps pour mesure de l'intensité de la force qui tend à faire tomber ce corps. La force de la pesanteur agissant sur un corps sera donc représentée par un certain nombre de grammes ou de kilogrammes.

Une force quelconque étant appliquée à un point matériel, et tendant à le mettre en mouvement, on conçoit qu'on peut s'opposer au mouvement du point en l'attachant à un appareil à ressort; cet appareil éprouvera une tension qui le fera fléchir d'une certaine quantité. La force que l'on considère pourra être regardée comme égale à l'action de la pesanteur sur le corps qui, étant suspendu à l'appareil à ressort, le fléchirait exactement de la même quantité : le poids de ce corps servira donc de mesure à la force. Ainsi, une force quelconque peut toujours être mesurée par un poids, et en conséquence évaluée en nombre au moyen de l'unité de poids. Le plus habituellement, c'est en kilogrammes que l'on évalue les intensités des forces.

Un appareil à ressort, destiné à comparer l'intensité d'une force à celle de l'action de la pesanteur sur un corps, par la déformation que ces forces lui font éprouver, se nomme en général un *dynamomètre*. Il en existe de diverses formes. Nous ne les décrirons pas ici. Nous nous contenterons d'avoir expliqué le principe de leur emploi, en ajoutant seulement qu'au moyen d'une graduation qu'on leur adapte ordinairement, on reconnaît de suite quelle est la valeur numérique d'une force



d'après la grandeur de la déformation que cette force a occasionnée.

L'observation indiquant que l'intensité de la pesanteur varie d'un point à un autre de la surface de la terre, le poids d'un litre d'eau pure n'est pas le même partout : ce poids ferait inégalement fléchir un même dynamomètre auquel on le suspendrait, si l'on faisait successivement l'expérience dans divers lieux. Pour que le kilogramme, que nous prenons pour unité de force, soit complètement défini, il est nécessaire d'ajouter dans quel lieu on en détermine la valeur ; on peut dire, par exemple, que le kilogramme est le poids d'un litre d'eau pure, à Paris, cette eau étant prise à la température de 4°, L. Un dynamomètre, gradué à Paris, de manière à faire connaître immédiatement la valeur d'une force en kilogrammes, pourra ensuite être employé dans un lieu quelconque, sans que l'unité de sa graduation cesse d'être exactement la même. On peut ajouter cependant que, dans les applications de la mécanique aux machines, on n'a pas besoin de se préoccuper de ce que le kilogramme n'aurait pas la même valeur, suivant qu'on le déterminerait en un lieu ou en un autre ; la différence est trop faible pour qu'elle puisse avoir la moindre importance dans ce cas.

§ 87. **Direction et sens d'une force.** — Lorsqu'une force agit sur un point matériel, on peut concevoir que l'on maintienne ce point en repos pendant quelque temps, puis qu'on l'abandonne en lui laissant la liberté de se mettre en mouvement sous l'action de la force, sans qu'aucun obstacle le gêne dans ce mouvement : la direction suivant laquelle il commencera à se déplacer est ce qu'on nomme la *direction de la force* à laquelle il est soumis. On regarde également la force comme agissant dans le *sens* dans lequel le point matériel se déplacera suivant cette direction.

§ 88. **DEUXIÈME PRINCIPE. — Égalité de l'action et de la réaction.** — Après avoir établi, dans ce qui précède, des notions générales sur l'intensité, la direction et le sens d'une force, nous sommes en mesure d'énoncer un deuxième principe de la dynamique, qui est connu sous le nom de *Principe de*

*l'égalité de l'action et de la réaction.* Voici en quoi il consiste :

*Toute force, appliquée à un point matériel A, émane d'un autre point matériel B situé à une distance quelconque du premier ; en même temps, le point B est soumis à l'action d'une autre force émanant du point A. Ces deux forces (action et réaction) sont égales entre elles, dirigées suivant la droite AB et en sens contraire l'une de l'autre.*

L'opposition de sens des deux forces auxquelles les deux points matériels A, B sont soumis, ne suppose rien sur le sens de chacune d'elles prise isolément. Il peut se faire que la force qui agit sur le point A tende à le rapprocher du point B ; et alors la force qui agit sur le point B tend également à le rapprocher du point A ; dans ce cas, les deux forces sont dites *attractives*. Si les deux forces agissent au contraire en tendant à éloigner les deux points A et B l'un de l'autre, on dit qu'elles sont *répulsives*.

§ 89. **TROISIÈME PRINCIPE. — Indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieurement acquis par le point matériel sur lequel elle agit.** — Après avoir été conduits à la définition des forces par le premier principe que nous avons énoncé (§ 83), et avoir établi par le second principe (§ 88) la manière dont elles existent dans la nature, il nous reste à poser les bases de leur mode d'action pour produire le mouvement des corps auxquels elles sont appliquées : tel est l'objet des deux autres principes que nous avons encore à énoncer. Le premier des deux consiste en ce que :

*L'effet produit par une force sur un point matériel est indépendant du mouvement antérieurement acquis par ce point.*

Pour bien comprendre la signification de ce principe, il faut concevoir que l'on rapporte les positions successives du point matériel dont on s'occupe, à un système d'axes animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, dans lequel la vitesse ait la même grandeur et la même direction que la



vitesse du point matériel à un instant quelconque de son mouvement. Si, à partir de cet instant, le point matériel n'était soumis à l'action d'aucune force, son mouvement serait rectiligne et uniforme, en vertu du principe de l'inertie; et en conséquence, il conserverait toujours la même position par rapport aux axes mobiles dont on vient de parler. Le nouveau principe qui vient d'être énoncé signifie que, sous l'action de la force qui lui est appliquée, le point matériel prend, par rapport aux axes mobiles, et à partir du même instant, un mouvement qui est exactement le même que le mouvement absolu que cette force lui communiquerait s'il partait du repos; en sorte qu'il suffira de composer ce mouvement du point par rapport aux axes mobiles, avec le mouvement des axes eux-mêmes, pour avoir le mouvement absolu du point matériel dans l'espace.

§ 90. **Mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force de grandeur et de direction constantes.** — Le principe de l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieurement acquis par le point matériel sur lequel elle agit, va nous permettre de déterminer immédiatement le mouvement que prend un point matériel sous l'action d'une force constante en grandeur et en direction. Considérons d'abord le cas où le point matériel se met en mouvement, sous l'action de cette force, sans avoir reçu de vitesse initiale.

Pour faciliter la recherche du mouvement produit par la force, concevons que le temps pendant lequel nous voulons étudier son action soit divisé en un nombre quelconque de parties égales; et supposons que la force, au lieu d'agir d'une manière continue, n'agisse que par intermittence, au commencement de chacun des intervalles de temps partiels dont nous venons de parler. Entre deux actions consécutives de cette force, le point matériel aura nécessairement un mouvement rectiligne et uniforme; et c'est la succession des mouvements de ce genre qu'il possédera après chacune des actions instantanées de la force, qui constituera son mouvement pendant un temps quelconque. Après la première de ces actions successives de la force, le point matériel est animé d'une certaine vitesse, dont la direc-

tion et le sens sont précisément la direction et le sens de la force elle-même (§ 87). Pour avoir la vitesse dont le point est animé après la seconde action de la force, il faut composer la vitesse qu'il possédait après la première action, avec une vitesse de même grandeur, de même direction et de même sens, produite par la nouvelle action qu'il a éprouvée de la part de la force: la résultante de ces deux vitesses sera double de chacune d'elles, et elle aura la même direction et le même sens que les composantes. On verra de même que, après une troisième action de la force, la vitesse du point matériel aura encore la même direction et le même sens qu'avant cette action, et que cette vitesse sera triple de celle dont il était animé après la première action de la force; et ainsi de suite. Le mouvement du point, pendant un temps quelconque, s'effectuera donc le long d'une ligne droite de même direction que la force, et dans le sens dans lequel elle agit: et la vitesse dont ce point sera animé à un instant quelconque sera proportionnelle au nombre total des actions qu'il aura éprouvées de la part de la force avant cet instant.

Si l'on conçoit que les intervalles de temps égaux compris entre les actions successives de la force deviennent de plus en plus petits, on se rapprochera de plus en plus du cas où la force agirait d'une manière continue, et le mouvement qui se produirait dans ce cas est évidemment la limite vers laquelle tend le mouvement que nous venons d'obtenir, lorsque ces intervalles de temps sont supposés décroître indéfiniment jusqu'à devenir nuls. Il résulte de là que, si un point matériel primitivement en repos est mis en mouvement par l'action d'une force constante en grandeur et en direction, la trajectoire du point sera une ligne droite de même direction que la force, et sa vitesse croîtra proportionnellement au temps compté à partir du commencement du mouvement; en un mot, ce mouvement sera *rectiligne et uniformément accéléré* (§ 11).

Désignons par  $j$  l'accélération de ce mouvement (§ 69), par  $t$  le temps compté à partir de l'instant où le point matériel se met en mouvement, et par  $x$  la distance comprise entre son point



de départ et la position qu'il occupe à la fin du temps  $t$ . L'équation du mouvement sera simplement

$$x = \frac{1}{2}jt^2,$$

car  $x$  et  $\frac{dx}{dt}$  doivent être nuls tous deux pour  $t = 0$ .

On trouve un exemple de ce mouvement dans la chute des corps pesants qu'on laisse tomber librement dans le vide, sans vitesse initiale. L'accélération étant désignée par  $g$ , dans ce cas, on a pour l'équation du mouvement

$$x = \frac{1}{2}gt^2.$$

L'expérience montre que ce mouvement s'effectue bien suivant la loi indiquée par la théorie. A Paris, l'accélération  $g$  a pour valeur

$$g = 9,8088,$$

le mètre étant pris pour unité de longueur, et la seconde de temps moyen pour unité de temps. Dans ce mouvement, la vitesse  $v$ , à un instant quelconque, a pour valeur

$$v = gt;$$

et si l'on élimine  $t$  entre cette équation et la précédente, on trouve

$$v^2 = 2gx,$$

relation qui permet de calculer la vitesse  $v$ , connaissant la hauteur de chute  $x$ , ou inversement.

§ 91. Supposons maintenant que le point matériel se mette en mouvement avec une certaine vitesse initiale  $v_0$  de même direction que la force qui lui est appliquée. Si cette vitesse initiale  $v_0$  est de même sens que la force, on obtiendra le mouvement du point matériel en composant le mouvement rectiligne et uniforme dont l'équation est

$$x = v_0t,$$

avec un mouvement rectiligne uniformément accéléré, de même direction et de même sens que le précédent, ayant pour équation

$$x = \frac{1}{2}jt^2.$$

Le mouvement résultant sera rectiligne; sa direction sera la même que celle de chacun des mouvements composants, et son équation sera

$$x = v_0t + \frac{1}{2}jt^2.$$

Le mouvement d'un point matériel, soumis à l'action d'une force constante en grandeur et en direction, et animé d'une vitesse initiale de même direction et de même sens que la force, est donc encore un mouvement rectiligne uniformément accéléré. La vitesse, qui a pour valeur

$$v = v_0 + jt,$$

est toujours dirigée dans le même sens, et va constamment en croissant.

Si la vitesse initiale  $v_0$  est dirigée en sens contraire de la force, on trouvera facilement, en opérant comme nous venons de le faire, que le mouvement du point matériel est encore rectiligne, et que sa distance  $x$  à son point de départ, comptée dans le sens de la vitesse  $v_0$ , est fournie par l'équation

$$x = v_0t - \frac{1}{2}jt^2.$$

La vitesse, à un instant quelconque, a pour valeur

$$v = v_0 - jt.$$

Elle est d'abord positive, et va en décroissant, jusqu'à devenir nulle pour

$$t = \frac{v_0}{j};$$

puis elle devient négative, et augmente dès lors indéfiniment. Le mouvement est donc d'abord dirigé dans le sens de la vitesse initiale  $v_0$ ; il se ralentit de plus en plus; puis il change de sens, et, à partir de là, il s'accélère constamment. Ce mouvement est uniformément varié; pendant quelque temps il est uniformément retardé, puis il devient uniformément accéléré, en changeant de sens.



Un corps pesant, lancé verticalement de haut en bas ou de bas en haut, se meut conformément à ce qui vient d'être dit; l'accélération  $g$  de son mouvement est la même que s'il n'avait pas reçu de vitesse initiale (§ 90). S'il est lancé de bas en haut avec une vitesse  $v_0$ , il monte jusqu'à ce que le temps  $t$  soit égal à  $\frac{v_0}{g}$ . En substituant cette valeur de  $t$  dans l'équation du mouvement, qui est

$$x = vt_0 - \frac{1}{2}gt^2,$$

on trouve pour la hauteur à laquelle il s'élève

$$x = \frac{v_0^2}{2g}.$$

On voit que cette hauteur est précisément celle dont il devrait tomber sans vitesse initiale, pour acquérir la vitesse  $v_0$  (§ 90).

§ 92. Considérons enfin le cas où le point matériel se met en mouvement, avec une vitesse initiale dirigée d'une manière quelconque relativement à la direction de la force qui agit sur lui. Soient  $O$ , *fig. 51*, le point de départ du mobile,  $OA$  la direction de sa vitesse initiale que nous désignerons toujours par  $v_0$ , et  $OB$  une ligne à laquelle la direction de la force reste constamment parallèle. D'après le principe du § 89, nous trouverons le mouvement qui se produit dans ces circonstances, en supposant que le mobile prenne sur la ligne  $OB$  le mouvement que la force lui communiquerait s'il n'avait pas de vitesse initiale, et qu'en même temps cette ligne se transporte parallèlement à elle-même, de manière que le point  $O$  parcoure uniformément la ligne  $OA$  avec la vitesse  $v_0$ . Si nous représentons toujours par  $j$  l'accélération du mouvement que

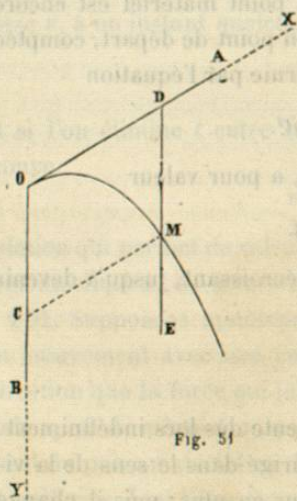


Fig. 51

la force communiquerait au point matériel, dans le cas où il se mouvrait sans vitesse initiale, nous aurons

$$\frac{1}{2}jt^2$$

pour la distance  $OC$  qu'il parcourra sur la ligne  $OB$ , pendant le temps  $t$ , compté à partir de l'instant où il commence à se mouvoir. Mais, pendant ce même temps, la ligne  $OB$  sera venue prendre la position  $DE$  tel que l'on ait

$$OD = v_0 t.$$

Si l'on prend, sur cette ligne  $DE$ , une longueur  $DM$  égale à  $OC$ , le point  $M$  ainsi obtenu sera la position qu'occupera réellement le point matériel à la fin du temps  $t$ .

On peut se faire une idée nette du mouvement qui se produit dans ces circonstances, en rapportant les positions successives du mobile à deux axes coordonnés  $OX$ ,  $OY$  dirigés suivant les lignes  $OA$  et  $OB$ . D'après ce qui vient d'être dit, les équations du mouvement sont :

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2}jt^2.$$

Si l'on élimine  $t$  entre ces deux équations, on trouve

$$y = \frac{j}{2v_0^2}x^2$$

pour l'équation de la trajectoire. Cette courbe est une parabole, dont l'axe est parallèle à l'axe des  $y$ , et qui est tangente à l'axe des  $x$ , au point  $O$ .

Le mouvement d'un corps pesant, lancé obliquement dans le vide, fournit un exemple du mouvement parabolique auquel nous venons de parvenir.

§ 93. QUATRIÈME PRINCIPE. — **Indépendance des effets des forces qui agissent simultanément sur un même point matériel.** — Le dernier principe que nous avons à énoncer se rapporte à la manière dont un point matériel se met en mouvement, lorsqu'il est soumis à la fois à l'action de plusieurs forces. Voici en quoi il consiste :

*Lorsque plusieurs forces agissent simultanément sur un même*