CHAPITRE II

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL LIBRE.

§ 104. **Équilibre d'un point matériel.** — Lorsqu'un point matériel, que nous supposerons primitivement en repos, vient à être soumis aux actions simultanées de diverses forces, il peut arriver que ces forces se contre-balancent mutuellement, de telle manière qu'il reste en repos malgré l'action des forces. Dans ce cas, on dit que *le point matériel est en équilibre* : on dit aussi que *les forces se font équilibre* sur le point matériel.

Il est aisé de voir à quelle condition les forces doivent satisfaire, pour que le point matériel sur lequel elles agissent soit en équilibre. Ces forces, quelles que soient leurs grandeurs et leurs directions, peuvent être remplacées par leur résultante (§ 99). Le point matériel, soumis à l'action de cette résultante seule, doit donc rester à l'état de repos, tout aussi bien que lorsqu'il est soumis aux actions simultanées des composantes. Or, cela ne peut évidemment avoir lieu qu'autant que la résultante est nulle : donc, pour qu'un point matériel soit en équilibre sous l'action de plusieurs forces, il faut que la résultante de ces forces soit nulle. D'ailleurs, il est bien clair que cette condition est suffisante pour que le point matériel, primitivement en repos, ne se mette pas en mouvement sous l'action des forces qui lui sont appliquées, puisque ces forces peuvent toujours être remplacées par leur résultante, et que, celle-ci étant

nulle, le point matériel se trouve dans le même cas que s'il n'était soumis à l'action d'aucune force.

Si plusieurs forces, agissant sur un point matériel en mouvement, ont une résultante nulle, on dit encore qu'elles se font équilibre. Dans le cas où le point matériel serait soumis à ces forces seules, il se trouverait dans les mêmes conditions que si aucune force ne lui était appliquée, et par suite son mouvement serait rectiligne et uniforme.

Lorsque plusieurs forces appliquées à un même point matériel se font équilibre, il est clair qu'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.

Soient F, F′, F″,... diverses forces qui agissent sur un même point matériel. Menons, par un point quelconque de l'espace, trois axes coordonnés rectangulaires, et décomposons chacune des forces F, F′, F″,... en trois composantes dirigées parallèlement à ces axes. Soient X, Y, Z, les composantes de la force F; X′, Y′, Z′, les composantes de la force F′, etc. La projection de la résultante des forces F, F′, F″,... sur l'axe des x (§ 100) est égale à

$$X + X' + X'' + \ldots\ldots\ldots, \text{ ou } \Sigma X;$$

de même les projections de cette résultante sur les axes des y et des z sont respectivement

$$Y + Y' + Y'' + \ldots\ldots\ldots, \text{ ou } \Sigma Y,$$
$$Z + Z' + Z'' + \ldots\ldots\ldots, \text{ ou } \Sigma Z.$$

Il est clair que, pour que les forces F, F′, F″... se fassent équilibre, c'est-à-dire pour que leur résultante soit nulle, il est nécessaire et suffisant que les projections de cette résultante sur les axes soient nulles toutes trois : l'équilibre des forces F, F′, F″... se trouve donc exprimé par les équations

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0.$$

§ 105. **Mouvement rectiligne d'un point matériel.** — Dans ce qui suit, nous allons étudier les lois du mouvement que prend un point matériel sous l'action d'une ou de plusieurs forces. Mais, les diverses forces qui agissent simultanément sur un même point matériel pouvant toujours être remplacées par leur résultante, nous n'avons pas besoin de nous préoccuper de l'existence de ces diverses forces, et nous pouvons raisonner, dans tous les cas, comme si le mouvement du point mobile était dû à l'action d'une force unique.

Si un point matériel, partant du repos, est soumis à l'action d'une force dont la direction reste constamment la même, il se mouvra suivant une ligne droite. Il en sera encore de même si ce point matériel a reçu une vitesse initiale dont la direction coïncide avec celle de la force qui lui est appliquée. C'est ce qu'on reconnaîtra sans peine, en raisonnant comme nous l'avons déjà fait dans le cas où la force est constante en grandeur et en direction (§§ 90 et 91).

De quelque manière que varie la force qui agit sur le point matériel, si l'on désigne par m la masse de ce point, par j l'accélération de son mouvement à un instant quelconque, et par F la valeur de la force à cet instant, on aura toujours la relation (§ 98)

$$F = mj.$$

La connaissance de la loi de variation de la force F entraîne donc celle de la loi de variation de l'accélération j, ce qui permet de déterminer la loi du mouvement.

Soient t le temps compté à partir d'un instant quelconque pris pour origine; x la distance du point mobile à un point fixe de sa trajectoire rectiligne, à la fin du temps t; et v la vitesse de ce point au même instant. On a

$$v = \frac{dx}{dt}, \qquad j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

L'accélération j, ainsi obtenue, est positive ou négative en même temps que l'accroissement de vitesse infiniment petit dv correspondant à l'élément de temps dt. Il est aisé de voir que, quel que soit le signe de v, ou de $\frac{dx}{dt}$, la vitesse acquise élémentaire dv est positive ou négative, suivant qu'elle est dirigée dans le sens des x positifs ou dans le sens des x négatifs; et par suite il en est de même de l'accélération j. On voit donc que la relation

$$F = mj,$$

qui a été établie (§ 98), en ne considérant que les valeurs absolues de j et de F, subsistera encore quand on prendra j avec son signe, à la condition de regarder la force F comme positive ou négative suivant qu'elle agira dans le sens des x positifs ou bien dans le sens opposé.

En remplaçant j par sa valeur $\frac{d^2x}{dt^2}$ dans cette dernière relation, on trouve

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F,$$

qui n'est autre chose que l'équation différentielle du mouvement du point. L'intégration de cette équation différentielle fera connaître l'équation finie du mouvement. Les constantes arbitraires se détermineront d'après les circonstances initiales, c'est-à-dire d'après les valeurs de la distance x du mobile au point fixe, et de sa vitesse $\frac{dx}{dt}$, correspondant à $t = 0$.

§ 106. La force F varie, en général, avec t, et par conséquent aussi avec les quantités x et v; on conçoit qu'elle sera généralement donnée en fonction de ces trois variables, t, x, v. L'intégration de l'équation différentielle du mouvement s'effectuera alors en suivant une marche plus ou moins complexe, qui dépendra de la forme de cette fonction, et en tenant compte, en même temps, de la relation

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Nous nous contenterons ici d'indiquer la marche à suivre pour faire cette intégration, lorsque la force F sera donnée en fonction d'une seule des trois variables t, x, v. Nous aurons pour cela à examiner trois cas distincts.

1[er] cas. — La valeur de F est donnée par la relation

$$F = f(t).$$

L'équation différentielle du mouvement est donc

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t).$$

Si l'on multiplie les deux membres par $\frac{dt}{m}$, et qu'on intègre, on trouve

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m}\int_0^t f(t)\,dt,$$

v_0 étant la vitesse du mobile correspondant à $t = 0$. Représentons par $\varphi(t)$ cette valeur de $\frac{dx}{dt}$, en sorte que nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t).$$

En multipliant les deux membres par dt, et intégrant de nouveau, on aura définitivement

$$x = x_0 + \int_0^t \varphi(t)\,dt$$

pour l'équation du mouvement; x_0 désigne la valeur de x correspondant à $t = 0$.

2[e] cas. — On donne

$$F = f(x).$$

L'équation différentielle qu'il s'agit d'intégrer est donc alors

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x).$$

Si nous remplaçons $\frac{d^2x}{dt^2}$ par $\frac{dv}{dt}$, cette équation deviendra

$$m\frac{dv}{dt} = f(x).$$

Multiplions le second membre par $\frac{2dx}{m}$ et le premier membre par son égal $\frac{2vdt}{m}$, et nous aurons

$$2v\,dv = \frac{2}{m}f(x)\,dx;$$

d'où en intégrant

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx;$$

v_0 et x_0 désignent, comme précédemment, les valeurs de v et de x qui correspondent à $t = 0$. On tire de cette équation une valeur de v que nous représenterons par

$$v = \varphi(x);$$

en y remplaçant v par $\frac{dx}{dt}$, puis résolvant par rapport à dt, on trouve

$$dt = \frac{dx}{\varphi(x)};$$

on a donc, en intégrant encore une fois,

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

3[e] cas. — On donne

$$F = f(v).$$

L'équation différentielle du mouvement est dans ce cas

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(v),$$

ou ce qui est la même chose

$$m\frac{dv}{dt} = f(v).$$

On en tire

$$dt = m\frac{dv}{f(v)},$$

d'où en intégrant

$$t = m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)}.$$

Si l'on résout cette équation par rapport à v, ce qui donnera

$$v = \varphi(t),$$

et qu'on observe que l'on a

$$v = \frac{dx}{dt},$$

on en déduira

$$x = x_0 + \int_0^t \varphi(t)\,dt.$$

Mais on peut aussi remplacer cette dernière opération par la suivante : la relation

$$dx = v dt$$

donne, dans le cas dont il s'agit,

$$dx = m\frac{vdv}{f(v)},$$

d'où l'on tire, en intégrant

$$x = x + m\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{f(v)};$$

il suffit alors d'éliminer v, entre cette dernière équation et la relation entre v et t qui résulte de la première intégration, pour avoir la relation cherchée entre x et t.

§ 107. **Exemples de mouvements rectilignes.** — Nous allons appliquer ce qui précède à deux exemples.

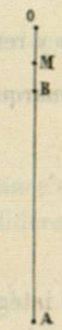

Fig. 56.

Considérons d'abord le mouvement d'un point matériel qui part du point O, *fig.* 56, sans vitesse initiale, sous l'action d'une force dirigée suivant la ligne OA et variant en raison inverse du carré de la distance du point mobile au point A de cette ligne. Nous verrons plus tard que le poids d'un corps, placé successivement à différentes hauteurs au-dessus de la surface de la terre, varie sensiblement en raison inverse du carré de la distance qui le sépare du centre du globe terrestre ; en sorte que l'exemple que nous allons traiter peut être regardé comme se rapportant au mouvement d'un corps pesant qu'on laisserait tomber d'une certaine hauteur au-dessus de la surface de la terre, sans vitesse initiale, et dans le vide, pour ne pas avoir à tenir compte de la résistance de l'air. Nous supposerons donc que A est le centre de la terre, et que la force qui agit sur le point matériel n'est autre chose que son poids. Soit B le point où la ligne OA perce la surface de la terre : lorsque le mobile est en ce point, son poids est égal à mg (§ 98). Le poids du mobile, en un point quelconque M de la droite suivant laquelle il se meut, aura pour expression

$$mg\frac{r^2}{(a-x)^2},$$

en désignant par x la distance OM, par a la distance OA, et par r le rayon AB de la terre. D'après cela, l'équation différentielle du mouvement sera

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\frac{r^2}{(a-x)^2}.$$

Nous nous trouvons ici dans le second des trois cas qui ont été traités dans le paragraphe 106. En opérant comme nous l'avons dit, en observant que la vitesse initiale v_0 est nulle par hypothèse, ainsi que la distance initiale x_0 du mobile au point O, nous trouverons d'abord

$$v^2 = \frac{2gr^2}{a} \times \frac{x}{a-x}.$$

En y remplaçant v par $\frac{dx}{dt}$, puis résolvant par rapport à dt, et remarquant que dx et dt sont de même signe, nous aurons

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}} \times \frac{a-x}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}} \times \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\,dx + \frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{2g}} \times \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

En intégrant de nouveau, et tenant compte de ce que x est nul en même temps que t, nous obtiendrons enfin l'équation finie du mouvement, qui est

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\arccos\frac{a-2x}{a}.$$

§ 108. Considérons encore le mouvement rectiligne d'un point matériel soumis aux actions simultanées de deux forces, dont l'une est constante en grandeur et en direction, et dont l'autre, toujours dirigée en sens contraire du mouvement, varie proportionnellement au carré de la vitesse du mobile. C'est le cas d'un corps pesant qui se meut dans l'air, en supposant que le poids du corps soit constant, et que la résistance qu'il éprouve de la part de l'air varie proportionnellement au carré de sa vitesse. Nous supposerons donc que la force constante qui agit sur le point matériel soit son poids mg, et nous représenterons l'autre force, qui sera la résistance de l'air, par $mg\,\frac{v^2}{k^2}$, v étant la vitesse du mobile à un instant quelconque, et k étant la valeur particulière de cette vitesse pour laquelle la seconde force devient égale à la première.

Examinons d'abord le cas où le corps dont nous nous occupons commence à se mouvoir sans vitesse initiale. Son mouvement s'effectue suivant la verticale menée par son point de départ, et de haut en bas ; la résistance qu'il éprouve de la part de l'air est donc dirigée verticalement et de bas en haut, c'est-à-dire en sens

contraire de l'action de la pesanteur. Ce corps se meut comme s'il était soumis à l'action de la résultante de son poids mg et de la résistance de l'air $mg\,\frac{v^2}{k^2}$, résultante qui est évidemment égale à

$$mg - mg\,\frac{v^2}{k^2}.$$

D'après cela, on voit que, si l'on désigne par x la distance du mobile à son point de départ, on aura pour l'équation différentielle du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right),$$

équation qui rentre dans le troisième cas du § 106. Si nous y remplaçons $\frac{d^2x}{dt^2}$ par son égal $\frac{dv}{dt}$, et que nous résolvions ensuite par rapport à dt, nous trouverons

$$dt = \frac{k^2}{g} \times \frac{dv}{k^2 - v^2} = \frac{k}{2g}\left(\frac{dv}{k+v} + \frac{dv}{k-v}\right);$$

d'où, en intégrant et observant que la vitesse initiale est nulle,

$$t = \frac{k}{2g}\,l\cdot\frac{k+v}{k-v}.$$

Cette équation, résolue par rapport à v, donne

$$v = k\,\frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1};$$

e désigne la base du système de logarithmes népérien. Si l'on remplace v par $\frac{dx}{dt}$, et qu'on multiplie les deux membres de l'équation par dt, on trouvera

$$dx = k\,\frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}\,dt = k\,\frac{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}\,dt;$$

d'où, en intégrant de nouveau, et déterminant la constante de manière que x soit nul pour $t=0$,

$$x=\frac{k^2}{g}\,l.\left(\frac{e^{\frac{gt}{k}}+e^{-\frac{gt}{k}}}{2}\right).$$

La valeur de v pouvant se mettre sous la forme

$$v=k\frac{1-e^{-\frac{2gt}{k}}}{1+e^{-\frac{2gt}{k}}},$$

on voit que la vitesse du mobile augmente constamment, sans cependant jamais dépasser la vitesse k; elle s'approche indéfiniment de cette limite k, et ne lui devient égale que lorsque t est infini.

Voyons maintenant comment s'effectue le mouvement du corps sous l'action des mêmes forces, lorsqu'il a été primitivement lancé verticalement, et de bas en haut, avec une vitesse v_0. Ce corps commence par s'élever verticalement; sa vitesse diminue peu à peu; bientôt il cesse de monter pour se mettre en mouvement en sens contraire suivant la même droite, en prenant une vitesse de plus en plus grande. Pendant que le corps monte, la résistance qu'il éprouve de la part de l'air est dirigée de haut en bas, de même que l'action de la pesanteur; la résultante des deux forces auxquelles il est soumis est donc égale à

$$mg+mg\frac{v^2}{k^2}.$$

Si nous désignons encore par x la distance du mobile à son point de départ, et si nous remarquons que la force résultante dont nous venons de donner la valeur est dirigée en sens contraire du sens dans lequel se compte cette distance x, nous verrons que l'équation différentielle du mouvement ascendant du mobile est la suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g\left(1+\frac{v^2}{k^2}\right):$$

nous sommes donc encore dans le troisième cas du paragraphe 106. Si nous remplaçons $\frac{d^2x}{dt^2}$ par $\frac{dv}{dt}$, et que nous résolvions par rapport à dt, nous trouverons

$$dt=-\frac{k^2}{g}\times\frac{dv}{k^2+v^2};$$

d'où, en intégrant et observant que, pour $t=0$, on doit avoir $v=v_0$,

$$t=\frac{k}{g}\,\text{arc tang}\,\frac{v_0}{k}-\frac{k}{g}\,\text{arc tang}\,\frac{v}{k}=\frac{k}{g}\,\text{arc tang}\,\frac{kv_0-kv}{k^2+vv_0}.$$

Cette équation étant résolue par rapport à v nous donnera

$$v=k\frac{v_0\cos\frac{gt}{k}-k\sin\frac{gt}{k}}{k\cos\frac{gt}{k}+v_0\sin\frac{gt}{k}}.$$

Mettant $\frac{dx}{dt}$ à la place de v, multipliant de part et d'autre par dt, intégrant et déterminant la constante par la condition que pour $t=0$ on ait $x=0$, nous trouverons

$$x=\frac{k^2}{g}\,l.\left(\cos\frac{gt}{k}+\frac{v_0}{k}\sin\frac{gt}{k}\right).$$

Telle est l'équation finie du mouvement ascendant que nous nous étions proposé de déterminer. Le mobile se mouvra conformément à cette équation, tant que sa vitesse sera dirigée de bas en haut, c'est-à-dire tant que t sera inférieur à la valeur pour laquelle l'expression précédente de la vitesse v s'annule. Mais quand t aura atteint cette valeur particulière qui est

$$t=\frac{k}{g}\,\text{arc tang}\,\frac{v_0}{k},$$

le mobile cessera de s'élever, et alors il redescendra, en se mouvant suivant la loi que nous avons trouvée précédemment, pour le cas d'un corps qui tombe dans l'air sans vitesse initiale.

La question qui vient d'être traitée dans tout ce paragraphe nous fournit un exemple d'un mouvement dans lequel la force n'est pas toujours représentée par la même expression analytique.

§ 109. **Mouvement curviligne d'un point matériel.** — Si la direction de la force qui agit sur un point matériel ne reste pas constamment la même, ou bien si, cette direction étant constante, le mobile a reçu une vitesse initiale dirigée autrement que la force qui agit sur lui, le mouvement est curviligne.

Il est aisé de reconnaitre que le mouvement s'effectue dans un plan : 1° lorsque la force qui agit sur le point matériel reste constamment parallèle à un plan fixe, et que sa vitesse initiale est également parallèle à ce plan ; 2° lorsque la force est toujours dirigée vers un point fixe, quelle que soit d'ailleurs la direction de la vitesse initiale du mobile. Pour s'en rendre compte, il suffit de substituer à l'action continue de la force une action intermittente, comme nous l'avons déjà fait (§ 90), et d'examiner successivement les divers changements de direction que la vitesse du mobile éprouve chaque fois que la force exerce son action sur lui. En appliquant le principe du § 89, on reconnait que les vitesses dont le mobile est animé, avant et après chacune de ces actions de la force, sont dirigées dans un plan passant par la direction de la force même. Il s'ensuit que, dans chacun des deux cas indiqués ci-dessus, et dans l'hypothèse d'une force agissant par intermittence, le mobile parcourt un polygone qui se trouve situé tout entier dans un plan. Si l'on se rapproche ensuite peu à peu de la réalité, en admettant que les actions successives de la force soient de plus en plus rapprochées les unes des autres, on voit que les côtés de la trajectoire polygonale du mobile deviennent de plus en plus petits, sans que le polygone cesse d'être contenu tout entier dans un même plan, et à la limite, lorsque l'action intermittente de la force se confond avec une action continue, la trajectoire polygonale devient une trajectoire courbe dont tous les points se trouvent encore dans un même plan.

D'après ce qui a été dit précédemment (§§ 95 et 98), de quelque manière que la force F qui agit sur le point matériel change de grandeur et de direction avec le temps, l'accélération totale du mouvement du point est à chaque instant dirigée suivant la direction de la force; et la grandeur de cette accélération totale est liée à la valeur de la force F par la relation

$$F = mj,$$

m étant la masse du point matériel dont il s'agit.

§ 110. **Force tangentielle, force centripète.** — Si l'on décompose l'accélération totale j, dans le mouvement du point matériel soumis à l'action de la force F, en deux composantes dirigées, l'une suivant la tangente à la trajectoire du mobile, l'autre suivant son rayon de courbure, on trouve deux accélérations dont les valeurs sont

$$\frac{dv}{dt}, \qquad \frac{v^2}{\rho},$$

et que nous avons désignées précédemment sous les noms d'accélération tangentielle et d'accélération centripète (§ 73). Décomposons de même la force F en deux composantes F_1, F_2, dirigées suivant les mêmes droites. Le parallélogramme qui servira à faire cette décomposition sera évidemment semblable à celui qui sert à faire la décomposition de l'accélération totale ; puisque les directions des côtés et des diagonales de ces deux parallélogrammes sont les mêmes : donc il existera, entre les deux composantes F_1, F_2 de la force F, et les composantes correspondantes de l'accélération totale j, le même rapport qu'entre la force F elle-même et cette accélération totale. Ainsi on aura

$$F_1 = m\frac{dv}{dt}, \qquad F_2 = m\frac{v^2}{\rho}.$$

La force F_1, qui est la projection de la force F sur la tangente à la trajectoire du mobile, se nomme la *force tangentielle*. La force F_2, projection de la force F sur la direction du rayon de courbure de cette trajectoire, se nomme la *force centripète*.

D'après les valeurs que nous venons de trouver pour ces deux composantes de la force F, on voit que le changement de grandeur que la vitesse du mobile éprouve avec le temps est uniquement dû à la force tangentielle ; en sorte que, si cette force tangentielle était constamment nulle, c'est-à-dire si la force F était toujours normale à la trajectoire, la vitesse du mobile ne varierait pas, et le mouvement serait uniforme. De même le changement de direction de la vitesse du mobile est uniquement dû à la force centripète ; c'est-à-dire que, si la force F était à chaque instant dirigée suivant la direction de la vitesse du mobile, ou, en d'autres termes, suivant la tangente à la trajectoire qu'il décrit, cette trajectoire serait nécessairement une ligne droite.

§ 111. **Projection du mouvement sur un plan fixe.** — Lorsqu'un point matériel se meut dans l'espace, en vertu d'une vitesse initiale, et sous l'action d'une force qui lui est appliquée, il est souvent utile d'étudier la projection de son mouvement sur un plan fixe. Nous avons déjà vu que la vitesse et l'accélération totale dans le mouvement projeté sont les projections de la vitesse et de l'accélération totale du mobile dans l'espace (§§ 12 et 74). Si nous tenons compte maintenant de la liaison qui existe entre la force qui agit sur un point matériel et l'accélération totale du mouvement de ce point, nous arriverons à une conséquence importante.

Soient F la force qui agit sur le point matériel, m la masse de ce point, et j l'accélération de son mouvement ; nous savons que F et j ont la même direction, et qu'en outre on a

$$F = mj.$$

Si F' et j' sont les projections de F et de j sur un plan fixe, ces deux projections seront dirigées suivant une même droite, et de plus le rapport de F' à F sera le même que celui de j' à j : donc on aura aussi

$$F' = mj'.$$

On en conclut nécessairement que le mouvement du mobile, projeté sur le plan fixe, n'est autre chose que le mouvement que prendrait dans ce plan un point matériel de masse m, sous l'action de la force projetée F', ce point ayant reçu une vitesse

initiale égale à la projection de la vitesse initiale du mobile de l'espace.

Cette proposition est vraie de quelque manière que les lignes projetantes soient dirigées par rapport au plan de projection.

§ 112. **Projection du mouvement sur une droite fixe.** — Ce que nous venons de dire pour la projection d'un mouvement sur un plan fixe, nous pouvons le répéter pour la projection de ce mouvement sur une droite fixe.

Nous savons déjà que la vitesse et l'accélération dans le mouvement projeté sont les projections de la vitesse et de l'accélération totale dans le mouvement que l'on projette (§§ 13 et 75). En raisonnant comme nous l'avons fait il n'y a qu'un instant (§ 111), nous trouverons en outre que le mouvement projeté est précisément celui que prendrait sur la droite fixe un point matériel de même masse que celui qui se meut dans l'espace, s'il était constamment soumis à l'action de la force projetée, et qu'il eût reçu primitivement une vitesse égale à la projection de la vitesse initiale du mobile de l'espace.

Ce résultat est vrai, de quelque manière que s'effectue la projection du mouvement sur la droite fixe, et convient en particulier au cas où la projection est orthogonale.

§ 113. **Théorèmes relatifs aux quantités de mouvement.** — Dans le mouvement rectiligne d'un point matériel de masse m soumis à l'action d'une force F, on a

$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

puisque l'accélération j a pour valeur $\frac{dv}{dt}$. Si l'on multiplie les deux membres de cette relation par dt, on trouve

$$mdv = Fdt,$$

d'où, en intégrant entre les limites 0 et t du temps, et désignant par v_0 la valeur de v correspondant à $t = 0$:

$$mv - mv_0 = \int_0^t Fdt.$$