ment de chacune des forces par rapport à ce plan. La manière dont ce signe doit être déterminé résulte de ce qui a été dit (§ 103) relativement au signe que l'on doit attribuer au moment d'une force par rapport à une droite : il est aisé de voir que le moment d'une force par rapport à un plan parallèle à sa direction doit être affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que la force est placée d'un côté ou de l'autre du plan.

Après avoir établi le théorème qui précède, dans le cas de deux forces parallèles et de même sens, nous allons l'étendre au cas d'un système quelconque de forces parallèles. Pour cela nous considérerons d'abord le cas de deux forces parallèles et de sens contraires F, F′, *fig*. 76 (page 246). Nous savons que la résultante R de ces deux forces s'obtient en décomposant la force F, que nous supposons plus grande que F′, en deux composantes parallèles et de même sens, dont l'une, égale à F′, soit appliquée au point B, et l'autre soit appliquée en un point C convenablement choisi sur le prolongement de la ligne BA : cette seconde composante de la force F est précisément la résultante cherchée R. Nous pouvons donc dire que le résultat de la force donnée F, par rapport à un plan quelconque P parallèle à sa direction, est égal au moment de la résultante R par rapport à ce plan P augmenté du moment d'une force égale et directement opposée à la seconde force donnée F′ par rapport au même plan ; ou en d'autres termes, le moment de la résultante R, par rapport au plan P, est égal au moment de la force F par rapport à ce plan, diminué du moment d'une force égale et contraire à la force F′, par rapport à ce plan P. Mais si nous convenons de regarder les moments de deux forces de même direction et de sens opposés, par rapport à un même plan parallèle à leur direction commune, comme étant de signes contraires, nous pourrons modifier ce dernier énoncé, et dire que le moment de la résultante R par rapport au plan P est égal à la somme des moments de ses deux composantes F, F′ par rapport à ce plan. Le théorème établi pour le cas de deux forces parallèles et de même sens se trouve donc vrai aussi dans le cas de deux forces parallèles et de sens contraires, au moyen de la convention que nous venons de faire

relativement aux signes des moments des forces qui agissent dans les sens opposés.

Le moment de la résultante de deux forces parallèles, par rapport à un plan parallèle à leur direction, étant toujours égal à la somme des moments des composantes par rapport à ce plan, soit que les composantes agissent dans un même sens, soit qu'elles agissent dans des sens contraires, on en conclut nécessairement que le moment de la résultante d'un système quelconque de forces parallèles, par rapport à un plan quelconque parallèle à leur direction, est égal à la somme des moments des diverses composantes, par rapport à ce plan. Il suffit pour cela d'observer que l'on trouve la résultante d'un pareil système de forces en effectuant successivement, et un nombre convenable de fois, la composition de deux forces parallèles de même sens ou de sens contraires (§ 157), et d'appliquer le théorème des moments, établi précédemment, à chacune de ces compositions successives.

Pour donner aux moments de diverses forces parallèles de même sens ou de sens contraires, par rapport à un plan P parallèle à leur direction, les signes qu'on doit leur attribuer d'après les conventions établies, on peut opérer de la manière suivante. On considérera la distance de la direction d'une force au plan P, auquel cette force est parallèle, comme étant positive ou négative, suivant que cette direction est d'un côté ou de l'autre du plan ; on considérera en outre la force elle-même comme étant positive ou négative, suivant qu'elle agit dans un sens ou dans le sens opposé ; le produit de la force par la distance de sa direction au plan P se trouvera par là affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant les cas, et il est aisé de s'assurer que son signe sera toujours celui qu'il doit avoir d'après les conventions établies précédemment.

§ 159. **Réduction d'un système quelconque de forces à deux forces.** — Un système quelconque de forces, appliquées à un solide invariable, peut toujours être remplacé par deux forces seulement, dont une agit sur un point choisi à volonté.

Pour démontrer ce théorème, prenons à volonté, dans le solide, trois points A, B, C, non situés en ligne droite, *fig*. 78. Une force quelconque F, appliquée au solide, et non dirigée dans le plan ABC, peut toujours être décomposée en trois autres dirigées suivant les lignes MA, MB, MC, qui joignent les points A, B, C, à un point pris sur la direction de la force F, en dehors du plan ABC (§§ 99 et 45); et l'on peut supposer que ces trois composantes soient appliquées aux points A, B, C, eux-mêmes. Si la force F était dirigée dans le plan ABC, on ne pourrait pas trouver sur sa direction un point M situé en dehors de ce plan; il est aisé de voir que, dans ce cas particulier, on pourrait toujours regarder la force F comme la résultante de trois forces appliquées aux points A, B, C : on pourrait, par exemple, joindre un point M de sa direction aux deux points A et B, la décomposer en deux forces agissant suivant MA et MB, et considérer ces deux composantes appliquées aux points A, B, et une force nulle appliquée au point C, comme étant les trois composantes de cette force F appliquées aux points A, B, C. Si l'on fait pour toutes les forces données ce qui vient d'être indiqué pour la force F, chacune d'elles fournira trois composantes appliquées aux points A, B, C; le système des forces données sera donc remplacé par un autre système de forces dont chacune agira sur un des points A, B, C. Toutes les forces appliquées au point A peuvent être composées en une seule; et il en est de même de celles qui sont appliquées au point B, et aussi de celles qui agissent sur le point C : on n'aura donc plus que trois forces appliquées respectivement aux points A, B, C, au lieu du système quelconque de forces qu'on avait primitivement. Reste maintenant à faire voir que ces trois forces pourront toujours se réduire à deux.

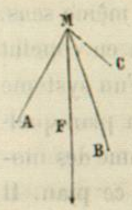

Fig. 78.

Soient Q, Q′, Q″, *fig*. 79, les trois forces auxquelles on vient de parvenir. Faisons passer un plan par le point A et par la direction de la force Q′; puis un autre plan par le même point A et par la direction de la force Q″ : ces deux plans se couperont

suivant une ligne GH passant par le point A. Supposons que la ligne GH rencontre une au moins des directions des deux forces Q′, Q″, celle de Q′ par exemple, et soit B′ le point de rencontre; l'autre force Q″ pourra toujours se décomposer en deux forces agissant suivant les lignes CA, CB′ menées du point C aux deux points A, B′, et ces deux forces pourront être appliquées aux points A, B′ eux-mêmes; la force Q se composera alors avec celle de ces deux forces qui agira sur le point A, et la force Q′ avec celle qui agira sur le point B′ : on n'aura donc plus en tout que deux forces, appliquées, l'une au point A, l'autre au point B′. Si aucune des directions des deux forces Q′, Q″ ne rencontrait la ligne GH, il suffirait de décomposer préalablement la force Q′ en deux autres Q'_1, Q'_2, dont l'une Q'_1 agit sur le point A, et l'autre Q'_2 agit sur un autre point quelconque de la ligne GH, pour que toute difficulté disparût : car alors on pourrait raisonner sur la résultante des forces Q, Q'_1, appliquées au point A, et sur les deux forces Q'_2, Q″, comme on vient de le faire sur les trois forces Q, Q′, Q″.

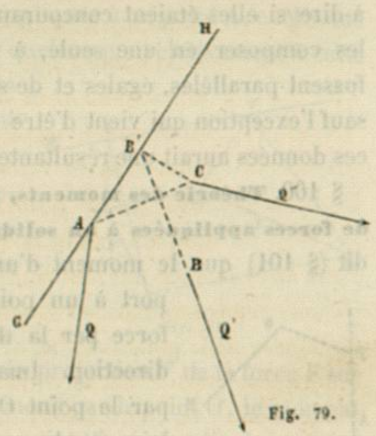

Fig. 79.

Il est donc établi par là qu'un système quelconque de forces appliquées à un solide invariable peut toujours être remplacé par deux forces; et l'on peut observer que l'une de ces deux forces agit sur un point A pris à volonté, puisque ce point est un des trois points A, B, C, que nous avions choisis arbitrairement tout d'abord en les assujettissant à la seule condition de ne pas être tous trois sur une même ligne droite. Il est bien entendu que le point A, que nous pouvons prendre à volonté comme point d'application d'une des deux forces auxquelles nous réduisons le système des forces données, doit faire partie du solide auquel ces forces sont appliquées; ou bien que, s'il ne fait pas partie de ce solide, on doit supposer qu'il lui est lié d'une manière invariable.

Si les deux forces auxquelles on a réduit le système des forces données se trouvaient dirigées dans un même plan, c'est-à-dire si elles étaient concourantes ou parallèles, on pourrait les composer en une seule, à moins cependant qu'elles ne fussent parallèles, égales et de sens opposés : dans ce cas, et sauf l'exception qui vient d'être indiquée, le système des forces données aurait une résultante unique.

§ 160. **Théorie des moments, pour un système quelconque de forces appliquées à un solide invariable.** — Nous avons dit (§ 101) que le moment d'une force F, *fig.* 80, par rapport à un point O, c'est le produit de la force par la distance OP du point O à sa direction. Imaginons que nous menions par le point O une ligne ON perpendiculaire au plan qui passe par ce point et par la force F ; que nous donnions à cette ligne une longueur telle que sa valeur numérique, rapportée à une certaine unité prise arbitrairement, soit la même que celle du moment de la force F par rapport au point O; enfin, que nous portions cette ligne dans un sens tel que, si l'on se place en O et qu'on regarde dans la direction ON, on voie le mouvement de rotation que la force F tend à donner à la ligne OP autour du point O se diriger dans un sens déterminé, par exemple dans le sens dans lequel on voit tourner les aiguilles d'une horloge : cette ligne ON, qui représente à la fois la direction du plan mené par le point O et la force F, le moment de cette force F par rapport au point O et le sens de la rotation que la force tend à produire autour de ce point, se nomme l'*axe* du moment de la force F par rapport au point O.

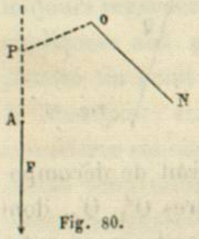

Fig. 80.

Le moment d'une force par rapport à une droite (§ 103) n'est autre chose que le moment de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à la droite, par rapport au point où ce

plan perpendiculaire est percé par la droite : ce moment peut donc être représenté par un axe, tout aussi bien que celui d'une force par rapport à un point. Dans ce cas, l'axe du moment est dirigé suivant la droite même à laquelle le moment se rapporte.

Soient F, *fig.* 81, une force appliquée à un point A, et MN une droite dirigée d'une manière quelconque relativement à cette force. Prenons le moment de la force F par rapport à un point quelconque O de la droite MN : ce moment sera numériquement égal au double de la surface du triangle OAB, obtenu en joignant le point O aux extrémités de la ligne AB qui représente la force F. Si nous considérons la projection F' de la force F sur un plan perpendiculaire à MN mené par le point O', le moment de cette force F' par rapport au point O', c'est-à-dire le moment de la force F par rapport à la droite MN, sera aussi numériquement égal au double de la surface du triangle O'A'B'. Mais ce dernier triangle est la projection du triangle OAB sur le plan perpendiculaire à MN mené par O' : donc, le moment de la force F par rapport à la droite MN s'obtient en multipliant le moment de cette force par rapport au point O par le cosinus de l'angle que la perpendiculaire au plan AOB fait avec la ligne MN perpendiculaire au plan A'O'B'. On en conclut évidemment que l'axe du moment de la force F par rapport à la droite MN, a la même grandeur et le même sens que la projection de l'axe du mouvement de F relatif au point O sur la droite MN.

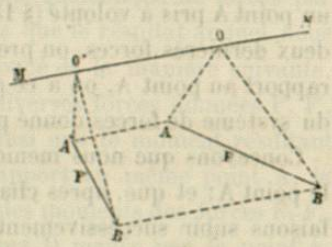

Fig. 81.

Si par un point O on mène plusieurs droites, et qu'on veuille trouver les moments d'une même force F par rapport à ces droites, il suffira de prendre l'axe du moment de la force F par rapport au point O, et de le projeter sur les diverses droites dont il s'agit : les projections ainsi obtenues seront les axes des moments cherchés. On voit par là que, de tous les moments de la force F par rapport aux différentes droites qu'on peut mener par un même point O, c'est celui qui se rapporte à la perpendiculaire au plan conduit par ce point et par la direction de la force F qui est le plus grand.

§ 161. Un système quelconque de forces F, F′, F″..... appliquées à un solide invariable étant donné, on peut toujours le remplacer par deux forces R_1, R_2, dont l'une R_1 agisse sur un point A pris à volonté (§ 159). Si, après avoir déterminé ces deux dernières forces, on prend le moment de la force R_2 par rapport au point A, on a ce qu'on nomme le *moment résultant* du système de forces donné par rapport à ce point A.

Concevons que nous menions une droite quelconque D par le point A; et que, après chacune des modifications que nous faisons subir successivement au système des forces F, F′, F″...., pour le réduire en définitive aux deux forces R_1, R_2, nous fassions la somme des moments des forces auxquelles il a été ramené par rapport à cette droite D. Cette somme de moments devra toujours avoir la valeur qu'elle avait primitivement, c'est-à-dire avant qu'on ait commencé à modifier le système des forces données. En effet, quand on transporte une force d'un point à un autre de sa direction, on ne change évidemment pas le moment de cette force par rapport à la droite D; quand on compose en une seule plusieurs forces appliquées à un même point suivant des directions quelconques, on obtient ainsi une force unique dont le moment par rapport à la droite D est égal à la somme des moments de ses composantes par rapport à la même droite (§ 103); et de même, quand on décompose une force en plusieurs autres, suivant des directions quelconques passant par son point d'application, on trouve un système de forces dont les divers moments, par rapport à la droite D, ont une somme égale au moment de la force unique à laquelle on les substitue : or ces opérations sont les seules qu'on ait à faire successivement, pour réduire le système des forces données F, F′, F″,... aux deux forces R_1, R_2 (§ 159). On conclut de là que la somme des moments des forces F, F′, F″,..., par rapport à la droite D, est

égale à la somme des moments des deux forces R_1, R_2, par rapport à cette droite, c'est-à-dire égale au mouvement de la force R_2 seule, puisque la force R_1 agit sur un point A appartenant à la droite D.

En nous reportant au théorème démontré dans le paragraphe précédent (§ 160), et à la définition que nous avons donnée du moment résultant d'un système quelconque de forces par rapport à un point, nous verrons que le résultat auquel nous venons de parvenir peut être énoncé de la manière suivante. Si l'on prend les moments des diverses forces données F, F′, F″,... par rapport au point A, ainsi que le moment résultant du système de ces forces par rapport au même point A, la somme des projections des axes des moments des forces F, F′, F″,....., sur une droite quelconque D menée par le point A, est égale à la projection de l'axe du moment résultant sur cette même droite.

Cette proposition nous conduit immédiatement à une autre dont voici l'énoncé : Si nous prenons les axes des moments des forces données F, F′, F″,..... par rapport au point A, et que nous composions ces axes entre eux comme s'ils représentaient des forces agissant sur un même point matériel (§ 99), l'axe résultant fourni par cette composition sera précisément l'axe du moment résultant du système des forces F, F′, F″,... par rapport au point A. En effet, cet axe résultant est la seule ligne partant du point A, dont la projection sur une droite D, menée par ce point, soit égale à la somme des projections des axes des moments de forces F, F′, F″,..... sur la même droite, quelle que soit la direction que l'on donne à cette ligne D sur laquelle on projette ces axes. On voit par là que les moments de diverses forces, par rapport à un point, se composent entre eux en appliquant tout simplement les règles du parallélogramme, du parallélipipède, ou du polygone des forces, aux axes qui représentent ces moments, quant à leur grandeur, leur direction et leur sens.

Dans tout ce que nous venons de dire, on ne doit, bien entendu, attribuer des signes aux moments des forces, qu'autant que ces moments se comptent dans le même plan ou dans des plans parallèles ; on ne doit considérer que la valeur absolue des moments dont les plans ont des directions différentes. Les axes des moments devront donc être traités comme on le fait toujours pour les longueurs rectilignes, auxquelles on n'attribue de signes que quand elles se comptent suivant des directions déterminées.

CHAPITRE II

CENTRES DE GRAVITÉ

§ 162. **Centre des forces parallèles.** — Reportons-nous à ce que nous avons dit (§ 157) relativement à la composition d'un système quelconque de forces parallèles F, F′, F″, F‴,..... appliquées à divers points A, B, C, D,..... d'un solide invariable (fig. 77, *page* 247). Les positions des points d'application L_1, L_2,..... des résultantes partielles R_1, R_2,....., et par suite celle du point d'application L de la résultante définitive R, ne dépendent en aucune manière de la direction des forces : la connaissance des points A, B, C, D,..... auxquels les composantes F, F′, F″, F‴,..... sont appliquées, et des rapports de grandeur de ces forces, suffit pour déterminer les points L_1, L_2,.... L. On en conclut nécessairement que si l'on changeait la direction des forces données, en les laissant toujours parallèles à elles-mêmes, et leur conservant leurs grandeurs respectives, ainsi que leurs points d'application A, B, C, D,..... le point d'application L de la résultante ne changerait pas. Ce point L, par lequel passe constamment la direction de la résultante d'un système de forces parallèles, de quelque manière qu'on incline les composantes par rapport à leurs directions primitives, se nomme le *centre des forces parallèles*.

Supposons que les divers points A, B, C, D,... soient rapportés à un système d'axes coordonnés rectangulaires. Soient x, y, z, les coordonnées du point A ; x', y', z', les coordonnées du point