CHAPITRE III

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL QUI N'EST PAS LIBRE.

§ 125. **Ce qu'on entend par un point matériel qui n'est pas libre.** — Il arrive souvent que les circonstances dans lesquelles se trouve un corps mobile sont telles que, quelles que soient les forces qui agissent sur lui, son mouvement satisfait toujours à certaines conditions. Ainsi, un wagon, posé sur une voie de fer, se mouvra toujours le long de cette voie, dans un sens ou dans l'autre, quelles que soient les grandeurs et les directions des forces qu'on lui appliquera, pourvu, bien entendu, qu'on ne dépasse pas certaines limites; ainsi une balle de plomb, suspendue à l'extrémité d'un fil inextensible dont l'autre extrémité est fixe, se mouvra toujours de telle manière que son centre de figure reste sur la surface d'une sphère ayant le point d'attache du fil pour centre, quelles que soient les forces qui agiront sur elle, pourvu que ces forces ne tendent pas à se rapprocher de ce point d'attache du fil. Dans le premier de ces deux exemples, le mouvement du wagon est produit à la fois par les forces qui lui sont directement appliquées dans les différentes directions, et par les réactions qu'il éprouve de la part des rails dans les divers points où il les touche; si l'on réduit le wagon, par la pensée, à un simple point matériel sur lequel agiraient ces diverses forces, on trouvera son mouvement en appliquant les théories exposées dans le chapitre précédent : seulement, il

arrivera que, quelles que soient les forces directement appliquées à ce point matériel, c'est-à-dire autres que les réactions des rails, la trajectoire qu'il décrira sera toujours la même, parce que ces réactions prendront à chaque instant des grandeurs et des directions telles qu'il en soit ainsi. Dans le second exemple, la balle de plomb se meut sous les actions simultanées des forces qui lui sont directement appliquées, et de la réaction qu'elle éprouve de la part du fil; cette balle, supposée réduite à un point matériel sur lequel agiraient toutes les forces que nous venons d'indiquer, se mouvra conformément à la théorie exposée dans le chapitre II de ce livre; mais il arrivera que, quelle que soit la résultante des forces directement appliquées à la balle, c'est-à-dire autres que la réaction qu'elle éprouve de la part du fil, cette réaction prendra toujours une intensité telle que la balle ne quitte pas la surface sphérique dont nous avons parlé.

Dans de pareils cas, toutes les forces qui agissent réellement sur le mobile, et qui déterminent les diverses circonstances de son mouvement, ne peuvent pas être données *à priori*. Les forces qui lui sont directement appliquées, et qui tendent à le faire mouvoir dans un sens ou dans un autre, peuvent seules être connues tout d'abord; quant aux réactions qu'il éprouve de la part des obstacles qui l'obligent à se mouvoir de telle ou telle manière, elles se développent à chaque instant, et prennent les grandeurs et les directions convenables pour le maintenir sur la courbe ou sur la surface dont la présence de ces obstacles l'empêche de sortir. La connaissance de ces réactions, qui ne peut pas être fournie *à priori*, est remplacée par la connaissance qu'on a tout d'abord de la trajectoire suivant laquelle le mobile se déplace, ou au moins d'une surface sur laquelle cette trajectoire est nécessairement située.

C'est ainsi que, dans certains cas, on est conduit à considérer un point matériel comme n'étant pas libre de céder complètement à l'action des forces qu'on lui applique pour le faire mouvoir; on regarde ce point comme ***assujetti à rester sur une courbe donnée, ou sur une surface donnée***, suivant les circonstances. C'est par opposition avec cette manière de considérer le mouvement d'un point matériel, que nous avons caractérisé l'objet du chapitre précédent, en spécifiant dans le titre de ce chapitre qu'il s'agissait d'un point matériel *libre*. Mais on ne devra jamais oublier qu'un point matériel peut toujours être regardé comme libre, à la condition de tenir compte de toutes les forces qui agissent sur lui, c'est-à-dire des forces qui tendent à le faire mouvoir dans diverses directions, et des réactions que cette tendance au mouvement peut développer de la part de certains obstacles qui l'empêchent de céder complètement à l'action des premières forces.

§ 126. **Équilibre d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe.** — Pour nous faire une idée nette de ce que nous devons entendre au juste par un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe, concevons un corps solide tel qu'un grain de chapelet percé d'une ouverture dans laquelle passe une tige rigide contournée suivant une courbe quelconque, ou bien encore une bille engagée dans un tube également contourné suivant une pareille courbe. Ces deux corps peuvent se mouvoir, le premier en glissant le long de la tige qui le traverse, le second en se transportant successivement en divers points du tube dans lequel il est contenu. Si l'on fait abstraction des dimensions transversales de la tige ou du tube, et qu'en même temps on réduise par la pensée le corps qui ne peut que glisser le long de cette tige ou de ce tube à un simple point matériel, on aura précisément ce qu'on nomme un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe.

Si l'on applique au grain de chapelet ou à la bille, que nous supposons primitivement en repos, une force dont la direction soit normale à la tige ou au tube, il est clair que cette force ne mettra pas le corps en mouvement : l'égalité des angles que la force fait avec la direction des deux seuls mouvements que le corps puisse prendre, suivant qu'il glisserait dans un sens ou dans le sens opposé, montre que ce corps ne se mouvra ni d'un côté ni de l'autre. Dans ce cas, la force appliquée au corps ne fera que développer une pression de ce corps sur la tige ou sur le tube, et il en résultera une réaction de la tige ou du tube

sur le corps, réaction qui sera égale et contraire à la pression dont nous venons de parler : le corps restera en repos, malgré l'action de la force qui lui est appliquée, parce que la réaction de la tige ou du tube sur le corps fera équilibre à cette force.

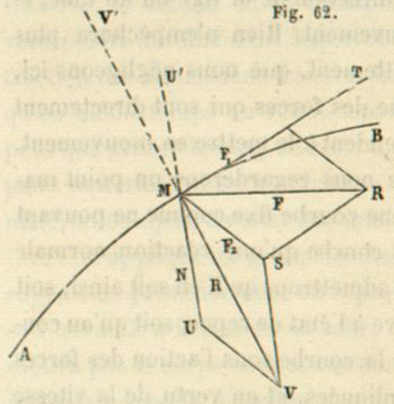
Si l'on applique au corps une force oblique par rapport à la direction de la tige ou du tube, au point où il se trouve placé, on pourra remplacer cette force par deux composantes, dont l'une ait la direction même du mouvement que le corps peut prendre, et l'autre fasse un angle droit avec la première. La seconde composante ne peut agir en aucune manière pour produire le mouvement du corps, ainsi que nous venons de l'expliquer. Quant à la première composante, elle fera glisser le corps le long de la tige ou du tube, à moins qu'il ne se développe comme à l'ordinaire une résistance à laquelle on donne le nom de *frottement*, et que cette composante ne soit pas assez grande pour la vaincre. Pour simplifier, on peut faire abstraction de cette résistance, et regarder le corps comme pouvant glisser avec la plus grande facilité le long de la tige ou du tube ; en sorte qu'une force, quelque petite qu'elle soit, qui agit sur le corps suivant la direction de la tige ou du tube, le met nécessairement en mouvement. Rien n'empêchera plus tard de tenir compte du frottement, que nous négligeons ici, en le considérant comme une des forces qui sont directement appliquées au mobile et qui tendent à le mettre en mouvement.

C'est d'après ces idées que nous regarderons un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe comme ne pouvant éprouver de la part de cette courbe qu'une réaction normale à sa direction ; de plus, nous admettrons qu'il en soit ainsi, soit que le point matériel se trouve à l'état de repos, soit qu'au contraire il se meuve le long de la courbe sous l'action des forces qui lui sont directement appliquées, et en vertu de la vitesse qui a pu lui être imprimée tout d'abord.

Cela posé, il ne nous sera pas difficile de trouver la condition à laquelle doivent satisfaire les forces F, F′, F″,... appliquées à un point matériel qui est assujetti à rester sur une courbe fixe, pour que ce point soit en équilibre. Si, aux forces dont il s'agit, on joint la réaction que le point matériel éprouve de la part de la courbe, on a un système total de forces dont la résultante doit être nulle (§ 104) : donc la résultante des forces F, F′, F″,... doit être égale et directement opposée à la réaction de la courbe sur le point matériel. Mais cette réaction est normale à la courbe ; donc aussi la résultante des forces F, F′, F″,... doit être dirigée normalement à cette courbe. Cette condition, que la résultante des forces F, F′, F″,... appliquées au point matériel, soit normale à la courbe sur laquelle il est assujetti à rester, est d'ailleurs suffisante pour que le point soit en équilibre : car les forces F, F′, F″,... peuvent toujours être remplacées par leur résultante, et celle-ci étant normale à la courbe fixe, ne peut faire mouvoir le point matériel ni dans un sens ni dans l'autre. La résultante des forces F, F′, F″,... n'est autre chose que la pression du point matériel sur la courbe, pression qui est égale et contraire à la réaction de la courbe sur le point matériel.

§ 127. **Mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe.** — Soient AB, *fig.* 62, la courbe sur laquelle le point matériel M est assujetti à rester ; F la force appliquée à ce point matériel, ou la résultante des forces qui lui sont appliquées, s'il y en a plusieurs, indépendamment de la réaction qu'il éprouve de la part de la courbe ; et enfin N cette réaction de la courbe, dont la direction est perpendiculaire à la tangente MT. On peut regarder le mobile comme étant un point matériel libre se mouvant sous l'action des forces F et N. Décomposons la force F, représentée par la droite MR, en deux composantes F_1 et F_2, dont l'une soit dirigée suivant la tangente MT, et l'autre suivant une perpendiculaire MS à

Fig. 62.



cette tangente menée dans le plan TMR ; composons ensuite la force F_2 ou MS, avec la force N ou MU, ce qui nous donnera la force R ou MV dirigée perpendiculairement à la tangente MT, aussi bien que chacune de ses composantes MS, MU : nous aurons ainsi deux forces F_1 et R, qui tiendront lieu des deux forces F, N, et qui seront évidemment celles auxquelles nous avons donné les noms de force tangentielle et de force centripète (§ 110). D'après cela, si v est la vitesse du mobile, m sa masse, et α l'angle que la direction MR de la force F fait avec la direction MT du mouvement, on aura

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\alpha.$$

Cette équation, jointe à la relation

$$v = \frac{ds}{dt},$$

permettra de déterminer toutes les circonstances du mouvement du mobile sur la courbe AB, lorsque la force F sera donnée, ainsi que l'angle α que sa direction fait à chaque instant avec la tangente à la courbe AB, au point où se trouve le mobile. La recherche de l'équation finie du mouvement sur la courbe AB est réduite par là à une question d'analyse, toute pareille à celle qui a pour objet de trouver l'équation du mouvement rectiligne d'un point matériel libre (§ 106).

Dans le cas particulier où la force F serait constamment nulle, et où le point matériel ne se mouvrait le long de la courbe AB qu'en vertu de sa vitesse initiale, on voit qu'on aurait

$$\frac{dv}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire que la vitesse v ne varierait pas, ou, en d'autres termes, le mouvement du point matériel serait uniforme. Il en serait encore de même, si la force F était constamment normale à la courbe AB.

12

§ 128. La force centripète R ou MV, *fig.* 62, a pour expression

$$m\frac{v^2}{\rho},$$

ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire AB en M; elle est dirigée suivant ce rayon, c'est-à-dire suivant la normale menée dans le plan osculateur de la courbe correspondant au point M, et du côté de la concavité de la courbe. Cette force MV étant la résultante des deux forces MS, MU, une force MV', égale et contraire à MV, fera équilibre aux deux forces MS, MU; les trois forces MS, MU, MV' se faisant équilibre, la force MU est égale et directement opposée à la résultante MU' des deux forces MS, MV'; mais la force MU', égale et directement opposée à la réaction N de la courbe AB sur le point matériel, n'est autre chose que la pression exercée par ce point sur la courbe AB : donc la pression du point M sur la courbe AB est la résultante de deux forces, dont l'une est la composante normale F_2 de la force F, et l'autre est égale et directement opposée à la force centripète $m\frac{v^2}{\rho}$.

Si la force F était nulle, sa composante normale F_2 le serait aussi, et la pression exercée sur la courbe AB par le point mobile, dont la vitesse resterait toujours la même, se réduirait à une force égale et contraire à la force centripète. Dans ce cas, la pression du mobile sur la courbe est désignée sous le nom de *force centrifuge*. Le point mobile, n'étant soumis à l'action d'aucune force, se mouvrait uniformément et en ligne droite, s'il était libre; l'obligation dans laquelle il se trouve de suivre la courbe AB n'altère pas l'uniformité de son mouvement, mais il en résulte que la direction de sa vitesse doit changer à chaque instant: ce changement de vitesse ne peut se produire sans que le mobile réagisse sur la courbe, et c'est cette réaction qui constitue la force centrifuge, dont le nom rappelle la tendance du mobile à se mouvoir en ligne droite, c'est-à-dire à s'éloigner du centre du cercle osculateur de la courbe AB. On voit que la force

centrifuge est dirigée suivant le prolongement MV' du rayon de courbure de la courbe AB, c'est-à-dire du côté de la convexité de cette courbe, et qu'elle a pour valeur

$$m\frac{v^2}{\rho},$$

comme la force centripète.

Dans le cas général où le mobile, assujetti à rester sur la courbe AB, se meut sous l'action d'une force F, la pression MU' que ce mobile exerce sur la courbe à un instant quelconque est la résultante de deux forces, dont l'une est la composante normale F_2 de la force F, et l'autre est la force centrifuge MV' correspondant à la vitesse dont le point mobile se trouve animé à cet instant.

§ 129. Tous les théorèmes qui ont été établis précédemment (§§ 113 à 120) sur le mouvement d'un point matériel libre sont applicables au mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe, à la condition de joindre à la force F directement appliquée à ce point matériel, la réaction N qu'il éprouve de la part de la courbe fixe, et de considérer le mouvement comme s'effectuant sous l'action de la résultante de ces deux forces. Mais, comme la réaction N de la courbe sur le mobile n'est pas connue *à priori*, on doit naturellement attacher plus d'importance à ceux de ces théorèmes qui ne dépendent pas de la force N, qu'à ceux qui en dépendent. Les premiers sont les seuls que nous rappellerons ici.

La force tangentielle $m\frac{dv}{dt}$ est simplement la composante tangentielle F_1 de la force F, et ne dépend en aucune manière de la réaction N de la courbe (§ 127) : donc on peut dire (§ 113) que l'accroissement de la quantité de mouvement du point matériel, pendant un temps quelconque, est égal à l'impulsion de la composante tangentielle F_1 de la force F pendant ce temps.

Le travail élémentaire de la résultante des forces F et N est égal à la somme des travaux élémentaires de ces deux forces; mais le travail élémentaire de la force N est constamment nul, puisque cette force est normale à la courbe fixe, et par conséquent normale à l'élément de chemin décrit par le mobile : donc le travail élémentaire de la résultante des forces F et N se réduit au travail élémentaire de la force F seule. D'après cela, il est clair qu'on peut dire (§ 116) que l'accroissement de la force vive du point matériel, pendant un intervalle de temps quelconque, est égal au double du travail de la force F pendant ce temps.

Pour pouvoir appliquer ce qui a été dit dans le § 119 au cas d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe, il n'est pas nécessaire de se préoccuper de la réaction N de cette courbe. La quantité $Xdx + Ydy + Zdz$ étant le travail élémentaire de la résultante des forces appliquées au mobile, se réduit ici, d'après ce qui vient d'être dit, au travail élémentaire de la force F ; on peut donc regarder X, Y, Z comme étant simplement les composantes de la force F parallèles aux axes coordonnés. Si ces trois composantes de F sont les dérivées partielles d'une fonction de x, y, z, prises par rapport à chacune de ces variables, il y aura lieu de considérer les surfaces de niveau dont nous avons parlé (§ 119), et d'appliquer au point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe tout ce qui a été dit pour un point matériel libre. Ces surfaces de niveau, ne dépendant nullement de la réaction N de la courbe fixe, sont les mêmes que si le point matériel était libre et que la même force F lui fût appliquée.

§ 130. **Exemples du mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe.** — *Cas d'un point matériel soumis à la seule action de la pesanteur.* — Si la force F, qui est directement appliquée au mobile, se réduit à son poids mg, il sera facile de trouver les diverses circonstances du mouvement, comme nous allons le voir.

Soit AB, *fig.* 63, la courbe sur laquelle le mobile est obligé de rester. Nous avons vu (§ 120) que, dans le cas dont il s'agit, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux ; il en résulte immédiatement que, si le point mobile vient successivement passer par divers points M, N, P, Q, situés sur un même plan

horizontal, il se trouvera animé d'une même vitesse dans chacune de ces positions.

D'un autre côté, le mobile allant du point M, où sa vitesse est

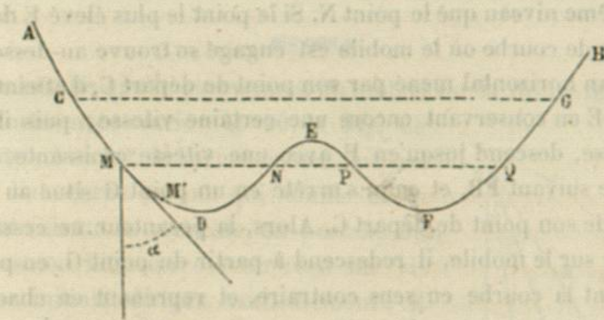


Fig. 63.

v, au point M', où sa vitesse est v', on a, d'après le théorème des forces vives (§ 129),

$$mv'^2 - mv^2 = 2mg(z' - z),$$

ou simplement

$$v'^2 = v^2 + 2g(z' - z),$$

en désignant par z et z' les distances des deux points M et M' à un plan horizontal fixe situé au-dessus de ces deux points.

Si, par exemple, le mobile part du point C, sans vitesse initiale, il descend le long de la courbe, en prenant une vitesse de plus en plus grande. La vitesse v qu'il possède en un point quelconque M est déterminée par la relation

$$v^2 = 2gh,$$

en désignant par h la distance des plans horizontaux menés par les deux points C et M, c'est-à-dire ce qu'on nomme la différence de niveau de ces deux points ; on voit que cette vitesse est égale à celle qu'aurait acquise le point matériel en tombant de la même hauteur h, suivant la verticale menée par son point de départ C (§ 90). La vitesse du mobile va ainsi en croissant jusqu'à ce qu'il atteigne le point D. La vitesse qu'il possède, en arrivant en ce point, fait qu'il le dépasse, et qu'il s'élève le long de la partie DE de la courbe AB ; sa vitesse va alors en diminuant progressivement, et, comme nous l'avons dit, en un point quelconque N, elle est égale à celle qu'il avait au point M situé au même niveau que le point N. Si le point le plus élevé E de la partie de courbe où le mobile est engagé se trouve au-dessous du plan horizontal mené par son point de départ C, il atteint ce point E en conservant encore une certaine vitesse ; puis il le dépasse, descend jusqu'en F avec une vitesse croissante, remonte suivant FB, et enfin s'arrête en un point G situé au niveau de son point de départ C. Alors, la pesanteur ne cessant d'agir sur le mobile, il redescend à partir du point G, en parcourant la courbe en sens contraire, et reprenant en chaque point exactement la même vitesse que lorsqu'il s'y était trouvé une première fois ; au bout de quelque temps, il s'arrête au point C d'où il était parti d'abord, puis se remet en mouvement de C en G ; et ainsi de suite indéfiniment.

La pression que le mobile exerce sur la courbe AB, dans une quelconque des positions qu'il y occupe successivement, au point M par exemple, s'obtient en composant la force centrifuge du mobile en ce point, avec la composante normale de son poids mg (§ 128). Dans le cas particulier où la courbe AB se trouve tout entière dans un plan vertical, ces deux composantes de la pression supportée par la courbe ont une même direction et la pression est égale à leur somme ou à leur différence, suivant les cas. Soient α l'angle que la tangente à AB, au point M, fait avec la verticale, et ρ le rayon de courbure de la courbe en ce point ; on aura pour la pression supportée par la courbe

$$mg \sin\alpha \pm \frac{mv^2}{\rho},$$

ou bien, en remplaçant v^2 par sa valeur $2gh$,

$$mg\left(\sin\alpha \pm \frac{2h}{\rho}\right).$$

§ 131. *Mouvement d'un point matériel pesant sur une droite fixe.* — Lorsque la courbe sur laquelle le mobile pesant est assujetti à rester se réduit à une ligne droite, le mouvement

se simplifie beaucoup. Soit α l'angle que la droite fixe fait avec la verticale. La composante tangentielle de la force mg qui agit sur le mobile a alors une valeur constante

$$mg \cos\alpha.$$

Il en résulte que le mouvement du mobile sur la droite fixe est uniformément varié (§§ 90 et 91). Ce mouvement est de même nature que celui d'un corps pesant qui tombe librement suivant la verticale, en partant du repos, ou bien après avoir reçu une vitesse initiale dirigée verticalement ; il ne diffère de ce dernier mouvement qu'en ce que l'accélération est $g\cos\alpha$, au lieu d'être g.

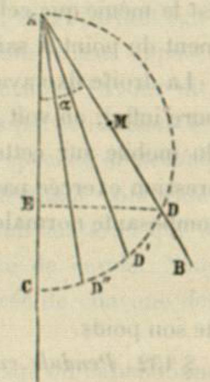


Fig. 64.

Si l'on suppose, par exemple, que le mobile se meuve le long de la droite AB, *fig.* 64, et qu'il parte du point A sans vitesse initiale, la distance AM ou s à laquelle il se trouve du point de départ A, au bout d'un temps quelconque t, est fournie par l'équation

$$s = \tfrac{1}{2} g \cos\alpha\, t^2.$$

Prenons sur la verticale du point A une longueur quelconque AC que nous désignerons par h, et sur la ligne AB une longueur AD ou l égale à la projection de AC sur AB. Le temps employé par le mobile à parcourir la distance l sera fourni par la relation

$$l = \tfrac{1}{2} g \cos\alpha\, t^2,$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Cette valeur de t montre que le temps employé par le mobile à parcourir la distance AD, sur la ligne oblique AB, est le même que celui qu'il emploierait à tomber verticalement de la hauteur AC. On en conclut que, si plusieurs mobiles partent en même temps du point A, sans vitesse initiale, et descendent sous la seule action de la pesanteur le long de diverses cordes AD, AD′, AD″, d'un cercle décrit sur AC comme diamètre, ces mobiles arriveront en même temps aux extrémités D, D′, D″, de ces cordes. Quant à la vitesse que possède le mobile qui parcourt la ligne AB, lorsqu'il arrive en D, nous savons qu'elle est la même que celle qu'il posséderait en E, s'il tombait librement du point A sans vitesse initiale (§ 130).

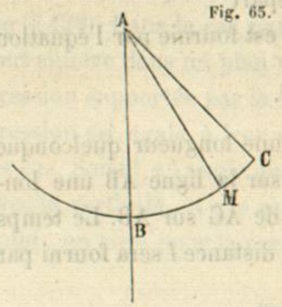
La droite fixe ayant dans tous ses points un rayon de courbure infini, on voit que la force centrifuge due au mouvement du mobile sur cette droite est constamment nulle, et que la pression exercée par le mobile sur la droite fixe se réduit à la composante normale

$$mg \sin \alpha$$

de son poids.

§ 132. *Pendule circulaire.* — Supposons qu'un point matériel pesant M, *fig.* 65, soit attaché à l'extrémité du fil inextensible et sans masse AM, et que l'autre extrémité A de ce fil soit fixe. Le point matériel M est en équilibre lorsque le fil AM est dirigé suivant la verticale AB : le poids de ce point matériel est détruit par la résistance qu'il éprouve de la part du fil. Si l'on écarte le corps M de la position d'équilibre qui vient d'être indiquée, en donnant au fil une direction oblique, et qu'ensuite on abandonne ce corps M à l'action de la pesanteur, sans lui communiquer de vitesse initiale, il se meut sans sortir du plan vertical mené par la direction oblique qu'on avait donnée au fil ; d'ailleurs, sa distance au point A restant constamment la même, il décrit un arc de cercle ayant ce point A pour centre : on peut donc regarder le point matériel M comme étant dans les

Fig. 65.



mêmes conditions que s'il était assujetti à rester sur la circonférence de cercle à laquelle appartient cet arc. La pression exercée par le mobile sur la courbe qu'il est obligé de décrire se trouve ici remplacée par la tension du fil AM.

Si l'on se reporte à ce qui a été dit en général sur le mouvement d'un point matériel pesant assujetti à rester sur une courbe fixe (§ 130), on verra que le point M doit osciller indéfiniment de part et d'autre de sa position d'équilibre, en s'écartant également de cette position dans un sens et dans le sens opposé. Un pareil point matériel, suspendu comme nous l'avons dit, constitue ce qu'on nomme un *pendule*. Nous particularisons ici le pendule en lui donnant la dénomination spéciale de *pendule circulaire*, parce que, ses oscillations s'effectuant conformément à ce que nous venons de dire, le point matériel qui le termine se meut suivant une circonférence de cercle. Nous allons nous proposer de déterminer la durée de chacune des oscillations de ce pendule.

Soit C le point où le mobile se trouve, lorsqu'on l'abandonne à l'action de la pesanteur, sans vitesse initiale. Dans une position quelconque M, il est animé d'une vitesse v qui est fournie par la relation

$$v = \sqrt{2gh},$$

h étant la distance du point M au point horizontal mené par le point C. Si nous désignons l'angle BAC par α, l'angle BAM par θ, et la longueur AM du pendule par l, nous aurons

$$h = l(\cos\theta - \cos\alpha),$$

$$v = -l\frac{d\theta}{dt};$$

le signe —, placé devant le second membre de la dernière relation, tient à ce que θ diminue quand t augmente, ce qui fait que $\frac{d\theta}{dt}$ est négatif. En remplaçant h et v par leurs valeurs dans l'équation ci-dessus, il vient

$$-l\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{2gl(\cos\theta-\cos\alpha)},$$

d'où l'on tire

$$dt=-\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}.$$

En intégrant cette équation et en étendant l'intégrale à tout le temps que le pendule emploie à aller de la position AC à la position verticale AB, on trouvera la durée de la demi-oscillation descendante ; le double de cette durée sera la durée T d'une oscillation complète. On aura donc

$$\frac{T}{2}=-\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_\alpha^0\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}},$$

d'où

$$T=\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^\alpha\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}.$$

Nous n'avons plus qu'à déterminer la valeur de l'intégrale définie qui entre dans cette formule, pour que la valeur de T soit entièrement connue.

Supposons d'abord que les oscillations soient très petites, en sorte que α et θ sont de très petits angles ; nous pourrons remplacer $\cos\alpha$ et $\cos\theta$ par

$$1-\frac{\alpha^2}{2},\qquad 1-\frac{\theta^2}{2},$$

et la valeur de T deviendra

$$T=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\alpha\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}}.$$

Mais on a

$$\int\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}}=\arcsin\frac{\theta}{\alpha}+\text{const.},$$

et par suite

$$\int_0^\alpha\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}}=\frac{\pi}{2};$$

donc on aura en définitive

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

formule qui fait connaître la durée des oscillations d'un pendule circulaire, en supposant ces oscillations très petites. Il est remarquable que cette durée ne dépende en aucune manière de l'amplitude des oscillations, qui peut être réduite au tiers, au quart, au dixième de ce qu'elle était d'abord, sans que la durée change.

Pour trouver la durée T des oscillations du pendule, sans supposer que leur amplitude soit très petite, nous opérerons de la manière suivante. Soient a et z les hauteurs des points C et M au-dessus du plan horizontal mené par le point B ; on a

$$a=l(1-\cos\alpha),\qquad z=l(1-\cos\theta),$$

d'où

$$\cos\theta-\cos\alpha\,\frac{a-z}{l},\qquad d\theta=\frac{dz}{\sqrt{2lz-z^2}}.$$

D'après cela, la formule qui donne la durée T des oscillations du pendule devient

$$T=\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^a\frac{dz}{\sqrt{az-z^2}\sqrt{\frac{a-z}{l}}},$$

ou bien encore

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^a\frac{dz}{\sqrt{2lz-z^2}}\left(1-\frac{z}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

La quantité $\frac{z}{2l}$ étant toujours plus petite que 1, on peut développer $\left(1-\frac{z}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}$ en série de la manière suivante :