$v_0 \cos\alpha$: donc la projection horizontale de la vitesse du mobile, prise à un instant quelconque, a toujours la même valeur.

Si l'on élimine t entre les deux équations qu'on vient de trouver, on obtient l'équation de la trajectoire, qui est

$$y = \operatorname{tang}\alpha . x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Ainsi, le mobile décrit une parabole du second degré, dont l'axe est vertical, et qui est tangente en O à la direction OA de la vitesse initiale.

La portée OB du jet s'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation de la trajectoire; on trouve ainsi

$$\mathrm{OB} = 2\frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Cette portée est un maximum, pour une même vitesse initiale v_0, lorsque l'angle α est de 45 degrés. On trouverait de même que la portée OC du jet, dans une direction quelconque OM, est un maximum pour une même vitesse initiale v_0, lorsque l'angle AOM est la moitié de l'angle YOM ; pour y arriver, il suffit de prendre les lignes OY, OM pour axes coordonnés, au lieu des lignes OY, OX.

L'ordonnée DE du sommet de la parabole s'obtient en remplaçant x par $\frac{1}{2}$ OB dans l'équation de la courbe ; cette ordonnée a pour valeur

$$\mathrm{DE} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha.$$

La hauteur du jet, qui n'est autre chose que cette ordonnée, est un maximum, pour une même valeur de v_0, lorsque α est de 90 degrés, c'est-à-dire lorsque la vitesse initiale est dirigée suivant OY. Cette hauteur maximum du jet est égale à $\frac{v_0^2}{2g}$; elle est égale à la moitié de la portée maximum $\frac{v_0^2}{g}$ suivant la direction horizontale OX.

Dans un jet d'eau en forme de gerbe, on peut regarder les diverses molécules d'eau comme lancées toutes avec une même

vitesse, et dans des directions différentes, à partir d'un même point. Si l'on fait abstraction de la résistance de l'air, chaque molécule décrit une parabole, conformément à ce que nous venons de dire. Considérons celles de ces paraboles qui sont dans un même plan vertical ; elles seront toutes représentées par l'équation ci-dessus, en y faisant simplement varier l'angle α, pour passer de l'une à l'autre. Si l'on cherche l'enveloppe de toutes ces paraboles, on trouve qu'elle a pour équation

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2};$$

c'est-à-dire que cette enveloppe est une parabole dont l'axe est dirigé suivant OY, dont la concavité est tournée du côté des y négatifs, et dont le foyer est en O : la surface à laquelle se termine l'ensemble de la gerbe formée des divers jets paraboliques est donc un paraboloïde de révolution ayant cette parabole pour méridienne, et la verticale menée par le point de sortie des jets pour axe de figure. Si l'on considère toutes les molécules liquides qui sont lancées à un même instant des directions différentes, leurs positions, au bout d'un temps quelconque t compté à partir du commencement de leur mouvement parabolique, seront fournies par les équations

$$x = v_0 \cos\alpha . t, \qquad y = v_0 \sin\alpha . t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

dans lesquelles on donnera à l'angle α les diverses valeurs correspondant à chacune d'elles ; si l'on élimine α entre ces équations, on trouve

$$x^2 + (y + \tfrac{1}{2}gt^2)^2 = v_0^2 t^2,$$

équation d'un cercle dont le rayon est $v_0 t$, et dont le centre, situé sur l'axe des y, a pour ordonnée $-\frac{1}{2}gt^2$: donc ces molécules, lancées à un même instant, restent constamment sur la surface d'une sphère dont le rayon croît proportionnellement au temps, et dont le centre s'abaisse au-dessous de l'origine commune des divers jets paraboliques, comme le ferait un corps pesant qui tomberait de ce point sans vitesse initiale.

§ 123. *Mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe, proportionnellement à sa distance à ce centre.* — Ce mouvement s'effectue tout entier dans un plan qui passe par le centre d'attraction et par la direction de la vitesse initiale du mobile (§ 109). Nous le rapporterons donc à deux axes rectangulaires dirigés dans ce plan; et nous ferons passer ces axes par le centre d'attraction lui-même.

Soient m la masse du mobile, x, y ses coordonnées à un instant quelconque, et r sa distance à l'origine des coordonnées. La force qui lui est appliquée, et qui est dirigée vers cette origine, est par hypothèse proportionnelle à r : nous la représenterons par

$$mk^2r,$$

k étant une constante que l'on déterminera facilement, d'après la grandeur de la force correspondant à une valeur particulière de la distance r. Les cosinus des angles que la direction de cette force fait avec les axes coordonnés sont respectivement

$$\frac{x}{r}, \qquad \frac{y}{r};$$

ses composantes parallèles à ces axes sont donc

$$-mk^2x, \qquad -mk^2y,$$

en tenant compte du sens dans lequel chacune d'elles agit. D'après cela, les équations différentielles du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y.$$

Chacune de ces équations différentielles peut s'intégrer indépendamment de l'autre. Leurs intégrales sont

$$x = A\cos kt + B\sin kt,$$
$$y = C\cos kt + D\sin kt,$$

A, B, C, D étant des constantes arbitraires, que l'on déterminera d'après les circonstances initiales du mouvement. Soient

a, b les valeurs initiales de x et y, et a', b' les composantes de la vitesse initiale du mobile suivant les axes coordonnés. On doit avoir

$$x = a \qquad y = b \qquad \frac{dx}{dt} = a' \qquad \frac{dy}{dt} = b',$$

pour $t = 0$: on en déduit

$$A = a, \qquad B = \frac{a'}{k}, \qquad C = b, \qquad D = \frac{b'}{k},$$

et par suite les équations finies du mouvement dont on s'occupe sont

$$x = a\cos kt + \frac{a'}{k}\sin kt,$$

$$y = b\cos kt + \frac{b'}{k}\sin kt.$$

Si l'on résout ces deux équations par rapport à $\sin kt$ et à $\cos kt$, et qu'ensuite on égale à 1 la somme des carrés des valeurs ainsi obtenues, on trouve

$$(b'x - a'y)^2 + k^2(bx - ay)^2 = (ab' - ba')^2,$$

équation qui représente une ellipse ayant son centre à l'origine des coordonnées, c'est-à-dire au centre d'attraction.

Le mouvement que nous obtenons ainsi n'est autre chose que le mouvement elliptique, auquel nous avons déjà été conduits en projetant un mouvement circulaire et uniforme sur un plan quelconque (§ 77) ; on se rappelle qu'en effet, dans ce mouvement elliptique, l'accélération totale est constamment dirigée vers le centre de l'ellipse, et proportionnelle à la distance du point mobile à ce centre.

§ 124. *Mouvement d'un point matériel, sous l'action d'une force dirigée vers un centre fixe et variant en raison inverse du carré de la distance du point à ce centre.* — Ce mouvement s'effectue encore tout entier dans un plan : nous le rapporterons donc à deux axes coordonnés rectangulaires tracés dans ce plan. Nous prendrons également le centre d'attraction pour origine des coordonnées.

Si nous désignons la force qui agit sur le mobile à un instant quelconque par

$$\frac{m\mu}{r^2},$$

m étant la masse de ce mobile, r sa distance à l'origine, et μ une constante qui dépend de l'intensité de la force, nous aurons

$$-\frac{m\mu x}{r^3} \quad -\frac{m\mu y}{r^3},$$

pour les composantes de cette force suivant les axes : donc les équations différentielles du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt} = -\frac{\mu x}{r^3} \quad \frac{dy}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}. \qquad (a)$$

Multiplions la première de ces équations par y et la seconde par x ; puis retranchons la première de la seconde : nous trouverons

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

équation que l'on peut intégrer immédiatement, une première fois, et qui donne

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$

C étant une constante arbitraire. Si nous passons des coordonnées rectilignes à des coordonnées polaires, en prenant l'origine pour pôle, et l'axe des x pour axe polaire, et que nous représentions par θ l'angle que le rayon vecteur r fait avec l'axe des x, la relation que nous venons d'obtenir deviendra

$$r^2 d\theta = C dt. \qquad (b)$$

Nous aurions pu l'écrire immédiatement, d'après le théorème des aires (§ 115) qui est applicable ici, car elle exprime que

$r^2 d\theta$ ou le double de l'aire décrite par le rayon vecteur r pendant le temps dt_1 est proportionnel à ce temps.

Multiplions encore la première des deux équations (a) par dx et la seconde par dy, puis ajoutons-les l'une à l'autre : en observant que l'on a

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

et par conséquent

$$xdx + ydy = rdr,$$

nous trouverons ainsi

$$\frac{dx d^2x + dy d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2} dr.$$

Mais en désignant la vitesse du mobile par v, on a

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = v^2,$$

et par suite

$$\frac{dx d^2x + dy d^2y}{dt^2} = v dv.$$

L'équation que nous venons d'obtenir se réduit donc à

$$v dv = -\frac{\mu}{r^2} dr ;$$

d'où, en intégrant,

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \qquad (c)$$

h étant une constante arbitraire. Nous aurions encore pu écrire immédiatement cette équation, d'après le théorème des forces vives (§§ 116 et 120) ; en effet, si nous désignons par r_0 et v_0 les valeurs initiales de r et de v, ce théorème nous donne

$$v^2 = v_0^2 - 2\int_{r_0}^{r} \frac{\mu}{r^2} dr = v_0^2 + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{r_0},$$

équation qui revient à la précédente, en posant

$$r_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} = h.$$

Si nous observons que l'on a

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2},$$

nous pourrons écrire l'équation (c) sous la forme

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} + h.$$

En éliminant dt entre cette équation et l'équation (b), puis résolvant par rapport à $d\theta$, nous trouverons

$$d\theta = \frac{C dr}{r\sqrt{r^2 h + 2\mu r - C^2}} \qquad (d)$$

relation qui, étant intégrée, nous fournira l'équation de la trajectoire du mobile.

Pour effectuer l'intégration, remplaçons les constantes C, h, par d'autres plus commodes. Si nous égalons à zéro la quantité

$$r^2 h + 2\mu r - C^2,$$

nous aurons une équation du second degré dont les deux racines sont réelles, puisque son premier membre est négatif pour $r = 0$, et qu'il est nécessairement positif pour d'autres valeurs de r, sans quoi le rapport de $d\theta$ à dr ne serait jamais réel. Désignons donc les deux racines de cette équation du second degré par

$$a(1-e), \qquad a(1+e),$$

et nous aurons

$$h = -\frac{\mu}{a} \qquad C = \sqrt{a\mu(1-e^2)}.$$

L'équation (d) devient ainsi

$$d\theta = \frac{-d\frac{1}{r}}{\sqrt{-\frac{1}{r^2} + \frac{2}{ar(1-e^2)} - \frac{1}{a^2(1-e^2)}}}.$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\theta = \alpha + \arccos\frac{1}{e}\left(\frac{a(1-e^2)}{r} - 1\right),$$

et par suite

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta - \alpha)} \qquad (e)$$

Nous voyons d'après cela que le mobile décrit une section conique ayant le centre d'attraction pour un de ses foyers. La constante e n'est autre chose que l'excentricité de cette courbe qui sera par conséquent une ellipse, une hyperbole, ou une parabole, suivant qu'on aura $e < 1$, $e >$ ou $e = 1$. Dans ce dernier cas, la constante a doit recevoir une valeur infinie, de manière que $a(1 - e^2)$ ait une valeur finie qui sera le paramètre de la parabole. Lorsque e n'est pas égal à 1, a est le demi-grand axe de l'ellipse, ou le demi-axe transverse de l'hyperbole.

Pour obtenir la loi du mouvement du mobile le long de l'orbite dont nous venons de trouver la forme, reprenons l'équation (b) qui correspond au théorème des aires. Si nous y remplaçons $d\theta$ par sa valeur en fonction de r, fournie par l'équation (d), et que nous introduisions encore les constantes a, e, à la place des constantes C, h, nous aurons

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{-\frac{\mu}{a}r^2 + 2\mu r - a\mu(1-e^2)}}.$$

Posons

$$r = a(1 - e\cos u), \qquad (f)$$

u étant une variable auxiliaire, et la valeur de dt deviendra

$$dt = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}(1 - e\cos u)\,du;$$

d'où, en intégrant, mettant n à la place de $\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$, et désignant par ε une constante arbitraire,

$$nt + \varepsilon = u - e\sin u. \qquad (g)$$

Cette équation (g) permettra de trouver u en fonction de t, et par suite on aura la valeur de r au moyen de l'équation (f).

Cherchons à reconnaître comment les circonstances initiales du mouvement influent sur la nature de la courbe décrite par le mobile. D'après les relations qui existent entre les constantes h, C, et les constantes a, e, par lesquelles nous les avons remplacées, on a

$$e = \sqrt{1 + \frac{C^2 h}{\mu^2}}.$$

D'ailleurs, nous avons trouvé pour h la valeur

$$h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0},$$

Il s'ensuit que la trajectoire sera une branche d'hyperbole si l'on a

$$v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0};$$

une parabole, si l'on a

$$v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0};$$

et une ellipse, si l'on a

$$v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}.$$

Il est extrêmement remarquable que la nature de la trajectoire décrite se trouve entièrement déterminée par la connais-

sance des qualités v_0 et r_0, et ne dépende en aucune manière de l'angle que la vitesse initiale v_0 fait avec le rayon vecteur r_0.

Nous avons à peine besoin d'ajouter que, si un point matériel, soumis à l'action d'une force dirigée vers un point fixe, décrit une section conique ayant ce point fixe pour foyer, la force dont il s'agit varie nécessairement en raison inverse du carré de la distance du point matériel au point fixe.