LIVRE TROISIÈME

DYNAMIQUE

DEUXIÈME PARTIE

DE L'ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

CHAPITRE PREMIER

COMPOSITION DES FORCES APPLIQUÉES A UN SOLIDE INVARIABLE.

§ 150. **Constitution moléculaire des corps.** — Tout nous porte à regarder les corps comme des assemblages de molécules, placées à distance les unes des autres, et exerçant les unes sur les autres des actions attractives ou répulsives, suivant les cas. Aucune expérience, aucun phénomène n'a pu jusqu'à présent nous fournir la moindre notion sur les dimensions des molécules dont les corps sont formés ; tout ce que nous pouvons dire, c'est que ces dimensions sont nécessairement d'une extrême petitesse.

Quelque petit que soit un corps, on ne peut le regarder comme étant un simple point matériel, qu'autant qu'on fait abstraction de ses dimensions. En assimilant les molécules des corps à des points matériels, comme nous le ferons toujours dans ce qui suit, nous sortirons donc de la réalité, pour entrer dans le domaine de l'abstraction ; mais nous devons dire de suite que la comparaison des résultats auxquels on est parvenu ainsi avec les phénomènes naturels n'a jamais pu montrer qu'il y eût la moindre erreur produite par cette manière d'envisager les choses : on n'a pas trouvé jusqu'à présent qu'il fût nécessaire de tenir compte des dimensions des molécules, dans l'étude des diverses circonstances que présente le mouvement des corps, de quelque nature qu'ils soient. Les systèmes matériels, qui seront l'objet des théories dont nous allons nous occuper, seront donc toujours des *systèmes de points matériels*. Dans cette seconde partie de la dynamique, nous les considérerons à l'état d'équilibre, c'est-à-dire que nous supposerons que chacun des points matériels dont ils sont formés est en équilibre sous l'action des diverses forces qui lui sont appliquées (§ 104); la troisième partie de la dynamique sera consacrée à l'étude des lois de leur mouvement.

Les corps se présentent à nous, dans la nature, sous trois états différents : ils sont solides, liquides ou gazeux. Les *solides* sont des corps dans lesquels les molécules ont des positions déterminées les unes par rapport aux autres ; on ne peut changer ces positions relatives des molécules qu'en faisant agir sur elles des forces plus ou moins grandes, et si la déformation qu'on a ainsi fait subir au corps ne dépasse pas certaines limites, les molécules reviennent à leur disposition primitive, dès que les forces qui les ont dérangées cessent d'exercer leur action. Dans les liquides et les gaz, au contraire, les molécules sont extrêmement mobiles; la moindre cause les dérange des positions qu'elles occupent les unes par rapport aux autres, et quelque petit que soit le dérangement qu'elles éprouvent ainsi, il ne tend pas à disparaître en même temps que la cause qui l'a produit : c'est cette propriété, commune aux liquides et aux gaz, qui fait qu'on les désigne collectivement sous le nom de *fluides*. Nous aurons à considérer successivement l'application des théories de l'équilibre et du mouvement à chacune de ces deux espèces très distinctes de corps naturels.

§ 151. **Forces intérieures, forces extérieures.** — Nous avons dit (§ 88) que toute force, appliquée à un point matériel A, émane d'un autre point matériel B situé à une distance quelconque du premier. Supposons que le point matériel A soit un de ceux qui composent le système matériel dont nous étudions, soit l'équilibre, soit le mouvement. Si le second point B appartient également à ce système matériel, la force qui agit sur le point A, et qui émane du point B, est une *force intérieure*. Si le point B ne fait pas partie du système matériel dont nous nous occupons, cette force, qui émane du point B, et qui est appliquée au point A, est une *force extérieure*.

Il est clair, d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, que si l'on prend, parmi les forces qui agissent sur les divers points d'un système matériel, toutes celles qui sont des forces intérieures, ces forces sont égales deux à deux et directement opposées.

Une même force peut jouer, tantôt le rôle de force intérieure, tantôt le rôle de force extérieure, suivant les cas. Si l'on considère, par exemple, le mouvement d'un corps qui tombe à la surface de la terre, l'attraction qu'une des molécules de ce corps éprouve de la part d'une molécule quelconque de la terre est une force extérieure; si au contraire on considère le mouvement d'un système matériel formé de la terre tout entière et des divers corps qui se trouvent à sa surface ou dans son voisinage, la même attraction devient une force intérieure.

§ 152. **Ce qu'on entend par solide invariable.** — Avant de nous occuper d'une manière générale de l'étude de l'équilibre d'un système matériel quelconque, nous considérerons d'abord un cas idéal et simple, auquel on peut très souvent ramener les questions d'équilibre qu'on a à traiter. Nous supposerons que le système matériel, dont nous voulons étudier l'équilibre, soit de forme invariable, c'est-à-dire que les divers points matériels qui le composent ne puissent en aucune manière se rapprocher ou s'éloigner les uns des autres ; c'est à un pareil système matériel que nous donnons le nom de *solide invariable*.

Cette invariabilité absolue de forme d'un système matériel ne se rencontre nulle part dans la nature. Il existe, il est vrai, un grand nombre de corps solides qui semblent ne pas éprouver de changement de forme, de quelque manière qu'on cherche à les déformer, pourvu toutefois que les forces qu'on leur applique ne dépassent pas certaines limites; mais, si ces corps paraissent conserver la forme qu'ils avaient tout d'abord, malgré l'action des forces qui tendent à la leur faire perdre, c'est uniquement parce que la déformation qu'ils éprouvent est trop faible pour être aperçue : cette déformation n'en existe pas moins, quelque petites que soient les forces qui tendent à la produire. Pour distinguer les corps solides qui existent dans la nature, et qui sont toujours plus ou moins déformables sous l'action des forces qui leur sont appliquées, des systèmes matériels auxquels nous attribuons une invariabilité absolue de forme, nous désignerons les premiers sous le nom de *solides naturels*.

Les théories que nous allons exposer dans ce chapitre et dans les deux suivants se rapportent exclusivement aux solides invariables, considérés à l'état d'équilibre.

§ 153. **Une force peut être appliquée en un point quelconque de sa direction, sans que son effet soit changé.** — Pour établir cette proposition, nous admettrons comme évident que deux forces égales, qui sont appliquées en deux points différents d'un même solide invariable, suivant la ligne droite qui joint ces deux points, et en sens contraire l'une de l'autre, se font équilibre ; en sorte que, si le corps dont il s'agit est en repos avant que ces forces lui soient appliquées, les actions simultanées de ces deux forces ne le feront pas sortir de son état de repos.

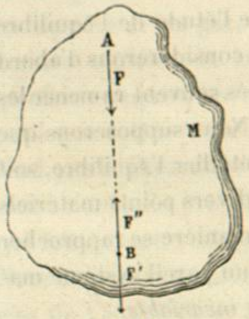

Fig. 72.

Cela posé, soit M, *fig*. 72, un solide invariable en équilibre sous l'action de diverses forces. Considérons en particulier une de ces forces, F, appliquée au point A. Prenons un point B sur la direction de cette force F, et appliquons-y deux forces F', F'', égales à F, et agissant en sens contraire l'une de l'autre, suivant la direction AB : ces deux nouvelles forces, se faisant évidemment équilibre, ne troubleront pas l'état d'équilibre dans lequel se

trouvait le corps M avant leur application. Mais les deux forces F, F'', qui sont égales et qui agissent en sens contraire l'une de l'autre, suivant la droite AB menée par leurs points d'application, se font aussi équilibre, d'après ce que nous avons admis il n'y a qu'un instant : on peut donc les supprimer sans que le corps M cesse d'être en équilibre. Des trois forces F, F', F'', il ne reste plus dès lors que la force F', qui se trouve ainsi substituée à la force F que nous avions considérée tout d'abord. On voit donc qu'une force, qui agit sur un point d'un solide invariable en équilibre, peut être appliquée en un autre point pris sur sa direction, sans que son effet cesse d'être le même, puisque l'équilibre du corps n'est pas troublé par ce changement du point d'application de la force.

Dans le raisonnement que nous venons de faire, nous avons supposé que le point B, pris sur la direction de la force F, faisait partie du corps M. Mais cela n'est pas nécessaire. La force F peut être appliquée en un point quelconque de sa direction, appartenant au corps M, ou situé en dehors de ce corps, pourvu que, dans ce dernier cas, le point sur lequel on transporte l'action de la force F soit lié invariablement au corps M.

§ 154. **Composition des forces concourantes.** — Lorsque, parmi les forces qui agissent sur un solide invariable en équilibre, il y en a plusieurs F, F', F'',... *fig*. 73, dont les directions concourent en un même point O, ces forces F, F', F'',... peuvent être remplacées par une force unique qui est leur résultante. En effet, chacune de ces forces peut être transportée, du point sur lequel elle agit, au point O pris sur sa direction (§ 153) ; et alors ces diverses forces, agissant sur un même point O, peuvent être composées en une seule, au moyen du parallélogramme des forces, ou du parallélipipède des forces, ou bien encore du polygone des forces, suivant les cas (§ 99). La résultante R, ainsi obtenue, peut d'ailleurs être appliquée en un point quel-

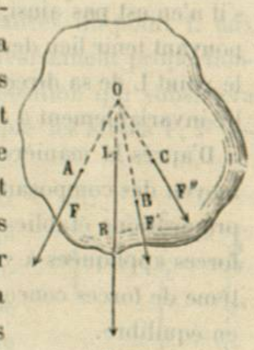

Fig. 73.

conque L de sa direction. La force R, appliquée au point L, peut donc remplacer complètement les forces F, F′, F″, appliquées aux points A, B, C.....

Il n'est pas nécessaire que le point O, par lequel vont passer les directions des forces F, F′, F″,... fasse partie du solide invariable soumis à l'action de ces forces, pour qu'on puisse leur substituer la force R. On conçoit en effet que, pour faire le raisonnement qui précède, on peut supposer que le point O soit invariablement lié au corps; mais que, dès qu'on a trouvé ainsi une force R, qui, en agissant sur un point L du corps, peut tenir lieu des forces F, F′, F″,... appliquées aux points A, B, C,... on n'a plus besoin de se préoccuper de l'hypothèse qu'on a faite sur le point O pour y arriver : la liaison qu'on avait admise entre ce point O et le corps peut être supprimée, sans que les forces F, F′, F″,... et R cessent d'exercer leur action dans les mêmes conditions, et par conséquent sans que la dernière de ces forces cesse de pouvoir remplacer les autres. Nous devons observer cependant que la substitution de la force R aux forces F, F′, F″,... ne peut se faire d'une manière absolue qu'autant que la direction de cette force R vient à passer par quelqu'un des points du corps auquel les forces F, F′, F″,... sont appliquées; s'il n'en est pas ainsi, on ne peut regarder la force R comme pouvant tenir lieu des forces F, F′, F″,... qu'en admettant que le point L de sa direction auquel on la suppose appliquée est lié invariablement à ce corps.

D'après la manière dont la résultante R a été obtenue au moyen des composantes F, F′, F″,... il est clair que toutes les propositions établies précédemment (§§ 100 à 103), pour les forces appliquées à un même point, sont vraies pour un système de forces concourantes appliquées à un solide invariable en équilibre.

§ 155. **Composition des forces parallèles.** — Pour arriver à la composition de deux forces appliquées à un solide invariable, suivant des directions parallèles, et dans le même sens, considérons deux forces F, F′, *fig.* 74, appliquées à deux points A et B d'un pareil solide, suivant des directions concourantes.

On trouve la résultante R de ces deux forces F, F′, en construisant le parallélogramme OCDE sur les deux lignes OC, OD qui les représentent. Supposons que les directions des forces F, F′ changent peu à peu, en passant toujours par les points A et B, de telle manière que ces directions, toujours comprises dans un même plan, s'approchent de plus en plus de devenir parallèles; le parallélogramme OCDE se déformera en même temps, et la résultante R, qui est représentée par la diagonale OE, se modifiera en conséquence.

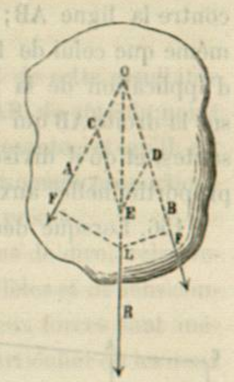

Fig. 74.

Il est clair d'après cela que, lorsque les directions des forces F, F′ seront parallèles, la résultante R sera égale à la somme de ces deux forces, et en outre sa direction sera parallèle à celle de chacune des composantes. Observons de plus que, d'après le théorème des moments relatif au cas de deux forces appliquées à un même point (§ 101), la somme des moments de force F, F′, par rapport au point d'application L de leur résultante, est égale à zéro, puisque le moment de la résultante R par rapport à ce point est nul; on en déduit immédiatement que les distances du point L aux directions des deux forces F, F′, sont inversement proportionnelles aux grandeurs de ces forces, proposition qui subsistera encore, sans aucune modification, lorsque les forces F, F′ seront devenues parallèles.

On conclut de ce qui précède que deux forces parallèles et de même sens F, F′, appliquées à deux points A et B d'un solide invariable, *fig.* 75, ont une résultante R égale à leur somme, et dirigée dans leur plan parallèlement à chacune d'elles, et dans le même sens; de plus les distances LM, LN du point d'application L de cette résultante aux directions des deux forces F, F′, sont inversement proportionnelles aux grandeurs de ces forces.

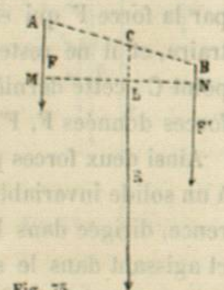

Fig. 75.

La force R peut être appliquée au point C, où sa direction rencontre la ligne AB; et comme le rapport de CA à CB est le même que celui de LM à LN, on peut dire encore que le point d'application de la résultante des deux forces F, F' est situé sur la droite AB qui joint les points d'application des composantes, et qu'il divise cette droite en deux parties inversement proportionnelles aux grandeurs de ces composantes.

§ 156. Lorsque deux forces F, F', *fig.* 76, sont appliquées à deux points A et B d'un solide invariable, suivant des directions parallèles et en sens contraire l'une de l'autre, ces forces ont une résultante que l'on obtient de la manière suivante. Soit F la plus grande des deux forces données. On peut regarder cette force F comme résultant de la composition de deux forces parallèles et de même sens, dont l'une, égale à F', soit appliquée au point B, et l'autre, égale à F — F', soit appliquée à un point C convenablement choisi sur le prolongement de la ligne BA; on devra avoir pour cela

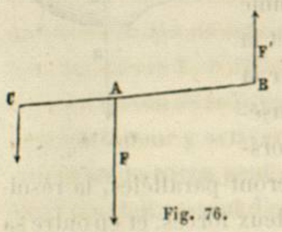

Fig. 76.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{F'}{F - F'}.$$

Si l'on remplace la force F par les deux composantes dont on vient de parler, la première de ces composantes sera détruite par la force F' qui est déjà appliquée au point B en sens contraire, et il ne restera plus que la force F — F' appliquée au point C : cette dernière force est donc la résultante des deux forces données F, F'.

Ainsi deux forces parallèles et de sens contraires, appliquées à un solide invariable, ont une résultante égale à leur différence, dirigée dans leur plan, parallèlement à chacune d'elles, et agissant dans le sens de la plus grande des deux composantes; et, si l'on observe que, de la proportion écrite ci-dessus, on déduit cette autre proportion

$$\frac{CA}{CB} = \frac{F}{F'},$$

on peut dire que le point d'application C de cette résultante est situé sur le prolongement de la droite AB, du côté du point d'application A de la plus grande composante, et qu'il est éloigné des points A et B de quantités inversement proportionnelles aux forces qui sont appliquées à ces points.

Il est aisé de voir que ce que nous venons de dire, relativement à la composition des deux forces parallèles et de sens contraires, suppose essentiellement que ces deux forces sont inégales. Si l'on voulait passer de là au cas particulier où les deux forces sont égales, en supposant que la plus grande des deux décroît progressivement jusqu'à devenir égale à la plus petite, on trouverait que, dans ce cas particulier, la résultante est nulle et a son point d'application à une distance infinie des points d'application des deux composantes : cela signifie évidemment que les systèmes des deux forces égales, appliquées à un solide invariable, suivant des directions parallèles, et en sens contraire l'une de l'autre, ne peut pas être remplacé par une force unique, c'est-à-dire que ces deux forces n'ont pas de résultante. Un pareil système de forces constitue ce qu'on nomme un *couple*.

§ 157. Considérons maintenant un nombre quelconque de forces parallèles, appliquées en différents points d'un solide invariable, et cherchons à déterminer la résultante de toutes ces forces, s'il y en a une.

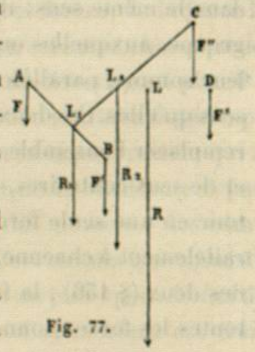
Fig. 77.

Si toutes les forces parallèles dont il s'agit sont dirigées dans un même sens, on trouvera leur résultante en opérant de la manière suivante. On composera d'abord deux des forces données, F et F', par exemple, *fig.* 77, en une seule force R_1, qui sera égale à F + F', et dont le point d'application L_1 divisera la ligne

AB en deux parties inversement proportionnelles aux forces F et F′; puis on composera cette résultante partielle R_1 avec une troisième des forces données, avec F″ par exemple, ce qui donnera une deuxième résultante partielle R_2 égale à $R_1 + F''$ ou bien à $F + F' + F''$, et appliquée en un point L_2 tel que L_1L_2 et CL_2 soient inversement proportionnels à R_1 et F″; ensuite on composera la deuxième résultante partielle R_2 avec une quatrième force F‴; et ainsi de suite. Il est clair que, en continuant de cette manière, on arrivera toujours à une force unique R qui pourra tenir lieu de toutes les forces données, et qui sera par conséquent la résultante de ce système de forces. Cette résultante R sera égale à la somme des composantes F, F′, F″,..., parallèle à chacune d'elles, et dirigée dans le même sens; son point d'application se déduira de la série des opérations qui déterminent successivement les divers points d'application L_1, L_2,... des résultantes partielles R_1, R_2...

Si les diverses forces parallèles qu'on se propose de composer entre elles ne sont pas dirigées toutes dans le même sens, on les partagera en deux groupes formés, l'un de celles qui agissent dans un sens, l'autre de celles qui agissent dans le sens opposé. Toutes les forces du premier groupe pourront être remplacées, d'après ce que nous venons de dire, par une force unique R′ égale à leur somme, dirigée parallèlement à chacune d'elles, et dans le même sens; il en sera de même des forces du second groupe, auxquelles on pourra substituer une force R″ égale à leur somme, parallèle à leur direction commune, et de même sens qu'elles. Ces deux résultantes partielles R′, R″, qui peuvent remplacer l'ensemble des forces données, et qui sont parallèles et de sens contraires, peuvent en général se composer à leur tour en une seule force R égale à leur différence, agissant parallèlement à chacune d'elles, et dans le sens de la plus grande des deux (§ 156) : la force R ainsi obtenue est la résultante de toutes les forces données. Dans le cas particulier où les résultantes partielles R′, R″ seraient égales entre elles, sans agir suivant la même ligne droite, on ne pourrait pas les remplacer par une force unique, et alors le système des forces données se réduirait à un couple formé par les deux forces R′, R″. Si les deux forces R′, R″ étaient égales et agissaient suivant la même ligne droite, comme elles sont de sens contraires, elles se détruiraient mutuellement, ce qui revient à dire qu'elles auraient une résultante nulle : le système des forces données aurait donc une résultante nulle.

§ 158. **Théorème des moments d'un système de forces parallèles par rapport à un plan.** — Nous avons vu (§ 103) que le moment de la résultante de deux forces appliquées à un point, par rapport à une droite quelconque, est égal à la somme des moments des composantes par rapport à la même droite. Cette proposition est d'ailleurs applicable au cas de deux forces appliquées en deux points différents d'un solide invariable, suivant des directions concourantes (§ 154); et par suite on peut l'appliquer au cas de deux forces parallèles et de même sens, qui est compris comme cas particulier dans le précédent (§ 155).

Supposons que nous choisissions la droite D, par rapport à laquelle nous prenons les moments de deux forces parallèles et de même sens F, F′, et de leur résultante R, de telle manière que sa direction fasse un angle droit avec celle des forces; imaginons en outre que nous menions par cette droite D un plan P parallèle aux directions des forces F, F′, R. Il est aisé de voir que le moment de l'une quelconque de ces forces, de la force F par exemple, par rapport à la droite D, n'est autre chose que le produit de la force F par la distance de sa direction au plan P : ce produit est ce qu'on nomme le moment de la force F par rapport au plan P. On peut donc dire, d'après la proposition qui a été rappelée ci-dessus, que le moment de la résultante R par rapport au plan P est égal à la somme des moments des composantes F, F′, par rapport à ce plan. C'est en cela que consiste le théorème des moments par rapport à un plan, pour le cas de deux forces parallèles et de même sens. Ce théorème est vrai, quelle que soit la position du plan P relativement aux droites suivant lesquelles agissent les forces F, F′, R, et auxquelles il est parallèle, pourvu qu'on attribue un signe convenable au mo-