tant que ces moments se comptent dans le même plan ou dans des plans parallèles ; on ne doit considérer que la valeur absolue des moments dont les plans ont des directions différentes. Les axes des moments devront donc être traités comme on le fait toujours pour les longueurs rectilignes, auxquelles on n'attribue de signes que quand elles se comptent suivant des directions déterminées.

CHAPITRE II

CENTRES DE GRAVITÉ

§ 162. **Centre des forces parallèles.** — Reportons-nous à ce que nous avons dit (§ 157) relativement à la composition d'un système quelconque de forces parallèles F, F', F'', F''',..... appliquées à divers points A, B, C, D,..... d'un solide invariable (fig. 77, *page* 247). Les positions des points d'application L_1, L_2,..... des résultantes partielles R_1, R_2,....., et par suite celle du point d'application L de la résultante définitive R, ne dépendent en aucune manière de la direction des forces : la connaissance des points A, B, C, D,..... auxquels les composantes F, F', F'', F''',..... sont appliquées, et des rapports de grandeur de ces forces, suffit pour déterminer les points L_1, L_2,..... L. On en conclut nécessairement que si l'on changeait la direction des forces données, en les laissant toujours parallèles à elles-mêmes, et leur conservant leurs grandeurs respectives, ainsi que leurs points d'application A, B, C, D,..... le point d'application L de la résultante ne changerait pas. Ce point L, par lequel passe constamment la direction de la résultante d'un système de forces parallèles, de quelque manière qu'on incline les composantes par rapport à leurs directions primitives, se nomme le *centre des forces parallèles*.

Supposons que les divers points A, B, C, D,... soient rapportés à un système d'axes coordonnés rectangulaires. Soient x, y, z, les coordonnées du point A ; x', y', z', les coordonnées du point

B ;..... et enfin x_1, y_1, z_1, celles du point L. Si nous donnons aux diverses forces F, F′, F″,..... des directions parallèles à une droite quelconque tracée dans le plan des yz, et que nous exprimions ensuite que le moment de la résultante R par rapport à ce plan est égal à la somme des moments de ses composantes par rapport au même plan (§ 158), nous trouverons la relation

$$Rx_1 = Fx + F'x' + F''x'' + \ldots = \Sigma Fx.$$

En ramenant successivement les forces F, F′, F″,... à être parallèles à une droite tracée dans le plan des xz, puis à une droite tracée dans le plan des xy, et appliquant le même théorème des moments, dans chacun de ces deux cas, on trouvera également

$$Ry_1 = Fy + F'y' + F''y'' + \ldots = \Sigma Fy,$$
$$Rz_1 = Fz + F'z' + F''z'' + \ldots = \Sigma Fz.$$

Si l'on observe maintenant que l'on a

$$R = F + F' + F'' + \ldots = \Sigma F,$$

on en conclura les formules suivantes, pour déterminer les coordonnées x_1, y_1, z_1, du centre des forces parallèles :

$$x_1 = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F}, \quad y_1 = \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F}, \quad z_1 = \frac{\Sigma Fz}{\Sigma F}.$$

§ 163. **Centre de gravité d'un solide invariable.** — Considérons un corps placé à la surface de la terre, et ayant des dimensions très petites relativement à celles du globe terrestre. Nous pourrons regarder les actions de la pesanteur sur les diverses molécules dont il est formé comme étant parallèles entre elles et proportionnelles aux masses de ces molécules. Dès lors, si nous admettons que ce corps puisse être traité comme un solide invariable, il y aura lieu d'appliquer ce que nous venons de dire relativement au centre des forces parallèles. Nous ne pouvons pas, il est vrai, changer à volonté la direction de la pesanteur, comme nous avons supposé qu'on le fît pour arriver à la notion du centre des forces parallèles ; mais nous

pouvons faire quelque chose d'équivalent, en changeant la position du corps, en le tournant successivement de différentes manières. Dans ce cas, où les forces parallèles appliquées au solide invariable sont les actions de la pesanteur sur les diverses molécules qui le composent, le centre des forces parallèles prend le nom de *centre de gravité*.

Désignons par p le poids d'une molécule quelconque du solide, par x, y, z, les coordonnées de cette molécule ; par x_1, y_1, z_1, les coordonnées du centre de gravité, et par P le poids total du solide. Nous aurons pour déterminer x_1, y_1, z_1, les relations

$$x_1 = \frac{\Sigma px}{P}, \quad y_1 = \frac{\Sigma py}{P}, \quad z_1 = \frac{\Sigma pz}{P}.$$

Mais, si nous représentons par m la masse de la molécule dont le poids est p, et par M la masse totale du corps, nous pourrons remplacer p par mg ; et P par Mg ; en supprimant alors le facteur g commun aux deux termes de chacune des fractions précédentes, nous arrivons aux formules

$$x_1 = \frac{\Sigma mx}{M}, \quad y_1 = \frac{\Sigma my}{M}, \quad z_1 = \frac{\Sigma mz}{M},$$

qui sont celles dont on se sert habituellement pour déterminer les coordonnées du centre de gravité.

Nous observerons que ces dernières formules ne renferment plus de traces de l'action de la pesanteur, que nous avions considérée pour arriver à la notion du centre de gravité. La restriction que nous avions faite tout d'abord, en admettant que les dimensions du corps étaient très petites par rapport à celles de la terre, peut donc être mise de côté : les formules que nous venons d'obtenir peuvent être considérées comme définissant la position du centre de gravité d'un solide invariable, quelles que soient les dimensions de ce solide.

§ 164. **Détermination du centre de gravité d'un solide invariable.** — Il arrive quelquefois qu'on a à déterminer le centre de gravité d'un solide formé par la réunion de plusieurs autres solides dont les centres de gravité sont connus. Pour y arriver, on imaginera que les divers centres de gravité des solides partiels soient les points d'application de forces parallèles entre elles et proportionnels aux masses de ces solides partiels; le centre de ce système de forces parallèles sera le centre de gravité du solide total. Il suffit de se reporter à la définition du centre de gravité pour se rendre compte de cette manière d'opérer.

Pour trouver le centre de gravité d'un solide invariable constitué comme les corps naturels, c'est-à-dire consistant en un assemblage d'un très grand nombre de molécules placées à distance les unes des autres, on conçoit que la matière qui compose ce solide soit répandue dans la totalité de l'espace représenté par son volume apparent; on suppose que la matière de chaque molécule se trouve étalée dans l'espace que cette molécule occupe réellement et dans une partie de celui qui existe entre elle et les molécules voisines : de sorte qu'aucune portion de l'espace contenu à l'intérieur de la surface apparente du solide ne soit vide de matière. Dès lors, si l'on décompose le volume apparent du corps en une infinité d'éléments, chacun de ces éléments sera complètement rempli de matière; et, dans la recherche des coordonnées du centre de gravité du solide, on peut substituer ces éléments matériels aux molécules dont le solide est formé. Prenons pour élément de volume de parallélipipède rectangle qui a pour arêtes les différentielles dx, dy, dz des coordonnées x, y, z d'un point quelconque du solide, et représentons par $\rho dxdydz$ la masse de l'élément matériel correspondant; ρ sera la masse qu'aurait l'unité de volume du corps, si tous les éléments matériels, de volume égal à $dxdydz$, dont cette unité de volume se compose, avaient la même masse que celui que nous considérons en particulier : nous désignerons cette quantité ρ sous le nom de *masse spécifique* du solide au point dont les coordonnées sont x, y, z (*). Par la substitution des éléments

(*) On attribue souvent le nom de *densité* à la quantité que nous représentons ici par ρ, et qui n'est autre chose que la masse de l'unité de volume du corps, dans le cas où ce corps est homogène. On donne d'ailleurs le nom de *poids spécifique* au poids de l'unité de volume d'un corps supposé également

matériels aux molécules dont le corps est formé, chacune des sommes

$$\Sigma mx, \quad \Sigma my, \quad \Sigma mz,$$

qui entre dans les expressions des coordonnées x_1, y_1, z_1 du centre de gravité, sera remplacée par une intégrale triple dont les limites seront fournies par la forme de la surface du corps, et l'on aura

$$x_1 = \frac{\int\int\int \rho x dxdydz}{M}, \quad y_1 = \frac{\int\int\int \rho y dxdydz}{M}, \quad z_1 = \frac{\int\int\int \rho z dxdydz}{M}.$$

La masse totale M du corps a d'ailleurs pour valeur

$$M = \int\int\int \rho dxdydz,$$

les limites de cette dernière intégrale triple étant les mêmes que celles des intégrales qui entrent dans les valeurs de x_1, y_1, z_1. La masse spécifique ρ varie en général d'un point à un autre du solide; il faut que cette quantité soit connue en fonction des coordonnées x, y, z, du point auquel elle se rapporte, pour qu'on puisse effectuer le calcul des valeurs de x_1, y_1, z_1.

§ 165. Dans le cas particulier où ρ est constant, c'est-à-dire où le solide est *homogène*, les expressions qui déterminent x_1, y_1, z_1, se simplifient. Si l'on représente par V le volume total du corps, on a d'abord

$$M = \rho \int\int\int dxdydz = \rho V,$$

et par suite,

$$x_1 = \frac{\int\int\int x dxdydz}{V}, \quad y_1 = \frac{\int\int\int y dxdydz}{V}, \quad z_1 = \frac{\int\int\int z dxdydz}{V}.$$

homogène. Il nous paraît plus convenable de réserver le mot *densité* pour désigner une qualité des corps dont la représentation numérique soit indépendante du choix arbitraire de l'unité de masse et de l'unité de poids; et d'appeler *densité* d'un corps supposé homogène, le rapport du poids de ce corps au poids d'un égal volume d'eau. Et alors, de même que le poids de l'unité de volume de ce corps se nomme son *poids spécifique*, on peut attribuer à la masse de l'unité de volume du corps le nom de *masse spécifique*.

Dans ce cas, la position du centre de gravité du solide ne dépend absolument que de la forme de la surface qui le termine de toutes parts : la détermination de ce centre de gravité n'est plus qu'une question de géométrie.

Il existe certaines règles au moyen desquelles on peut souvent simplifier beaucoup la recherche du centre de gravité d'un solide homogène ; nous allons les faire connaître.

1° Toutes les fois que la surface du corps est symétrique par rapport à un plan, le centre de gravité est situé sur ce plan de symétrie. — Pour démontrer cette règle, imaginons que nous tracions sur le plan de symétrie P un système de droites parallèles infiniment voisines les unes des autres, puis un autre système de droites parallèles, infiniment voisines, dirigées à angle droit par rapport aux premières ; concevons en outre que nous fassions passer par toutes ces droites des plans perpendiculaires au plan de symétrie P : le solide se trouvera divisé par là en une infinité de prismes droits situés de part et d'autre du plan P, et ayant pour bases des rectangles infiniment petits placés sur ce plan. Imaginons enfin que nous coupions tous ceux de ces prismes qui sont d'un côté du plan P, par une série de plans parallèles à ce plan et infiniment rapprochés les uns des autres ; puis que nous en fassions autant pour les prismes situés de l'autre côté, en menant une autre série de plans symétriques des précédents par rapport au plan P. En opérant ainsi, nous aurons décomposé le solide en éléments qui sont tous symétriques, deux à deux, par rapport au plan P. Cela étant fait, si nous considérons deux éléments symétriques l'un de l'autre, ils auront même volume, et par suite même poids, en admettant que le solide soit soumis à l'action de la pesanteur ; la résultante de ces deux poids égaux aura donc son point d'application au milieu de la droite qui joint les deux éléments, c'est-à-dire en un point du plan de symétrie P ; en composant ainsi, deux à deux, les poids des éléments symétriques dans lesquels le solide total a été décomposé, on trouvera une série de résultantes partielles ayant toutes leurs points d'application sur le point P ; et par conséquent le point d'application de la résultante de toutes ces résultantes partielles, c'est-à-dire le centre de gravité du solide, sera également situé sur ce plan P.

2° Toutes les fois que la surface du corps a un plan diamétral, le centre de gravité se trouve sur ce plan diamétral. — Un plan diamétral d'une surface est un plan qui passe par les milieux de toutes les cordes de la surface qui sont parallèles à une direction donnée. Il ne diffère du plan de symétrie qu'en ce que les cordes, qu'il divise en deux parties égales, lui sont obliques au lieu de lui être perpendiculaires. Il est aisé de voir dès lors que la démonstration de cette seconde règle se fera exactement de même que celle de la première. Il n'y aura qu'à remplacer les prismes droits, dans lesquels le solide avait été divisé d'abord, par des prismes obliques ayant leurs arêtes parallèles aux cordes que le plan diamétral coupe en deux parties égales ; en partageant ensuite ces prismes obliques en éléments, au moyen d'une série de plans parallèles au plan diamétral et symétriques deux à deux par rapport à ce plan, on parviendra de même à décomposer le solide en éléments qui, deux à deux, auront même volume et en conséquence même poids, et seront situés aux extrémités d'une droite ayant son milieu sur le plan diamétral.

3° Toutes les fois que la surface du corps a un axe de symétrie, le centre de gravité se trouve sur cet axe. — Un axe de symétrie d'une surface est une droite telle que tous les points de la surface sont placés, deux à deux, symétriquement, par rapport à cette droite. Imaginons qu'on mène par l'axe de symétrie A, et tout autour de lui, une infinité de plans comprenant entre eux des angles dièdres infiniment petits, chacun de ces plans s'étendant de part et d'autre de l'axe A ; puis, qu'on mène une infinité de plans perpendiculaires à cet axe A, et infiniment rapprochés les uns des autres ; enfin qu'on décrive autour de la droite A, comme axe commun, une infinité de surfaces cylindriques de révolution infiniment voisines les unes des autres. Le corps se trouvera ainsi décomposé en éléments, qui seront, deux à deux, de même poids et placés symétriquement par rapport à l'axe A ; la résultante des poids de deux éléments symétriques l'un de l'autre aura donc son point d'application sur cet axe, et, par conséquent, il en sera de même de la résultante générale des poids de tous les éléments, c'est-à-dire du centre de gravité du corps.

4° Toutes les fois que la surface du corps a un centre de figure, le centre de gravité coïncide avec ce centre de figure. — Concevons qu'autour du centre de figure C de la surface, comme centre commun, on décrive une infinité de surfaces sphériques infiniment voisines les unes des autres ; puis, qu'après avoir divisé un hémisphère appartenant à l'une de ces surfaces sphériques en éléments infiniment petits, en y traçant par exemple une infinité de méridiens et de parallèles, on prenne tous ces éléments pour bases de cônes, ayant le point C pour sommet commun ; et qu'enfin on considère les deux nappes opposées de chacun de ces cônes. Les surfaces de ces cônes et de ces sphères décomposent le solide en éléments, qui sont deux à deux de même poids et placés symétriquement par rapport au point C. La résultante des poids de deux éléments symétriques a donc le point B pour point d'application, et par conséquent, le centre de gravité du solide est en ce point C.

Nous ferons incessamment des applications de ces diverses règles.

§ 166. **Centre de gravité d'une surface.** — Supposons qu'un solide s'étende suivant un plan ou suivant une surface courbe d'une forme quelconque, et qu'il ne présente partout qu'une épaisseur extrêmement petite, dans le sens de la normale au plan ou à la surface; on pourra faire abstraction de cette épaisseur, et concevoir que toute la matière, dont le solide est formé, se trouve située sur la surface plane ou courbe dont il s'agit. C'est ainsi qu'on est conduit à considérer une surface comme étant matérielle, et par conséquent, comme ayant un centre de gravité.

Si la matière était répartie d'une manière quelconque sur toute l'étendue de la surface, il faudrait que l'on connût la loi de cette répartition, pour qu'on pût trouver la position de son centre de gravité. Mais on suppose habituellement que la surface est homogène, c'est-à-dire que tous les éléments de même étendue, dans lesquels on peut la décomposer, contiennent la même masse de matière; la position du centre de gravité ne dépend plus alors que de la forme de la surface, et sa détermination rentre dans ce que nous avons dit (§ 165) relativement aux solides homogènes.

S'il s'agit en particulier d'une surface plane limitée à un contour donné, il est clair que le centre de gravité de cette surface sera dans son plan; en sorte que ce point sera entièrement connu, dès qu'on aura ses deux coordonnées rapportées à des axes tracés dans ce plan. Soit B l'aire de la surface; on aura

$$A = \int\int dxdy,$$

l'intégrale s'étendant à tous les éléments situés à l'intérieur du contour donné. Si l'on observe que, en raison de l'homogénéité de la surface, les masses des divers éléments qui la composent sont proportionnelles à leurs aires, on aura, pour déterminer les coordonnées x_1, y_1 de son centre de gravité, les formules

$$x_1 = \frac{\int\int xdxdy}{A},$$

$$y_1 = \frac{\int\int ydxdy}{A},$$

dans lesquelles les intégrales s'étendent aux mêmes limites que celle qui fournit la valeur de A. On pourra d'ailleurs, quand l'occasion s'en présentera, profiter des règles qui ont été établies (§ 165) pour simplifier la recherche du centre de gravité d'un solide homogène dans certains cas : on reconnaît, en effet, sans difficulté, que ces règles sont applicables à la détermination du centre de gravité d'une surface plane homogène.

Lorsque la surface dont on veut trouver le centre de gravité, et que l'on suppose homogène, n'a pas tous ses points situés dans un même plan, on rapporte son centre de gravité à trois axes ; et, si l'on désigne encore par A l'aire totale de cette surface, aire qui a pour valeur

$$A=\int\int\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dxdy,$$

on a pour déterminer les coordonnées x_1, y_1, z_1, du centre de gravité

$$x_1=\frac{\int\int x\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dxdy}{A},$$

$$y_1=\frac{\int\int y\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dxdy}{A},$$

$$z_1=\frac{\int\int z\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dxdy}{A}.$$

Les quantités $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, qui entrent dans ces formules, sont les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, déduites de l'équation de la surface; et les intégrales doubles s'étendent à toute la partie du plan des yx, sur laquelle la surface se projette. Nous devons remarquer ici que, pour trouver le centre de gravité d'une surface homogène, dont tous les points ne sont pas situés dans un même plan, on ne peut faire usage que de trois des quatre règles qui ont été données pour simplifier, dans certains cas, la recherche du centre de gravité d'un solide homogène (§ 165); la seconde, celle qui se rapporte à un plan diamétral, doit être mise de côté : il est aisé de voir, en effet, que, si une surface a un plan diamétral, si l'on prend les deux éléments suivant lesquels elle est coupée par un prisme ayant pour base un rectangle infiniment petit, tracé sur le plan diamétral, et pour arêtes, des parallèles aux cordes que ce plan divise en deux parties égales, il arrivera généralement que ces deux éléments de surface n'auront pas des aires égales, et, par conséquent, n'auront pas même masse.

§ 167. **Centre de gravité d'une ligne.** — Des considérations analogues à celles que nous avons indiquées dans le paragraphe précédent ont conduit à regarder une ligne, droite ou courbe, comme étant matérielle, et, par suite, comme ayant un centre de gravité. On suppose ordinairement que la ligne est homogène, c'est-à-dire que les divers éléments de même longueur, dans lesquels on peut la décomposer, renferment la même masse de matière. Dans ce cas, les règles qui ont été données (§ 165) relativement à la détermination du centre de gravité d'un solide homogène, peuvent être employées, à l'exception de la seconde, sur laquelle nous pourrions faire une observation entièrement analogue à celle que nous avons déjà faite à l'occasion du centre de gravité d'une surface dont tous les points ne sont pas situés dans un même plan (§ 166).

Si la ligne dont on veut trouver le centre de gravité est rapportée à trois axes rectangulaires, et si l'on désigne par S la longueur totale de cette ligne, on aura

$$S=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx,$$

$\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ étant les dérivées de y et de z, par rapport à x, déduites des équations de la ligne dont il s'agit, et l'intégrale s'étendant à toutes les parties de la projection de cette ligne sur l'axe des x. Les masses des divers éléments de la ligne, supposée homogène, étant proportionnelles à leurs longueurs, on trouvera les coordonnées x_1, y_1, z_1 de son centre de gravité au moyen des formules

$$x_1=\frac{\int x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dx}{S},$$

$$y_1=\frac{\int y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx}{S},$$

$$z_1=\frac{\int z\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx}{S},$$

dans lesquelles les limites des intégrales sont les mêmes que dans la valeur de S.

Si la ligne dont on s'occupe est plane, il est clair que son centre de gravité est situé dans son plan. Dans ce cas, les coordonnées x_1, y_1, du centre de gravité, rapportées à deux axes rectangulaires tracés dans le plan de la ligne, sont déterminées par les deux premières des formules précédentes, en y supposant $\frac{dz}{dx}$ égal à zéro.

§ 168. **Exemples divers de centres de gravité.** — *Ligne droite.* — Le centre de gravité d'une ligne droite, de longueur donnée, est évidemment au milieu de sa longueur.

Ligne brisée. — Pour obtenir le centre de gravité d'une ligne brisée, dont les côtés sont situés ou non dans un même plan, il faut imaginer qu'on applique aux milieux de ses divers côtés des forces parallèles, dirigées dans le même sens et proportionnelles aux longueurs de ces côtés : le centre de ces forces parallèles, obtenu, soit par la composition successive des forces (§ 157), soit par les formules qui déterminent ses coordonnées (§ 162), sera le centre de gravité cherché.

Contour d'un triangle. — Considérons, en particulier, le cas d'une ligne brisée qui forme le contour d'un triangle ABC, *fig.* 82. Nous devons appliquer aux points A′, B′, C′, milieux de BC, AC, AB, des forces parallèles, de même sens, et proportionnelles aux longueurs de ces côtés. Composons les deux forces appliquées en A′ et B′, et soit D le point d'application de leur résultante ; nous n'aurons plus qu'à composer la résultante partielle ainsi obtenue avec la force appliquée en C′, pour avoir la résultante définitive des trois forces appliquées en A′, B′, C′ : donc le centre de gravité du contour du triangle ABC se trouve sur la ligne C′D. Observons maintenant que, d'après la manière dont le point D a été obtenu, on a la proportion

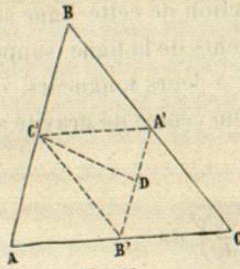

Fig. 82.

$$\frac{A'D}{B'D}=\frac{AC}{BC},$$

puisque les forces appliquées en A′ et B′ sont proportionnelles aux côtés BC, AC ; mais la ligne A′C′, qui joint les milieux des côtés BC, BA, est égale à la moitié de AC, et, de même, la ligne B′C′ est égale à la moitié de BC, de sorte qu'on a aussi

$$\frac{A'D}{B'D}=\frac{A'C'}{B'C'} :$$

donc la ligne C′D, qui contient le centre de gravité du contour du triangle ABC, divise l'angle A′C′B′, en deux parties égales. On verrait de même que ce centre de gravité se trouve sur la bissectrice de l'angle B′A′C′, et aussi sur celle de l'angle A′B′C′ : on peut donc dire que le centre de gravité du contour d'un triangle est le centre du cercle inscrit dans un autre triangle, que l'on obtient en joignant deux à deux les milieux des côtés du premier triangle.

Arc de cercle. — Un arc de cercle étant symétrique par rapport au rayon qui passe par son milieu, son centre de gravité se trouve sur ce rayon. Pour trouver en quel point de ce rayon il est placé, rapportons l'arc de cercle à des axes coordonnés rectangulaires tracés dans son plan et passant par le centre du cercle dont il fait partie, et prenons le rayon dont on vient de parler, pour axe des x.

Si nous désignons par l la longueur de l'arc dont il s'agit, par c sa corde, par a la distance du centre à cette corde, et par r le rayon du cercle, nous aurons pour l'abscisse x_1 du centre de gravité cherché

$$x_1=\frac{1}{l}\int x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\frac{r}{l}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

L'intégrale doit s'étendre aux projections de tous les éléments de l'arc, situés soit au-dessus, soit au-dessous de l'axe des x ; nous pouvons ne l'étendre qu'aux projections de la moitié de