$$\left(1-\frac{z}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2l}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{z}{2l}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{z}{2l}\right)^3+\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.3.5\ldots.}{2.4.6\ldots.}\,\frac{(2n-1)}{2n}\left(\frac{z}{2l}\right)^n+\ldots.$$

D'ailleurs on démontre dans le calcul intégral que l'on a

$$\int\frac{z^n dz}{\sqrt{az-z^2}}=-\frac{z^{n-1}\sqrt{az-z^2}}{n}+\frac{(2n-1)\,a}{2n}\int\frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{az-z^2}},$$

en sorte que, si l'on intègre entre les limites 0 et a, on aura

$$\int_0^a\frac{z^n dz}{\sqrt{az-z^2}}=\frac{(2n-1)\,a}{2n}\int_0^a\frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{az-z^2}}.$$

En remplaçant successivement, dans cette formule, n par $n-1$, puis par $n-2$, ensuite par $n-3$,.... enfin par 1, on obtiendra n relations, qui, étant multipliées entre elles, donneront

$$\int_0^a\frac{z^n dz}{\sqrt{az-z^2}}=\frac{1.3.5\ldots..(2n-1)}{2.4.6\ldots..\quad 2n}a_n\int_0^a\frac{dz}{\sqrt{az-z^2}},$$

ou bien encore, d'après la valeur connue de l'intégrale définie qui est dans le second membre,

$$\int_0^a\frac{z^n dz}{\sqrt{az-z^2}}=\frac{1.3.5\ldots..(2n-1)}{2.4.6\ldots..\quad 2n}a^n\pi.$$

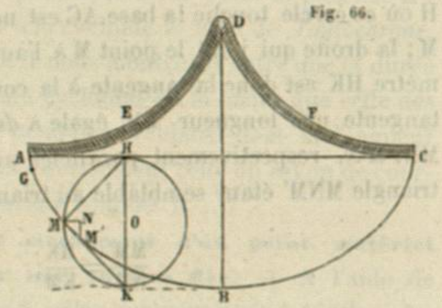
Cette dernière formule fait connaître les valeurs des intégrales qui entrent dans les divers termes de T, par suite du développement en série du facteur $\left(1-\frac{z}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}$. On trouve ainsi

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\begin{array}{l}1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{a}{2l}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{a}{2l}\right)^2+\ldots\ldots\\ \ldots.+\left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\quad 2n}\right]^2\left(\frac{a}{2l}\right)^n+\ldots\end{array}\right\}.$$

§ 133. *Pendule cycloïdal.* — On donne le nom de pendule

cycloïdal à un pendule analogue à celui dont nous venons de nous occuper, mais qui en diffère en ce que le point matériel qui le termine, au lieu de se mouvoir sur un cercle, se meut sur une cycloïde ABC, *fig.* 66, dont le plan est vertical et dont la base AC est horizontale.

Fig. 66.



Pour réaliser un pareil pendule, il suffit de tracer les deux arcs de cycloïde AD, DC dont l'ensemble constitue la développée de la cycloïde ABC, et de disposer deux pièces solides E, F, limitées inférieurement par des surfaces cylindriques droites ayant ces arcs AD, DC pour bases. Si l'on fixe en D l'une des extrémités d'un fil de longueur DB, et qu'on attache un corps pesant à son autre extrémité ; si ensuite on écarte ce corps de sa position d'équilibre B, sans le faire sortir du plan vertical ADC, et qu'on l'abandonne à lui-même, il est clair qu'il se mouvra le long de la cycloïde ABC, sur laquelle il effectuera une série d'oscillations. Nous allons nous proposer de déterminer la durée de l'une de ces oscillations.

Soient G la position qu'occupe le point matériel au commencement de l'oscillation que nous considérons, et M une quelconque des positions par lesquelles il passe après être parti du point G. Désignons par a et z les distances des points G et M à la tangente à la cycloïde en B, tangente qui est horizontale. Nous aurons pour la vitesse v du mobile en M,

$$v=\sqrt{2g\,(a-z)}.$$

D'un autre côté, en appelant s l'arc GM, on a

$$v=\frac{ds}{dt},$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{\sqrt{2g(a-z)}}$$

Si l'on trace le cercle générateur de la cycloïde dans la position qui correspond au point M, la droite menée du point M au point H où ce cercle touche la base AC est normale à la cycloïde en M ; la droite qui joint le point M à l'autre extrémité K du diamètre HK est donc la tangente à la courbe. Prenons sur cette tangente une longueur MM′ égale à ds, et menons les lignes MN, M′N, respectivement parallèles aux lignes CH, HK. Le triangle MNM′ étant semblable au triangle HMK, nous aurons

$$\frac{MM'}{NM'} = \frac{HK}{KM};$$

ou, ce qui revient au même, en désignant par r le rayon OH du cercle générateur, et observant que NM′ est égal à $-dz$,

$$\frac{ds}{dz} = -\frac{2r}{\sqrt{2rz}} = -\sqrt{\frac{2r}{z}}.$$

Tirant de là ds, et le substituant dans la valeur que nous avons obtenue précédemment pour dt, nous trouvons définitivement

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}}\frac{dz}{\sqrt{z(a-z)}}.$$

Nous n'avons plus qu'à intégrer par rapport à z, depuis $z = a$, jusqu'à $z = 0$, pour avoir la durée de la demi-oscillation descendante, c'est-à-dire la moitié de la durée T d'une oscillation complète : nous aurons donc

$$\tfrac{1}{2}T = -\sqrt{\frac{r}{g}}\int_a^0 \frac{dz}{\sqrt{z(a-z)}},$$

d'où

$$T = 2\sqrt{\frac{r}{g}}\int^a \frac{dz}{\sqrt{z(a-z)}} = \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Ce résultat simple, auquel nous venons de parvenir, nous fait connaître une propriété très remarquable du pendule cycloïdal.

La valeur de T ne renfermant pas la quantité a, il s'ensuit que la durée des oscillations est complètement indépendante de leur amplitude. En d'autres termes, quel que soit le point de départ G du corps pesant qui se meut le long de la cycloïde, ce corps emploie le même temps pour arriver au point le plus bas B : c'est ce qui a fait donner à la cycloïde le nom de *Tautochrone*.

La valeur trouvée pour T nous montre en outre qne la durée des oscillations du pendule cycloïdal est la même que celle des petites oscillations d'un pendule circulaire dont la longueur serait $4r$, longueur qui est précisément celle du rayon de courbure DB de la cycloïde en son sommet B.

§ 134. **Équilibre et mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface fixe.** — A l'aide de considérations analogues à celles que nous avons développées précédemment (§ 126), on comprendra sans peine ce que l'on doit entendre par un point matériel assujetti à rester sur une surface fixe. Si l'on fait abstraction du frottement que le point matériel peut éprouver de la part de la surface, on verra que, pour qu'une force appliquée à ce point primitivement en repos ne le mette pas en mouvement, il est nécessaire qu'elle soit dirigée normalement à la surface. La réaction que la surface exerce sur le point est donc aussi normale à cette surface. Nous admettrons qu'il en est ainsi, même dans le cas où le point matériel est en mouvement sur la surface sur laquelle il est obligé de rester, sauf à tenir compte, s'il y a eu lieu, du frottement qu'il éprouve de la part de la surface, en rangeant ce frottement parmi les forces qui agissent sur lui pour modifier son mouvement.

D'après cela, pour qu'un point matériel assujetti à rester sur une surface fixe soit en équilibre sous l'action des forces qui lui sont appliquées, il est nécessaire et suffisant que la résultante de ces forces soit dirigée suivant la normale à la surface. La pression exercée par le point sur la surface est égale à cette résultante.

Lorsqu'un point matériel est en mouvement sur une surface fixe sur laquelle il est assujetti à rester, il exerce à chaque instant sur la surface une pression normale dont nous pouvons facilement indiquer la valeur. Concevons pour cela que la résultante F des forces qui sont appliquées au point mobile (sans y comprendre la réaction qu'il éprouve de la part de la surface) soit décomposée en deux forces, dont l'une F_1 soit dirigée suivant la tangente à la trajectoire du point mobile, et l'autre F_2 soit dirigée perpendiculairement à cette tangente, dans le plan de F_1 et de F. En raisonnant comme nous l'avons déjà fait (§ 128), nous verrons que la pression exercée par le point matériel sur la surface est la résultante de la force F_2 et de la force centrifuge qui se développe dans le mouvement de ce point. Cette résultante de la force F_2 et de la force centrifuge doit, bien entendu, être normale à la surface ; en sorte qu'on peut l'obtenir en faisant la somme des projections de ces deux forces sur la normale. Quant à la force F_1, elle détermine le changement de grandeur de la vitesse v du mobile, à laquelle elle est liée par la relation

$$F_1 = m\frac{dv}{dt}.$$

Considérons en particulier le cas d'un point matériel qui se meut, sur une surface fixe, en vertu d'une vitesse initiale, sans être soumis à l'action d'aucune force. La force F étant nulle, il en sera de même de ses composantes F_1, F_2. Il s'ensuit nécessairement : 1° que la vitesse v du mobile reste constante, c'est-à-dire que son mouvement est uniforme ; 2° que la force centrifuge qui se développe dans le mouvement du point constitue à elle seule la pression de ce point sur la surface, et que par conséquent cette force centrifuge est dirigée normalement à la surface, en chaque point de la trajectoire du mobile. Si l'on observe maintenant que la force centrifuge, égale et contraire à la force centripète (§ 128), est toujours dirigée dans le plan osculateur de la trajectoire, on en conclura que, dans le cas particulier qui nous occupe, la trajectoire jouit de cette propriété que, en chacun de ses points, son plan osculateur passe par la normale à la surface en ce point : cette propriété est

précisément celle qui caractérise les *lignes géodésiques* de la surface. Ainsi, lorsqu'un point matériel, assujetti à rester sur une surface fixe, se meut sur cette surface sans être soumis à l'action d'aucune force, il parcourt uniformément une ligne géodésique de la surface.

Tous les théorèmes établis dans les paragraphes 113 à 120, sur le mouvement d'un point matériel libre, sont applicables au mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface fixe, à la condition de joindre à la force F directement appliquée à ce point matériel, la réaction N qu'il éprouve de la part de la surface, et de considérer le mouvement comme s'effectuant sous l'action de la résultante de ces deux forces. Parmi ces théorèmes, nous rappellerons seulement les deux suivants, dans lesquels la réaction N n'entre pas, en raison de ce que la tangente à la trajectoire est toujours perpendiculaire à sa direction :

1° L'accroissement de la quantité de mouvement du point mobile, pendant un temps quelconque, est égal à l'impulsion de la composante tangentielle de la force F, pendant ce temps ;

2° L'accroissement de la force vive du point matériel, pendant un intervalle de temps quelconque, est égal au double du travail de la force F, pendant ce temps.

Enfin nous pouvons dire encore ici, comme dans le cas d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe (§ 129), que l'on n'a pas besoin de se préoccuper de la réaction N de la surface, pour pouvoir appliquer au mouvement du point matériel ce qui a été dit dans le § 119. Si les composantes X, Y, Z, de la force F sont les dérivées partielles d'une fonction des coordonnées x, y, z du mobile, prises par rapport à chacune de ces variables, on pourra considérer les surfaces de niveau dont il a été question (§ 119) ; et ces surfaces de niveau joueront, par rapport au mouvement du point matériel assujetti à rester sur une surface fixe, le même rôle si ce point matériel était entièrement libre, tout en étant soumis à l'action de la même force F.

§ 135. **Exemple du mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface fixe.** — *Pendule conique.* — Lorsqu'un pendule, tel que celui que nous avons considéré dans le § 132, a été écarté de sa position d'équilibre, et qu'au lieu de l'abandonner à lui-même sans vitesse initiale, on le lance dans une direction quelconque, son mouvement ne s'effectue plus dans un plan vertical; ce pendule se meut en tournant autour de la verticale menée par le point de suspension, et en même temps il s'approche et s'éloigne alternativement de cette verticale, avec laquelle il ne coïncide dans aucune position. Dans ce cas il prend le nom de *pendule conique*.

Il est clair que le point matériel qui termine un pareil pendule peut être regardé comme étant assujetti à rester sur la surface d'une sphère ayant pour rayon la longueur du pendule, et pour centre son point de suspension. La pression normale du mobile sur la surface de la sphère se trouve ici remplacée par la tension du fil.

Rapportons les diverses positions du mobile à trois axes coordonnés rectangulaires passant par le point de suspension du pendule, et supposons que l'un de ces axes, l'axe des z, soit dirigé verticalement et dans le sens de la pesanteur. Si nous désignons par N la tension du fil et par l sa longueur, nous aurons pour les équations différentielles du mouvement du point matériel qui le termine (§ 121) :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{N}{m}\frac{x}{l},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{N}{m}\frac{y}{l},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=g-\frac{N}{m}\frac{z}{l}. \qquad (a)$$

Ces trois équations ne peuvent pas suffire pour déterminer x, y et z en fonction de t, puisqu'elles contiennent une quatrième quantité N qui est également une fonction inconnue de t. Mais nous savons en outre que le mobile doit rester sur la surface de la sphère dont le centre est à l'origine des coordonnées, et dont le rayon est l : x, y, z doivent donc satisfaire à l'équation de cette sphère, qui est

$$x^2+y^2+z^2-l. \qquad (b)$$

Cette nouvelle équation, jointe aux trois précédentes, permettra de déterminer les quatre fonctions inconnues y, x, z et N.

Si nous éliminons N entre les deux premières équations (a), nous trouvons

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

équation qui s'intègre immédiatement et donne

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=C, \qquad (c)$$

C étant une constante arbitraire. Cette équation (c) n'est autre chose que celle qu'on obtiendrait en appliquant le théorème des aires (§ 115) au mouvement de la projection du point mobile sur le plan des xy, ainsi qu'on peut s'en assurer facilement; le théorème des aires est applicable, en effet, dans ce mouvement projeté, puisque la résultante des forces N et mg, qui agissent sur le point matériel dans l'espace, est toujours dirigée dans le plan qui passe par ce point matériel et par la verticale du point de suspension.

En multipliant les trois équations (a) respectivement par dx, dy, dz, et les ajoutant ensuite membre à membre, on trouve

$$\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}=g\,dz-\frac{N}{ml}(x\,dx+y\,dy+z\,dz);$$

mais en différenciant l'équation (b), il vient

$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=0:$$

l'équation que nous venons d'obtenir se réduit donc à

$$\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}=g\,dz.$$

En l'intégrant, elle donne

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=2gz+C', \qquad (d)$$

C′ étant une nouvelle constante arbitraire. Nous aurions pu écrire immédiatement cette équation (d), en appliquant le théorème des forces vives au mouvement du point matériel dont nous nous occupons (§ 134) : la constante C′ aurait été remplacée par l'expression

$$v_0^2 - 2gz_0,$$

dans laquelle v_0 représente la vitesse initiale du mobile, et z_0 la valeur initiale de sa coordonnée verticale z.

Les trois équations (b), (c), (d), ne contenant pas N, peuvent être employées pour déterminer les valeurs des trois coordonnées x, y, z, du mobile en fonction de t. Mais nous les modifierons, en y remplaçant x et y par des coordonnées polaires, dans le plan horizontal des xy. Si nous désignons par r le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées à la projection horizontale du mobile, et par θ l'angle que ce rayon vecteur fait avec l'axe des x, nous aurons

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 = r^2, \\ xdy - ydx = r^2 d\theta, \\ dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 ; \end{gathered}$$

en conséquence, les équations (b), (c), (d), deviendront

$$\left.\begin{aligned} & r^2 + z^2 = l^2, \\ & r^2 \frac{d\theta}{dt} = \mathrm{C}, \\ & \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + \mathrm{C}'. \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

En éliminant r et θ entre ces équations (e), on trouve facilement

$$dt = \pm \frac{ldz}{\sqrt{(l^2 - z^2)(2gz + \mathrm{C}') - \mathrm{C}^2}} ; \qquad (f)$$

et par suite on a

$$d\theta = \pm \frac{\mathrm{C}ldz}{(l^2 - z^2)\sqrt{(l^2 - z^2)(2gz + \mathrm{C}') - \mathrm{C}^2}} . \qquad (g)$$

Dans les valeurs de dt et $d\theta$, le signe + convient au cas où le

mobile descend, et le signe — au cas où il monte. Les équations (f) et (g) étant intégrées, on aura t et θ en fonction de z ; et comme on a déjà r en fonction de z par la première des équations (e), la question se trouvera complètement résolue. On doit observer que l'intégration des équations (f) et (g) ne peut s'effectuer que par les méthodes de quadrature approximative, ou bien en ayant recours aux fonctions elliptiques.

Pour déterminer la tension N du fil, multiplions les trois équations (a) respectivement par x, y, z, puis ajoutons-les membre à membre ; il viendra

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} = -\frac{\mathrm{N}}{m}\frac{x^2 + y^2 + z^2}{l} + gz.$$

Mais, en différenciant deux fois l'équation (b), on trouve

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} = -\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = -v^2,$$

v étant la vitesse du mobile à un instant quelconque ; la relation qu'on vient d'obtenir devient donc

$$-v^2 = -\frac{\mathrm{N}l}{m} + gz,$$

d'où

$$\mathrm{N} = \frac{mv^2}{l} + mg\frac{z}{l}.$$

Cette valeur de N aurait pu être écrite immédiatement, d'après ce qui a été dit (§ 134) relativement à la pression exercée par un point mobile sur la surface sur laquelle il est assujetti à rester ; il est aisé de voir en effet que $mg\,\frac{z}{l}$ est la projection du poids mg sur la normale à la sphère au point où se trouve le mobile, et que $\frac{mv^2}{l}$ est la projection de la force centrifuge de ce mobile sur la même normale.

§ **136**. Si l'on égale à zéro la quantité

$$(l^2 - z^2)(2gz + \mathrm{C}') - \mathrm{C}^2$$

qui se trouve sous les radicaux, dans les équations différentielles (f), (g), on a une équation du troisième degré en z qui a toujours une racine réelle comprise entre $-l$ et $-\infty$. Les deux autres racines de cette équation sont nécessairement réelles et comprises entre $-l$ et $+l$; car, sans cela, les valeurs de dt et $d\theta$ correspondant à une position quelconque du point mobile seraient imaginaires. La valeur initiale z_0 de la variable z doit même être toujours comprise entre ces deux dernières racines, qui forment les deux limites entre lesquelles z varie périodiquement.

Soit α l'angle que la direction de la vitesse initiale v_0 du mobile fait avec la perpendiculaire au plan vertical mené par la position initiale de ce mobile et par le centre de la sphère. Si l'on décompose la vitesse v_0 en deux composantes rectangulaires, dont l'une, égale à $v_0 \cos\alpha$, soit dirigée suivant cette perpendiculaire, et que l'on se reporte à la signification de la constante C, on aura évidemment

$$C = r_0 v_0 \cos\alpha,$$

r_0 étant la valeur initiale de r, valeur qui est égale à $\sqrt{l^2 - z_0^2}$. On a d'ailleurs, comme nous l'avons dit précédemment,

$$C' = v_0^2 - 2gz_0.$$

D'après ces valeurs des constantes C et C', l'équation du troisième degré dont on vient de parler peut s'écrire ainsi

$$2gz^3 + (v_0^2 - 2gz_0)z^2 - 2gl^2z + r_0^2v_0^2\cos\alpha - (v_0^2 - 2gz_0)l^2 = 0;$$

et l'on peut vérifier qu'en effet elle a une racine comprise entre $-l$ et z_0, et une autre comprise entre z_0 et $+l$.

Cherchons quelles doivent être les circonstances initiales du mouvement de notre point mobile, pour qu'il parcoure un cercle horizontal de la sphère sur laquelle il est assujetti à rester, c'est-à-dire pour que le pendule dont il fait partie décrive un cône de révolution ayant pour axe la verticale menée par son point de suspension. Il est clair que pour cela il faut que les deux racines de l'équation ci-dessus, entre lesquelles z

varie périodiquement, deviennent toutes deux égales à z_0. Exprimons donc que cette équation et sa dérivée sont satisfaites l'une et l'autre quand on y remplace z par z_0, et cela nous fournira la solution de la question proposée. On trouve ainsi qu'on doit avoir

$$\alpha = 0, \qquad v_0^2 = \frac{gr_0^2}{z_0}.$$

La seconde des équations (e) donne dans ce cas

$$\theta = \frac{v_0}{r_0}t + \theta_0 = \sqrt{\frac{g}{z_0}} \times t + \theta_0,$$

θ_0 étant la valeur initiale de θ, ce qui montre que le mouvement du pendule est uniforme, et qu'il met un temps égal à

$$2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}}$$

pour faire un tour entier autour de la verticale.

§ 137. Cherchons encore à nous rendre compte de la manière dont s'effectue le mouvement du pendule conique, dans le cas où ce pendule fait toujours un petit angle avec la verticale. Pour cela, nous regarderons r comme restant toujours petit par rapport à l; et en développant en série la valeur de z en fonction de r fournie par la première des équations (e), nous réduirons cette valeur à ses deux premiers termes, ce qui nous donnera

$$z = l - \frac{1}{2}\frac{r^2}{l}.$$

Remplaçons z par cette valeur dans les deux dernières équations (e); mettons-y en même temps pour C et C' les valeurs indiquées précédemment (§ 136), et supposons que α soit nul, ce qui est toujours permis, car cela revient à admettre que le mobile part d'un des points de sa trajectoire qui correspondent au maximum et au minimum de z : nous aurons ainsi, pour déterminer r et θ en fonction de t, les équations différentielles

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=r_0v_0,$$

$$\left(1+\frac{r^2}{l^2}\right)\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\frac{d\theta^2}{dt^2}=v_0^2+\frac{g}{l}(r_0^2-r^2),$$

dont la seconde se réduit à

$$\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\frac{d\theta^2}{dt^2}=v_0^2\frac{g}{l}(r_0^2-r^2),$$

en négligeant le terme $\frac{r^2}{l^2}\frac{dr^2}{dt^2}$ qui est du même ordre de grandeur que ceux que nous avons déjà négligés dans la valeur de z. L'élimination de dt entre ces deux équations différentielles conduit à la relation

$$d\theta=\frac{r_0v_0dr}{r\sqrt{\left(v_0^2-\frac{g}{l}r^2\right)(r^2-r_0^2)}},$$

d'où l'on tire facilement

$$2d\theta=\frac{d\left[\dfrac{\frac{1}{r^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0^2}+\frac{g}{lv_0^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{g}{lv_0^2}\right)}\right]}{\sqrt{1-\left[\dfrac{\frac{1}{r^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0^2}+\frac{g}{lv_0^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{g}{lv_0^2}\right)}\right]^2}}$$

puis, en intégrant et supposant que θ soit nul pour $t=0$,

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0^2}+\frac{g}{lv_0^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{g}{lv_0^2}\right)\cos 2\theta$$
$$=\frac{1}{r_0^2}\cos^2\theta+\frac{g}{lv_0^2}\sin^2\theta.$$

On voit par là que la projection horizontale de la courbe que décrit le mobile est une ellipse dont les deux demi-axes sont

r_0 et $v_0\sqrt{\frac{l}{g}}$. La projection horizontale du mobile décrivant cette ellipse conformément au théorème des aires, qu'exprime la seconde des équations (e), on obtiendra le temps employé par le pendule à faire une révolution complète autour de la verticale, en divisant l'aire de l'ellipse, ou $\pi r_0v_0\sqrt{\frac{l}{g}}$, par l'aire décrite dans l'unité de temps, qui est $\frac{1}{2}$C ou $\frac{1}{2}r_0v_0$: on trouve ainsi

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

pour ce temps d'une révolution complète du pendule conique. On peut observer que cette expression est indépendante de la vitesse initiale v_0, en sorte qu'elle convient également au cas où l'on aurait

$$v_0=0;$$

c'est-à-dire qu'elle représente le temps employé par un pendule circulaire de longueur l à faire deux oscillations complètes, en supposant que ces oscillations aient une amplitude très petite : on retrouve ainsi la formule qui donne la durée des petites oscillations du pendule circulaire (§ 132).

§ 138. **Force d'inertie.** — Dans ce qui précède, nous avons considéré le mouvement d'un point matériel comme étant assujetti à satisfaire à certaines conditions ; nous avons supposé, ou bien que ce point matériel était obligé de se mouvoir suivant une trajectoire déterminée (§§ 127 à 133), ou bien que sa trajectoire était nécessairement située sur une surface donnée (§§ 134 à 137). Allons plus loin, et supposons qu'un point matériel A soit obligé, par sa liaison avec un autre corps B en mouvement, non seulement de décrire une trajectoire donnée, mais encore de parcourir cette courbe avec des vitesses successives dont la loi est entièrement déterminée. Pour fixer les idées, nous pouvons imaginer qu'il s'agisse, par exemple, d'un corps que l'on tient dans la main, et auquel on donne un mouvement quelconque, sans l'abandonner. Ce point matériel A, auquel nous supposons d'ailleurs qu'aucune force ne soit directement appliquée, réagit sur le corps B qui l'oblige à se mouvoir ainsi, c'est-à-dire sur la main qui l'entraîne, dans le cas de l'exemple qui vient d'être indiqué. La réaction qu'il exerce dans de pareilles circonstances constitue ce qu'on nomme sa *force d'inertie*. Il est aisé d'en trouver la grandeur et la direction.

D'après la forme de la trajectoire que décrit le point matériel A, et la loi du mouvement qu'il possède sur cette courbe, on peut trouver à chaque instant la grandeur et la direction de la force qui devrait agir sur lui, s'il était libre, pour lui procurer le même mouvement. Cette force est dirigée suivant l'accélération totale du mouvement, et elle a pour valeur le produit de l'accélération totale par la masse du point matériel A (§ 98). Or, cette force qui communiquerait au point A le même mouvement, s'il était libre, n'est autre chose que l'action exercée sur ce point par le corps B qui lui donne un mouvement obligatoire; la réaction du point matériel A sur ce corps B, ou, en d'autres termes, la force d'inertie du point matériel A, est donc égale et contraire à la force dont on vient d'indiquer la grandeur et la direction. Ainsi la force d'inertie du point A est égale au produit de la masse de ce point par l'accélération de son mouvement, et elle est dirigée en sens contraire de cette accélération. Il est clair qu'elle s'évalue en kilogrammes comme les autres forces.

La considération de la force d'inertie présente quelque utilité dans diverses circonstances. Donnons-en un exemple simple. Si l'on tire un wagon, au moyen d'une corde, de manière à lui donner un mouvement accéléré sur un chemin de fer rectiligne et horizontal, la corde est plus tendue que s'il s'agissait seulement d'entretenir l'uniformité du mouvement du wagon; la résistance exercée par le wagon sur la corde qui le tire se compose de celle qu'il exercerait s'il avait un mouvement uniforme et de sa force d'inertie. On peut donc dire que, en tirant la corde de manière à produire le mouvement accéléré du wagon, on a à vaincre, non seulement les résistances qui se développent dans

le mouvement uniforme, et qui sont dues aux frottements de toutes sortes, mais encore la force d'inertie du wagon. Si l'on veut ralentir le mouvement du wagon, en le tirant en sens contraire de son mouvement, on a encore à vaincre la force d'inertie, qui agit alors dans le sens du mouvement.

La force d'inertie d'un point matériel en mouvement étant égale et contraire à la force qui devrait agir sur ce point matériel supposé libre pour lui faire prendre le mouvement qu'il possède, on peut la regarder comme étant la résultante de deux forces égales et contraires aux composantes tangentielle et normale de cette dernière force (§ 110). La composante tangentielle de la force d'inertie, qu'on désigne souvent sous le nom de *force d'inertie tangentielle*, a donc pour valeur $m\frac{dv}{dt}$, et est dirigée en sens contraire du mouvement, ou dans le même sens, suivant que $\frac{dv}{dt}$ est positif ou négatif. Sa composante normale est égale à $\frac{mv^2}{\rho}$ et est toujours dirigée en sens contraire du rayon de courbure ρ de la trajectoire ; ce n'est autre chose que la force centrifuge que nous avons déjà trouvée dans le cas d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée, c'est-à-dire dans le cas où la trajectoire était seule obligatoire, et non la loi du mouvement.

On ne doit pas oublier que la force d'inertie d'un point matériel est une réaction exercée par ce point sur le corps qui l'oblige à prendre un mouvement déterminé, et qu'en conséquence cette force n'agit pas sur le point matériel lui-même.