Le produit mv se nomme la *quantité de mouvement* du mobile. L'intégrale $\int_0^t Fdt$ se nomme l'*impulsion* de la force F, pendant le temps auquel cette intégrale se rapporte ; Fdt est *l'impulsion élémentaire* de la force. Les deux dernières équations qui viennent d'être inscrites peuvent donc s'énoncer de la manière suivante : 1° l'accroissement (mdv) qu'éprouve la quantité de mouvement du mobile pendant l'élément dt du temps, est égal à l'impulsion élémentaire de la force F pendant ce temps ; 2° l'accomplissement total ($mv - mv_0$) de la quantité de mouvement du mobile pendant un temps fini quelconque t, est égal à l'impulsion de la force F pendant ce temps t.

Si l'on considère un point matériel se mouvant d'une manière quelconque dans l'espace, et qu'on projette son mouvement sur une droite fixe, on peut appliquer au mouvement projeté ce qui vient d'être dit d'un mouvement rectiligne. Ainsi l'accroissement qu'éprouve la quantité de mouvement projetée, pendant un intervalle de temps quelconque, infiniment petit ou fini, est toujours égal à l'impulsion de la force projetée pendant le même intervalle de temps. Nous entendons ici par quantité de mouvement projetée, à un instant quelconque, le produit de la masse du mobile par la projection de la vitesse dont il est animé à cet instant.

Dans le cas d'un mouvement curviligne, la force tangentielle étant désignée par F_1, on a (§ 110)

$$m\frac{dv}{dt} = F_1.$$

Cette relation nous conduit aux deux suivantes :

$$mdv = F_1 dt, \qquad mv - mv_0 = \int_0^t F_1 dt.$$

On peut donc dire encore, dans ce cas, que l'accroissement de la quantité de mouvement du point matériel, pendant un temps quelconque infiniment petit ou fini, est égal à l'impulsion de la force tangentielle pendant ce temps.

L'intégrale $\int_0^t Fdt$, à laquelle nous donnons le nom d'impulsion de la force F, peut se calculer rigoureusement, ou bien se déterminer approximativement à l'aide des méthodes de quadrature, lorsque la force F est connue en fonction du temps t. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire lorsque F est donné en fonction de certaines quantités qui sont des fonctions inconnues du temps t, telles que la vitesse du mobile, sa distance à un point fixe, etc., on ne peut plus trouver *à priori* la valeur de l'intégrale $\int_0^t Fdt$; ce n'est qu'après qu'on aura trouvé les lois du mouvement, que la force F pourra être exprimée explicitement en fonction de t, et qu'on sera en mesure de calculer l'intégrale $\int_0^t Fdt$; mais cette intégrale n'en doit pas moins être considérée tout d'abord comme ayant une valeur entièrement déterminée, et cela lors même que des difficultés d'analyse s'opposeraient à ce qu'on pût arriver à en effectuer ultérieurement le calcul complet.

§ 114. Pour arriver à un autre théorème relatif aux quantités de mouvement, considérons d'abord un mouvement s'effectuant tout entier dans un plan. L'accélération totale j, dans ce mouvement, est constamment égale à $\frac{F}{m}$, et la direction de cette accélération totale est la même que celle de la force F qui la produit. La vitesse acquise par le point matériel, pendant le temps dt, étant égale à jdt (§ 70), aura donc pour valeur $\frac{F}{m}dt$.

Cela posé, soient MN, *fig.* 57, la ligne qui représente la vitesse v du point matériel à la fin du temps t, et MP une ligne égale et parallèle à celle qui représente sa vitesse v' à la fin du temps $t + dt$; MQ, égale et parallèle à NP, est la vitesse acquise par ce point pendant le temps dt. La vitesse MP ou v' est la résultante des vitesses MN ou v, et MQ ou $\frac{F}{m}dt$. Or,

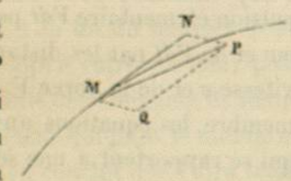


Fig. 57.

si l'on se reporte à la proposition fondamentale de la théorie des moments des forces agissant sur un même point (§ 101), et si l'on observe que la composition des vitesses s'effectuant absolument de la même manière que la composition des forces, la même proposition fondamentale peut s'appliquer aux vitesses simultanées d'un point et à leur résultante, on pourra énoncer le théorème suivant : Le moment de la vitesse résultante v' par rapport à un point quelconque O du plan dans lequel s'effectue le mouvement, est égal à la somme des moments des vitesses v et $\frac{F}{m}\,dt$, par rapport à ce point. Nous nommons, bien entendu, moment d'une vitesse par rapport au point O, le produit de cette vitesse par la distance du point O à sa direction. Ainsi, en désignant par p, p', p'' les distances du point O aux directions des lignes MN, MP, MQ, nous aurons

$$v'p' = vp + \frac{F}{m}\,dt\,.\,p''.$$

On en déduit

$$mv'.p' - mv.p = Fdt.p'',$$

équation qui exprime que l'accroissement du moment de la quantité de mouvement du point matériel par rapport au point O, pendant le temps dt, est égal au moment de l'impulsion élémentaire de la force F, pendant ce temps dt, pris par rapport au même point O. Nous désignons encore ici sous les noms de moment de la quantité de mouvement mv, moment de l'impulsion élémentaire Fdt par rapport au point O, les produits de mv et de Fdt par les distances du point O aux directions de la vitesse v et de la force F. Enfin, si nous ajoutons membre à membre les équations auxquelles cet exposé correspond, et qui se rapportent à une série d'éléments successifs du temps, nous arriverons au théorème suivant :

L'accroissement total qu'éprouve le moment de la quantité du mouvement du point matériel par rapport à un point du plan de sa trajectoire, pendant un intervalle de temps quelconque, est égal à la somme des moments, par rapport à ce point, des impulsions élémentaires de la force correspondant aux divers éléments de ce temps.

Ce théorème, qui vient d'être établi pour le cas où un point matériel se meut dans un plan, convient évidemment à la projection d'un mouvement quelconque sur un plan fixe. On peut donc dire que, de quelque manière qu'un point matériel se meuve dans l'espace sous l'action d'une force, si l'on projette son mouvement sur un plan fixe, l'accroissement total qu'éprouve le moment de la quantité de mouvement projetée par rapport à un point du plan de projection, pendant un temps quelconque, est égal à la somme des moments, par rapport à ce point, des impulsions élémentaires de la force projetée correspondant aux divers éléments de ce temps.

§ 115. **Théorème des aires.** — Dans le cas d'un mouvement qui s'effectue tout entier dans un plan, si la direction de la force F passe constamment par un point O de ce plan, le moment de l'impulsion élémentaire Fdt de la force F par rapport à ce point O sera toujours nul : donc, d'après le théorème du § 114, le moment $mv\,.\,p$ de la quantité de mouvement du mobile par rapport à ce point O ne changera pas de valeur avec le temps. La quantité $\frac{1}{2}\,vdt\,.\,p$, que l'on obtient en multipliant $mv\,.\,p$ par $\frac{dt}{2m}$, ne variera donc pas non plus, si l'on regarde dt comme constant. Mais cette quantité $\frac{1}{2}\,vdt\,.\,p$ est précisément la mesure de la surface du triangle formé par les rayons vecteurs menés du point O aux deux positions que le mobile occupe à la fin du temps t et à la fin du temps $t + dt$, et par l'élément vdt de trajectoire compris entre ces deux positions : donc les aires décrites, pendant des éléments de temps successifs et égaux, par le rayon vecteur qui joint le mobile au point O, sont égales entre elles. On en conclut que l'aire totale décrite par ce rayon vecteur pendant un temps quelconque est proportionnelle à ce temps. C'est dans cette proposition que consiste le *théorème des aires*.

Ce théorème ne suppose rien sur la manière dont la grandeur de la force appliquée au mobile varie avec le temps : la condition que la direction de cette force passe toujours par un même point du plan dans lequel le mobile se déplace est seule nécessaire pour que le théorème ait lieu. Si cette condition est remplie, peu importe que la force varie d'une manière continue ou discontinue, qu'elle agisse toujours dans le même sens, ou qu'elle change brusquement de sens; les aires décrites par le rayon vecteur qui joint le point mobile au point par lequel passe constamment la direction de la force, sont toujours proportionnelles aux temps employés à les décrire.

Il est aisé de voir que, réciproquement, si le mouvement d'un point matériel s'effectue dans un plan, de telle manière que le rayon vecteur, qui joint ce point mobile à un point fixe O du plan, décrive des aires proportionnelles aux temps employés à les décrire, la force qui agit sur le point matériel reste toujours dirigée vers ce point O. En effet, s'il en était autrement, le moment de l'impulsion élémentaire de cette force, par rapport au point O, ne serait pas constamment nul; le moment de la quantité de mouvement du mobile par rapport au même point O changerait donc de valeur avec le temps (§ 114); et par suite l'aire élémentaire $\frac{1}{2}\, vdt\,.\,p$, qu'on obtient en multipliant le moment $mv\,.\,p$ de la quantité de mouvement par $\frac{dt}{2m}$, varierait d'un instant à un autre, pour une même valeur de dt, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si l'on considère le mouvement d'un point dans l'espace, et qu'on projette ce mouvement sur un point fixe, tout ce qui vient d'être dit peut s'appliquer au mouvement projeté. Le théorème des aires a lieu pour ce mouvement projeté, si la projection de la force est constamment dirigée vers un même point O du plan de projection, c'est-à-dire si la force appliquée au point mobile dans l'espace se trouve à chaque instant dans un plan passant par une parallèle aux lignes projetantes menée par le point O.

§ 116. **Théorème des forces vives.** — Reprenons la relation

$$m\frac{dv}{dt} = F_1$$

dans laquelle F_1 désigne la composante tangentielle de la force F appliquée au point matériel de masse m. Si nous multiplions le second membre par le chemin ds que le mobile parcourt sur sa trajectoire pendant le temps dt, et le premier membre par la quantité égale vdt, nous trouverons

$$mvdv = F_1 ds;$$

d'où, en intégrant entre des limites correspondant à deux positions particulières du mobile,

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} F_1 ds.$$

v_0 est la vitesse dont le mobile est animé lorsqu'il occupe la position pour laquelle l'arc s de sa trajectoire qui le sépare d'un point fixe a pour valeur s_0.

Le produit mv^2 de la masse d'un point matériel par le carré de sa vitesse se nomme la *force vive* de ce point. L'intégrale $\int_{s_0}^{s} F_1 ds$, dans laquelle entre la force F_1, projection de la force F sur la tangente à la trajectoire, se nomme le *travail* de la force F pendant le temps que le mobile emploie à passer de l'une à l'autre des deux positions correspondant aux deux limites de cette intégrale. L'élément $F_1 ds$ de cette intégrale est le *travail élémentaire* de la force F pendant l'élément de temps dt.

A l'aide de ces définitions, nous pouvons énoncer de la manière suivante le théorème auquel correspond l'équation ci-dessus : l'accroissement de la force vive d'un point matériel, en mouvement sous l'action d'une force F, pendant un intervalle de temps quelconque, est égal au double du travail de la force F pendant ce temps. C'est en cela que consiste le *théorème des forces vives*, dans le cas du mouvement d'un point matériel.

Ce que nous avons dit à la fin du § 113, relativement à l'intégrale qui représente l'impulsion de la force appliquée à un point matériel, peut s'appliquer à la nouvelle intégrale que nous venons de considérer et qui représente le travail de la force. Dans le mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force quelconque, cette intégrale, prise entre deux positions quelconques du mobile sur sa trajectoire, a une valeur entièrement déterminée, quelles que soient d'ailleurs les difficultés qui puissent se présenter lorsqu'on cherche à en effectuer le calcul.

§ 117. **Travail des forces.** — Au point de vue de la détermination des lois du mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force donnée F, dont la composante tangentielle est F_1, la relation

$$mv - mv_0 = \int_0^t F_1 dt,$$

trouvée dans le § 113, et la relation

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} F_1 ds,$$

à laquelle nous venons de parvenir (§ 116), ont le même degré d'importance. L'une et l'autre peuvent également servir à faire connaître la loi suivant laquelle varie la vitesse du mobile sur sa trajectoire; on sera guidé, dans chaque cas particulier, pour prendre une de ces deux relations de préférence à l'autre, par la facilité plus ou moins grande que l'on trouvera à calculer l'une ou l'autre des intégrales qui y entrent.

Mais, dans les applications de la Mécanique aux machines, il n'en est plus de même. La seconde des deux relations dont il s'agit acquiert une importance beaucoup plus grande que la première. Cela tient à ce que le travail de la force F, représenté par l'intégrale qui entre dans cette seconde relation, joue un très grand rôle dans ce genre d'applications, ainsi que nous l'expliquerons plus tard. Nous allons établir dès maintenant, sur le travail des forces, certaines propositions qui nous seront utiles dans la suite.

Nous avons donné le nom de travail élémentaire de la force F au produit $F_1 ds$ de la force tangentielle F_1 par l'élément de trajectoire ds. Si α est l'angle compris entre la direction de la

force F et celle de la tangente à la trajectoire, au point M où se trouve le mobile, *fig.* 58, on a

$$F_1 = F\cos\alpha;$$

et si l'on a soin de prendre toujours pour α l'angle formé par la partie MT de la tangente qui est dirigée dans le sens du mouvement, avec la droite MA menée dans la direction de la force F, à partir du point M, et dans le sens dans lequel la force agit, le signe de la force F cos α que nous venons d'assigner à la force tangentielle F_1 sera toujours le même que celui qui résulte de l'autre expression $m\frac{dv}{dt}$ de cette force tangentielle : la force F_1 sera positive ou négative, suivant que l'angle α sera aigu ou obtus, c'est-à-dire suivant que cette composante F_1 de la force F sera dirigée dans le sens du mouvement ou en sens contraire. Cela posé, on aura pour le travail élémentaire de la force F_1 la valeur suivante :

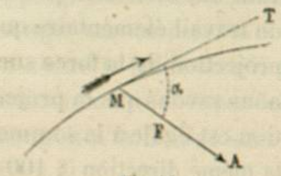


Fig. 58.

$$F_1 ds = F\cos\alpha . ds.$$

Ce travail élémentaire est donc le produit de l'élément ds de la trajectoire par la projection F cos α de la force F sur la direction de cet élément, ou bien encore, c'est le produit de la force F par la projection cos α. ds de l'élément de trajectoire sur la direction de la force. Cette seconde manière d'envisager le travail élémentaire de la force F est celle dont nous ferons le plus d'usage. La projection cos α. ds de l'élément ds sur la direction de la force est ce qu'on nomme le chemin parcouru par le point d'application de la force, estimé suivant sa direction. Le travail élémentaire de la force est positif ou négatif, suivant que cette projection de ds est dirigée dans le sens de la force F ou en sens contraire; parce que, dans le premier cas, l'angle α est aigu, et que, dans le second cas, il est obtus. Lorsque l'angle α est droit, le travail élémentaire de la force F est nul.

Dans les applications de la Mécanique aux machines, on donne habituellement le nom de *travail moteur* à un travail positif, et de *travail résistant* à un travail négatif.

Considérons plusieurs forces appliquées à un même point matériel, ainsi que la résultante de ces forces. Si le point sur lequel elles agissent se déplace d'une quantité infiniment petite ε, suivant une direction quelconque, chacune d'elles donnera lieu à un travail élémentaire qu'on obtiendra en multipliant ε par la projection de la force sur la direction de ce déplacement. Mais nous savons que la projection de la résultante sur cette direction est égale à la somme des projections des composantes sur la même direction (§ 100) : donc, si l'on multiplie ces diverses projections de la résultante et des composantes par le déplacement ε, on trouvera que le travail élémentaire de la résultante est égal à la somme des travaux élémentaires des composantes.

§ 118. Le travail total d'une force, pendant que le point sur lequel elle agit parcourt un arc quelconque de sa trajectoire, est égal à la somme des travaux élémentaires de cette force correspondant aux divers éléments dont se compose le chemin parcouru par le point mobile.

Si une force constante F agit sur un point matériel en mouvement, et est toujours dirigée suivant la tangente à la trajectoire de ce point, son travail élémentaire, correspondant à un élément de temps quelconque, aura pour valeur Fds; et, par suite, le travail total de cette force, pendant un temps quelconque, sera égal au produit de la force F par la longueur de l'arc décrit par le mobile pendant ce temps. Le travail sera positif ou négatif, suivant que la force agira dans le sens du mouvement ou en sens contraire.

Si une force constante F, appliquée à un point matériel en mouvement, agit toujours parallèlement à une même droite fixe, son travail élémentaire pendant que le mobile parcourt un élément ds de sa trajectoire sera égal au produit de la force F par la projection de ds sur la droite fixe : le travail total de cette force, pendant que le mobile parcourt un arc quelconque de sa trajectoire, sera donc égal au produit de la force F par la projection de cet arc total sur la droite fixe. On voit que, dans

ce cas, le travail total de la force F restera le même, de quelque manière que le point mobile aille d'un point déterminé de l'espace à un autre point aussi déterminé, c'est-à-dire quelle que soit la forme de la trajectoire qu'il décrira entre ces deux points. Lorsqu'un point matériel pesant se déplace d'une manière quelconque, le travail développé pendant un certain temps par la force de la pesanteur qui agit sur ce point s'obtient en multipliant cette force, c'est-à-dire le poids du point matériel, par la distance des plans horizontaux menés par les positions qu'il occupe au commencement et à la fin de l'intervalle de temps que l'on considère.

En général, la détermination du travail d'une force correspondant à un déplacement fini de son point d'application, ne s'effectuera pas aussi simplement que dans les deux cas particuliers dont nous venons de nous occuper. On trouvera la valeur de l'intégrale définie qui représente ce travail, soit en cherchant l'intégrale indéfinie de l'expression $F \cos \alpha . ds$, pour y substituer ensuite les limites entre lesquelles on veut en trouver la valeur, soit en se servant des méthodes de quadrature approximative.

Si plusieurs forces agissent simultanément sur un même point matériel en mouvement, le travail de la résultante de ces forces, pendant un temps quelconque, est égal à la somme des travaux des composantes, puisque cette égalité a lieu pour chacun des éléments dont se compose le déplacement total du point soumis à l'action des forces (§ 117).

Un travail, défini comme nous l'avons fait, est le produit d'une force par une longueur. Si nous prenons le kilogramme pour unité de force, et le mètre pour unité de longueur, l'unité de travail sera entièrement déterminée ; ce sera le travail développé par une force constante de 1 kilogramme, lorsque son point d'application se déplace de 1 mètre suivant sa direction : cette unité de travail se nomme *kilogrammètre*.

§ 119. **Cas particulier du théorème des forces vivantes.** — Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires d'un point mobile à un instant quelconque ; et X, Y, Z, les forces parallèles aux axes coordonnés, dans lesquelles se décompose la force F appliquée à ce point. Le travail élémentaire de la force F, correspondant au déplacement infiniment petit ds du point sur lequel elle agit, est égal à la somme des travaux élémentaires de ses composantes X, Y, Z (§ 117). Mais le travail élémentaire de la force X s'obtient en multipliant cette force par la projection de ds sur sa direction, projection qui n'est autre chose que dx, et il en est de même des travaux élémentaires des forces Y, Z, qu'on trouve en multipliant respectivement ces forces par dy et dz : donc le travail élémentaire de la force F a pour valeur

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz.$$

Ainsi l'équation des forces vives, trouvée dans le § 116, peut toujours s'écrire de la manière suivante :

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\int(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

l'intégrale du second membre étant supposée prise entre les limites correspondant aux positions du mobile pour lesquelles sa vitesse a les valeurs v_0 et v.

Cela posé, admettons que les composantes X, Y, Z de la force F soient des fonctions connues des coordonnées x, y, z du mobile, et que la quantité

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$$

soit la différentielle exacte d'une certaine fonction de ces coordonnées, que nous désignerons par

$$f(x, y, z).$$

Soient x_0, y_0, z_0 les valeurs de x, y, z, correspondant à la position qu'occupe le point mobile lorsque sa vitesse est v_0. Dans l'hypothèse où nous nous plaçons, l'équation des forces vives devient

$$mv^2 - mv_0^2 = 2[f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)].$$

Si nous considérons l'équation

$$f(x, y, z) = \mathrm{C},$$

C étant une constante quelconque, nous voyons que, pour

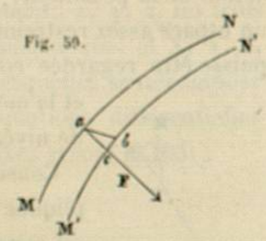
chaque valeur attribuée à C, cette équation représente une surface. Les diverses surfaces que l'on obtient ainsi, en donnant à C autant de valeurs différentes qu'on voudra, se nomment *surfaces de niveau* (nous verrons plus tard d'où vient cette dénomination). L'équation des forces vives montre que, si le point mobile traverse plusieurs fois une même surface de niveau, il se trouvera chaque fois animé de la même vitesse, puisque, pour tous les points d'une pareille surface, $f(x, y, z)$ a la même valeur. Il faut dire cependant que ce résultat est sujet à quelques exceptions, qui se présentent lorsque les diverses surfaces de niveau se coupent mutuellement, et auxquelles nous ne nous arrêterons pas (*).

L'équation différentielle d'une quelconque des surfaces de niveau est

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0.$$

Cette équation montre que, dans chacune des positions qu'occupe successivement le point mobile, la force F à laquelle il est soumis est dirigée normalement à la surface de niveau qui passe par ce point : car dx, dy, dz sont proportionnels aux cosinus des angles qu'un élément rectiligne quelconque tracé sur la surface, à partir de ce point, fait avec les trois axes coordonnés, et X, Y, Z sont également proportionnels aux cosinus des angles que la force F fait avec ces axes.

Fig. 59.



Considérons maintenant deux surfaces de niveau infiniment voisines MN, M'N', *fig.* 59, et supposons que le point mobile vienne successivement les traverser plusieurs fois chacune pendant la durée de son mouvement. Toutes les fois que ce point se trouvera sur la surface MN, il y aura une même vitesse, et il en sera de même toutes les fois qu'il viendra se placer sur la surfaces M'N' : sa force vive variera donc toujours de la même

(*) *Voir* sur ce sujet un mémoire de M. J. Bertrand, inséré dans le *Vingt-huitième cahier du Journal de l'École Polytechnique.*

quantité, chaque fois qu'il passera de la première surface à la seconde, et par conséquent le travail de la force F pendant ce déplacement infiniment petit aura toujours la même valeur. Mais lorsque le point mobile va de a en b, le travail élémentaire de F est égal à $F \times ac$, ac étant la projection de ab sur la force F qui est normale à la surface MN, et par conséquent mesurant la distance des deux surfaces MN, M'N' au point a. On voit par là que les diverses valeurs de la force F, lorsque le point mobile passe de la surface MN à la surface M'N', sont inversement proportionnelles aux distances normales ac des deux surfaces, aux points où s'effectuent ces passages.

§ 120. La condition que $Xdx + Ydy + Zdz$ soit une différentielle exacte, se trouve remplie dans le cas où la force F qui agit sur le mobile est constante en grandeur et en direction. Si l'on choisit les axes coordonnés de manière que l'axe des z soit parallèle à la direction de la force F, X et Y seront nuls, et Z sera égal à F; $Xdx + Ydy + Zdz$ se réduira donc à Fdz, et l'équation des surfaces de niveau sera

$$Fz = C:$$

ces surfaces seront donc des plans parallèles entre eux et perpendiculaires à la direction constante de la force F. On en trouve une application dans le mouvement d'un corps soumis à la seule action de la pesanteur, lorsque ce mouvement s'effectue dans un espace assez restreint pour que cette action de la pesanteur puisse être regardée comme ayant partout la même grandeur et la même direction ; dans ce cas les surfaces de niveau sont des plans horizontaux.

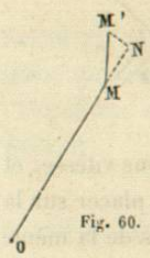


Fig. 60.

Considérons encore le cas où la force F, appliquée à un point matériel en mouvement, est constamment dirigée vers un point fixe O, *fig.* 60, et où la grandeur de cette force dépend uniquement de la distance OM ou r du mobile M à ce point fixe, en sorte qu'on a

$$F = f(r).$$

Le travail élémentaire $Xdx + Ydy + Zdz$ de la force F, pendant que le mobile va de M en M', est égal à $F \times MN$, ou, ce qui est la même chose,

$$f(r)\,dr.$$

Cette quantité étant toujours la différentielle d'une certaine fonction de r, et r dépendant de x, y, z, en vertu de la relation

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

il s'ensuit que, dans le cas dont il s'agit, $Xdx + Ydy + Zdz$ est la différentielle exacte d'une certaine fonction de x, y, z. Dans ce cas, les surfaces de niveau sont évidemment des surfaces sphériques ayant toutes le point O pour centre.

§ 121. **Équations différentielles du mouvement d'un point matériel.** — Si l'on rapporte le mouvement d'un point matériel à un système d'axes coordonnés rectilignes, rectangulaires ou obliques, ce mouvement est complètement connu lorsque l'on connaît ses projections sur chacun des axes coordonnés. Or, nous savons que chacun de ces mouvements projetés est précisément le mouvement rectiligne que prendrait un point matériel de même masse que celui dont il s'agit, s'il était soumis à l'action de la force projetée, et s'il avait reçu une vitesse initiale égale à la projection de la vitesse initiale du mobile de l'espace (§ 112). Soient donc m la masse du point matériel dont on veut étudier le mouvement, x, y, z, les trois coordonnées de ce point à un instant quelconque, et X, Y, Z, les forces parallèles aux axes suivant lesquelles se décompose la force F appliquée au mobile. Les équations différentielles des mouvements projetés sur les trois axes seront (§ 105) :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Ces trois équations sont désignées collectivement sous le nom d'équations différentielles du mouvement du point matériel. Si l'on parvient à les intégrer de manière à en déduire les valeurs de x, y, z, en fonction du temps t, le mouvement du mobile se trouve complètement connu. L'intégration de ces trois équations différentielles, dont chacune est du second ordre, introduit six constantes arbitraires; on détermine ces constantes d'après les circonstances initiales du mouvement, en exprimant, par exemple, que les coordonnées x, y, z du mobile, et les projections $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, de sa vitesse, sont égales à des quantités données, lorsque $t = 0$.

Dans le cas où l'on sait *a priori* que le mouvement du point matériel s'effectue tout entier dans un plan, on peut rapporter ce mouvement à deux axes coordonnés tracés dans le plan dont il s'agit. Alors il n'y a plus que deux équations différentielles au lieu de trois. Si l'on désigne par x, y, les coordonnées du point mobile, et par X, Y, les forces parallèles aux axes coordonnés dans lesquelles se décompose la force appliquée à ce mobile, les équations différentielles du mouvement seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y}.$$

L'intégration de ces deux équations introduira quatre constantes, que l'on déterminera également d'après les circonstances initiales du mouvement. Nous allons en voir quelques exemples.

§ 122. **Exemples de mouvements curvilignes.** — *Mouvement parabolique des corps pesants.* — Prenons pour premier exemple le mouvement d'un corps pesant qu'on a lancé suivant une direction quelconque, et qui se meut ensuite sous la seule action de la pesanteur supposée constante en grandeur et en direction. Nous avons déjà vu que, dans de pareilles circonstances, le mobile décrit une parabole (§ 92); mais nous allons étudier ce mouvement plus en détail.

Le mouvement s'effectue évidemment tout entier dans un plan vertical passant par la direction de la vitesse initiale du mobile (§ 106); nous pouvons donc le rapporter à deux axes tracés dans ce plan. Nous prendrons le point de départ O du mobile pour origine, *fig.* 61; la verticale OY menée par ce point, pour axe des y; et l'horizontale OX pour axe des x. Nous supposerons, en outre, que les y positifs se comptent en sens contraire du sens dans lequel agit la pesanteur.

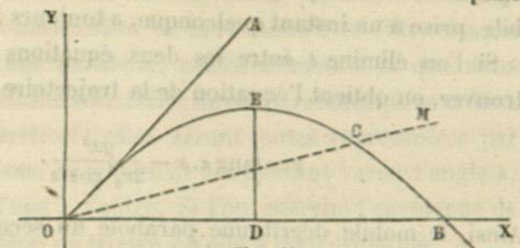


Fig. 61.

La force qui agit sur le mobile est constamment égale à mg (§ 98), m étant sa masse; cette force est toujours dirigée parallèlement à l'axe OY, et en sens contraire du sens dans lequel se comptent les y positifs. D'après cela, les équations différentielles du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Désignons par v_0 la vitesse initiale du mobile, et par α l'angle que la direction OA de cette vitesse fait avec l'axe des x. Nous devons donner aux constantes qui seront introduites par l'intégration des équations précédentes, des valeurs telles que l'on ait

$$x = 0, \qquad y = 0 \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha,$$

pour $t = 0$. Les intégrales de ces deux équations différentielles sont donc

$$x = v_0 \cos\alpha . t, \qquad y = v_0 \sin\alpha . t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

La valeur de x nous montre que $\frac{dx}{dt}$ est constamment égal à