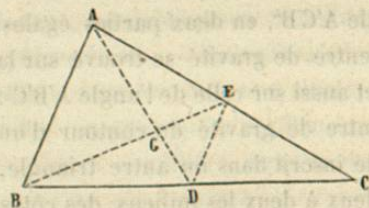


cet arc qui est située au-dessus de l'axe des  $x$ , pourvu que nous doublions le résultat, nous aurons donc

$$x_1 = \frac{2r}{l} \int_a^r \frac{x dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r}{l} \sqrt{r^2 - a^2} = \frac{2r}{l}.$$

§ 169. *Parallélogramme.* — Un parallélogramme a un centre de figure, qui est le point de rencontre de ses diagonales : donc son centre de gravité est en ce point.

*Triangle.* — Le centre de gravité de la surface d'un triangle ABC, fig. 83, est situé sur la ligne AD qui joint le sommet A au milieu D du côté BC. En effet, si l'on mène par cette ligne un plan perpendiculaire au plan du triangle, on a un plan diamétral correspondant aux cordes parallèles à BC; ce plan contient



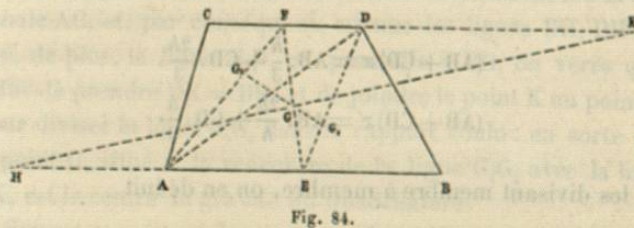
donc le centre de gravité, et, par conséquent, son intersection AD avec le plan du triangle le contient également. On verrait de même que le centre de gravité du triangle se trouve sur la ligne BE qui joint le sommet B au milieu E du côté opposé AC; donc il est situé au point G, où se coupent les deux lignes AD, BE. La ligne DE, qui joint les milieux des côtés AC, BC, est parallèle à AB; les deux triangles AGB, EGD sont donc semblables; et comme AB est double de DE, AG est également double de GD : donc le centre de gravité du triangle ABC est sur la ligne qui joint le sommet A au milieu de la base BC, et au tiers de cette ligne à partir de la base.

On peut remarquer que le centre de gravité d'un triangle est le même que celui de trois points matériels de cette masse, placés aux sommets de ce triangle, et supposés liés invariablement entre eux. En effet, si nous considérons ces trois points matériels placés en A, B, C, fig. 83, comme soumis à l'action de la pesanteur, les points des deux poids B, C se composeront en une force double de chacun d'eux et appliquée au point D, milieu

de la droite BC; cette force se composera à son tour avec le poids du point A, et il en résultera une force unique appliquée en un point de la ligne AD tel que sa distance au point A soit double de sa distance au point D : c'est donc en G que sera appliquée cette résultante définitive, ce qui démontre la proposition énoncée. Au lieu de trois points matériels placés en A, B, C, on peut supposer qu'il s'agisse de trois corps de même masse et de formes quelconques, liés entre eux d'une manière invariable, et ayant leurs centres de gravité respectifs en ces points; le centre de gravité de l'ensemble de ces trois corps sera encore le même que celui du triangle ABC.

*Polygone.* — Un polygone peut être décomposé en triangles, au moyen de diagonales, partant par exemple d'un même sommet. Si l'on regarde les centres de gravité de ces triangles comme les points d'application d'autant de forces parallèles dirigées dans le même sens et proportionnelles aux surfaces de ces triangles, on n'aura plus qu'à chercher le centre de ces forces parallèles pour avoir le centre de gravité du polygone.

*Trapeze.* — Le centre de gravité d'un trapèze ABCD, fig. 84, peut s'obtenir en appliquant ce qui vient d'être dit pour un po-



lygone quelconque. Si l'on mène la diagonale AD, on décompose le trapèze en deux triangles ADB, ACD; le centre de gravité  $G_1$  du premier triangle est situé sur la ligne DE, menée du sommet D au milieu E de la base AB, et au tiers de cette ligne à partir du point E; le centre de gravité  $G_2$  du second triangle se trouve placé de la même manière, sur la ligne qui joint le point A au milieu F du côté CD : le point G, qui divise la ligne  $G_1G_2$  en

deux parties  $GG_1$ ,  $GG_2$ , inversement proportionnelles aux surfaces des triangles  $ADB$ ,  $ACD$ , ou bien à leurs bases  $AB$ ,  $CD$ , est le centre de gravité du trapèze. La détermination de ce point peut être simplifiée, en remarquant que le plan mené par la ligne  $EF$ , perpendiculairement au plan du trapèze, est un plan diamétral correspondant aux cordes parallèles à  $AB$  ou à  $CD$ : le centre de gravité  $G$  du trapèze se trouve donc sur la ligne  $EF$ , et par conséquent il sera fourni par l'intersection de cette ligne  $EF$  avec la ligne  $G_1G_2$ .

Nous pouvons encore chercher les distances  $x$ ,  $x'$  du point  $G$  aux deux bases  $AB$ ,  $CD$ , du trapèze, en appliquant le théorème des moments (§ 158) au système des forces parallèles qui représentent les poids des deux triangles  $ADB$ ,  $ACD$ , et qui agissent aux points  $G_1$ ,  $G_2$ . Supposons que ces forces soient dirigées perpendiculairement au plan du trapèze, et prenons leurs moments successivement par rapport à chacun des deux plans qu'on peut mener parallèlement à leur direction par les côtés  $AB$ ,  $CD$ . Si nous désignons la hauteur du trapèze par  $h$ ; si, de plus, nous remplaçons les forces appliquées en  $G_1$ ,  $G_2$ , et leur résultante, par les lignes  $AB$ ,  $CD$ ,  $AB + CD$ , qui leur sont proportionnelles, nous aurons les deux équations

$$(AB + CD)x = AB \cdot \frac{h}{3} + CD \cdot \frac{2h}{3},$$

$$(AB + CD)x' = AB \cdot \frac{2h}{3} + CD \cdot \frac{h}{3}.$$

En les divisant membre à membre, on en déduit

$$\frac{x}{x'} = \frac{AB + 2CD}{2AB + CD}.$$

Ce résultat montre que l'on peut trouver le centre de gravité du trapèze en prolongeant le côté  $BA$  d'une quantité  $AH$  égale à  $CD$ , puis le côté  $CD$  d'une quantité  $DK$  égale à  $AB$ , et en prenant ensuite le point de rencontre  $G$  de la ligne  $HK$  avec la ligne  $EF$ . En effet, les triangles  $EGH$ ,  $FGK$ , ainsi formés, sont semblables, et donnent

$$\frac{GE}{GF} = \frac{EH}{FK} = \frac{\frac{1}{2}AB + CD}{AB + \frac{1}{2}CD} = \frac{AB + 2CD}{2AB + CD};$$

et comme les distances  $x$ ,  $x'$  de ce point  $G$ , aux côtés  $AB$ ,  $CD$ , sont proportionnelles aux lignes  $GE$ ,  $GF$ , il s'ensuit que ce point  $G$  est bien le centre de gravité cherché, puisque nous savions déjà qu'il devait être situé sur la ligne  $EF$ .

*Quadrilatère.* — Pour trouver le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque,  $ABCD$ , *fig. 85*, on le décompose en deux triangles au moyen de la diagonale  $AC$ ; on joint les points  $B$ ,  $D$ , au milieu  $E$  de la diagonale; on prend les points  $G_1$ ,  $G_2$  situés sur les lignes  $BE$ ,  $DE$ , et au tiers de chacune d'elles, à partir du point  $E$ ; et enfin on divise la ligne  $G_1G_2$  en deux parties  $GG_1$ ,

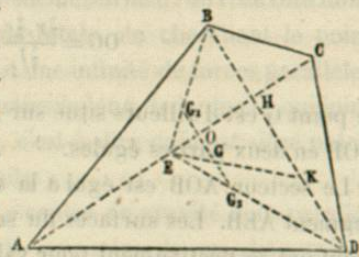


Fig. 85.

$GG_2$ , inversement proportionnelles aux surfaces des triangles  $ABC$ ,  $ADC$ . Si l'on observe que les surfaces de ces triangles sont entre elles comme les distances des sommets  $B$ ,  $D$  à la diagonale  $AC$ , et, par conséquent, comme les lignes  $BH$ ,  $DH$ ; et que, de plus, la ligne  $G_1G_2$  est parallèle à  $BD$ , on verra qu'il suffit de prendre  $DK = BH$ , et de joindre le point  $K$  au point  $E$ , pour diviser la ligne  $G_1G_2$  dans le rapport voulu: en sorte que le point  $G$ , situé à la rencontre de la ligne  $G_1G_2$  avec la ligne  $EK$ , est le centre de gravité du quadrilatère.

*Secteur et segment de cercle.* — Pour déterminer le centre de gravité du secteur circulaire  $AOB$ , *fig. 86*, on peut concevoir que l'arc  $AB$  soit partagé en une infinité d'éléments égaux, et que le secteur  $AOB$  soit décomposé en secteurs infiniment petits correspondant à ces divers éléments d'arcs. Chacun de ces secteurs élémentaires peut être regardé comme étant un triangle, et, en con-

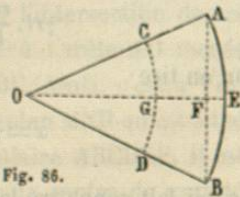


Fig. 86.

séquence, son centre de gravité se trouve sur l'arc de cercle CD, décrit du point O comme centre avec un rayon OC égal aux  $\frac{2}{3}$  de OA; le centre de gravité G du secteur AOB sera donc le point d'application de la résultante d'une infinité de forces parallèles et égales agissant sur des points régulièrement distribués le long de l'arc CD, c'est-à-dire qu'il sera le même que le centre de gravité de l'arc CD. Si l'on désigne par  $r$  le rayon OA, par  $l$  la longueur de l'arc AB, et par  $c$  la corde de cet arc, on aura, d'après ce qu'on a vu précédemment (§ 168),

$$OG = \frac{\frac{2}{3}r \cdot \frac{2}{3}c}{\frac{2}{3}l} = \frac{rc}{l};$$

le point G est d'ailleurs situé sur la ligne OE qui divise l'angle AOB en deux parties égales.

Le secteur AOB est égal à la somme du triangle AOB et du segment AEB. Les surfaces du secteur, du triangle et du segment ont respectivement pour valeurs

$$\frac{1}{2}rl, \quad \frac{1}{2}ac, \quad \frac{1}{2}(rl-ac),$$

en désignant par  $a$  la distance OF; les centres de gravité de ces trois surfaces sont tous situés sur la ligne OE, et les distances des deux premiers au point O sont

$$\frac{2}{3} \frac{rc}{l}, \quad \frac{2}{3}a;$$

en sorte que, si l'on désigne par  $x$  la distance du point O au centre de gravité du segment AEB, on aura, d'après le théorème des moments (§ 158),

$$\frac{1}{2}rl \cdot \frac{rc}{l} = \frac{1}{2}ac \cdot \frac{2}{3}a + (r-ac) \cdot x.$$

On en tire

$$x = \frac{\frac{1}{2}r^2 - a^2}{rl - ac} c = \frac{c^3}{6(rl - ac)},$$

ce qui fait connaître la position du centre de gravité du segment AEB.

*Zone sphérique.* — Le centre de gravité d'une zone sphérique à deux bases est situé sur le diamètre de la sphère qui passe par les centres de ces deux bases; car ce diamètre est un axe de symétrie de la zone. Pour trouver la position que le centre de gravité occupe sur ce diamètre, imaginons que l'on ait divisé la hauteur de la zone en une infinité de parties égales, et que, par les points de division, on ait mené des plans parallèles aux plans des deux bases; la zone se trouvera ainsi partagée en une infinité de zones ayant toutes une même hauteur infiniment petite, et, par conséquent, une même surface: on trouvera donc le centre de gravité de la zone totale, en cherchant le point d'application de la résultante d'une infinité de forces parallèles et égales, régulièrement réparties le long de la droite qui joint les centres de ces deux bases, c'est-à-dire qu'il est situé précisément au milieu de cette droite.

§ 170. *Parallélépipède.* — Le centre de gravité d'un parallélépipède se trouve au point de rencontre de ses diagonales, point qui est un centre de figure pour la surface de ce corps.

*Prisme.* — Le plan qui passe par les milieux M, N, P des arêtes AD, BE, CF d'un prisme triangulaire, *fig. 87*, est un plan diamétral correspondant aux cordes parallèles à ces arêtes; et, par conséquent, il renferme le

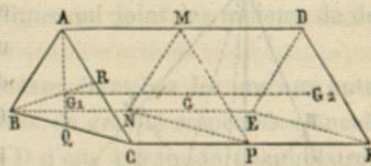


Fig. 87.

centre de gravité de ce prisme. Le plan mené par AD et par le milieu Q de l'arête BC est également un plan diamétral correspondant aux cordes parallèles à BC, et il en est de même du plan mené par BE et par le milieu R de l'arête AC: donc le centre de gravité du prisme se trouve sur l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire sur la parallèle à l'arête AD menée par le centre de gravité G<sub>1</sub> du triangle ABC. Ainsi, c'est à l'intersection de cette dernière ligne avec le plan MNP qu'est situé le centre de gravité G du prisme triangulaire ABCDEF. Il est clair, d'après cela, qu'on peut dire que le centre de gravité d'un prisme triangulaire est au milieu de la droite qui joint les

centres de gravité de ses deux bases, ou bien encore qu'il coïncide avec celui du triangle suivant lequel le prisme est coupé par un plan mené parallèlement aux deux bases, et à égale distance de chacune d'elles.

Pour trouver le centre de gravité d'un prisme quelconque à bases parallèles, on peut le décomposer en prismes triangulaires au moyen de divers plans menés par une de ses arêtes latérales. Un plan mené par les milieux de toutes les arêtes latérales coupera les divers prismes triangulaires ainsi obtenus suivant des triangles dont les centres de gravité seront en même temps ceux de ces prismes; et les surfaces de ces triangles seront, en outre, proportionnelles aux volumes des mêmes prismes: il est aisé de conclure de là que le centre de gravité du prisme total coïncide avec celui du polygone, suivant lequel il est rencontré par ce plan sécant, et que, par conséquent, ce centre de gravité se trouve au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases du prisme.

*Pyramide.* — Soit ABCD, *fig.* 88, une pyramide triangulaire. Le plan mené par AB et par le milieu E de CD est un plan diamétral correspondant aux cordes parallèles à CD; le centre de gravité de la pyramide se trouve donc dans ce plan, et comme il doit être par la même raison dans le plan mené par AD et par le milieu K de BC, il s'ensuit qu'il est situé sur la ligne  $AG_1$  qui joint le sommet A au centre de gravité  $G_1$  de la face opposée BCD. On verra

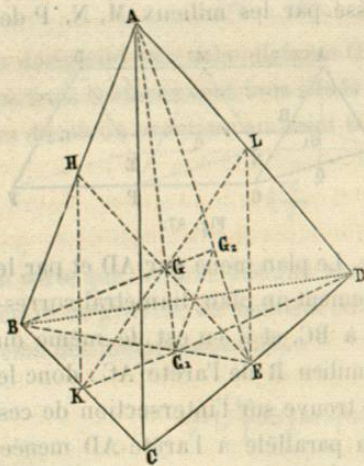


Fig. 88.

de même que la ligne menée du point B au centre de gravité  $G_2$  de la face ACD renferme le centre de gravité de la pyramide; en sorte que ce point n'est autre chose que l'intersection G des deux lignes  $AG_1$ ,  $BG_2$ . D'après les positions que les points  $G_1$ ,  $G_2$

occupent sur les côtés EB, EA du triangle ABE, on voit que  $G_1G_2$  est parallèle à AB et égal au tiers de cette ligne: donc les triangles AGB,  $GG_1G_2$  sont semblables, et  $GG_1$  est le tiers de AG; donc enfin  $GG_1$  est le quart de AG.

Il est aisé de reconnaître que le centre de gravité G de la pyramide triangulaire ABCD coïncide avec le centre de gravité du triangle suivant lequel cette pyramide est coupée par un plan mené parallèlement à la base BCD, et à une distance de cette base égale au quart de la hauteur.

Si l'on mène un plan par CD et par le milieu H de AB, il contiendra le point G; ce point G sera donc situé sur l'intersection du plan ABE avec le plan CDH, c'est-à-dire sur la ligne EH qui joint les milieux des deux arêtes opposées CD, AB. De même, la ligne KL qui joint les milieux des arêtes opposées BC, AD, passera par G. Mais les lignes HK et LE sont toutes deux parallèles à AC et égales à la moitié de cette dernière ligne: donc H, K, L, E sont les sommets d'un parallélogramme, et, par suite, les lignes EH, KL se coupent mutuellement en parties égales: donc, enfin, le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est au milieu de la ligne qui joint les milieux de deux arêtes opposées.

Quatre corps de même masse étant liés les uns aux autres, de manière que leurs centres de gravité respectifs coïncident avec les sommets A, B, C, D d'une pyramide triangulaire, le centre de gravité de l'ensemble de ces quatre corps est le même que celui de la pyramide. En effet, les poids égaux des deux corps placés en A et B se composent en une force double de chacun d'eux et appliquée en H; les poids égaux des autres corps, placés en C et D, se composent aussi en une force double de chacun d'eux et appliquée en E; enfin ces deux résultantes partielles, qui sont égales, auront une résultante appliquée au point G, milieu de la ligne EH.

Pour trouver le centre de gravité d'une pyramide à base quelconque, concevons qu'on l'ait décomposée en pyramides triangulaires, au moyen de plans menés par son sommet et par diverses diagonales du polygone qui forme sa base, et qu'on ait

ensuite coupé toutes ces pyramides par un plan parallèle au plan de la base, et distant de ce plan d'une quantité égale au quart de la hauteur de la pyramide. Les centres de gravité des diverses pyramides triangulaires ainsi obtenues sont les mêmes que ceux des triangles suivant lesquels elles sont rencontrées par ce plan sécant, et leurs volumes sont proportionnels aux surfaces de ces mêmes triangles; on en conclura facilement que le centre de gravité de la pyramide totale est précisément le même que le centre de gravité du polygone suivant lequel elle est rencontrée par le plan sécant. On peut dire, d'après cela, que le centre de gravité d'une pyramide à base quelconque se trouve sur la ligne qui joint son sommet au centre de gravité de sa base, et au quart de cette ligne, à partir de la base.

*Cylindre.* — Le centre de gravité d'un cylindre quelconque, à bases parallèles, se trouve au milieu de la ligne qui joint les centres de gravité de ses deux bases; car un cylindre peut être regardé comme étant un prisme dont la base est un polygone infinitésimal.

*Cône.* — Le centre de gravité d'un cône quelconque se trouve sur la ligne qui joint son sommet au centre de gravité de sa base, et au quart de cette ligne, à partir de la base; car un cône peut être assimilé à une pyramide ayant pour base un polygone infinitésimal.

*Secteur et segment sphériques.* — Un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour le secteur circulaire montre que le centre de gravité d'un secteur sphérique est le même que celui de la zone sphérique à une base que l'on obtiendrait en réduisant tous les rayons du secteur sphérique aux  $\frac{2}{3}$  de leur longueur. On voit, par là, que ce centre de gravité est situé sur l'axe du secteur, et à une distance du centre de la sphère égale à

$$\frac{2}{3}r - \frac{2}{3}h,$$

$r$  étant le rayon de la sphère, et  $h$  la hauteur de la zone qui sert de base au secteur.

Un secteur sphérique peut être décomposé en un cône de ré-

volution, et un segment à une base. Les volumes du secteur, du cône et du segment, sont respectivement

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad \frac{2}{3}\pi h(r-h)(2r-h), \quad \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h);$$

les distances du centre de la sphère aux centres de gravité du secteur et du cône sont d'ailleurs égales à

$$\frac{2}{3}r - \frac{2}{3}h, \quad \frac{2}{3}(r-h);$$

donc, si l'on désigne par  $x$  la distance du centre de la sphère au centre de gravité du segment, et qu'on applique le théorème des moments (§ 158), on aura l'équation

$$2\pi r^2 h \left(\frac{2}{3}r - \frac{2}{3}h\right) = \frac{2}{3}\pi h(r-h)(2r-h) \cdot \frac{2}{3}(r-h) + \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h) \cdot x;$$

on en déduit

$$x = \frac{2}{3} \frac{(2r-h)^2}{3r-h}.$$

§ 171. **Théorème de Guldin.** — L'aire de la surface engendrée par un arc de courbe plane, tournant autour d'une droite située dans son plan est égale au produit de la longueur de cet arc par la circonférence que décrit son centre de gravité; le volume du solide engendré par une aire plane tournant autour d'une droite située dans son plan est égal au produit de cette aire par la circonférence que décrit son centre de gravité: c'est dans ces deux propositions que consiste le *théorème de Guldin*.

Pour démontrer la première partie de ce théorème, supposons que la courbe mobile soit rapportée à deux axes rectangulaires tracés dans son plan, et que l'un de ces axes, l'axe des  $x$ , coïncide avec la droite autour de laquelle on la fait tourner. Chaque élément  $ds$  de la courbe, en tournant autour de l'axe des  $x$ , décrit la surface latérale d'un tronç de cône, dont l'aire a pour valeur  $2\pi y ds$ ; l'aire totale de la surface, décrite par la courbe mobile, sera donc égale à

$$\int 2\pi y ds,$$

l'intégrale s'étendant dans toute la longueur de l'arc de courbe que l'on considère. Mais on a, d'après le théorème des moments,

$$\int y ds = y_1 S,$$

en désignant par  $S$  la longueur de la courbe mobile, et par  $y_1$  l'ordonnée de son centre de gravité : l'aire de la surface engendrée par cette courbe sera donc exprimée par

$$2\pi y_1 S,$$

conformément à l'énoncé.

La seconde partie du théorème se démontre d'une manière analogue. Le rectangle infinitésimal dont les côtés, parallèles aux axes coordonnés, sont égaux à  $dx$ ,  $dy$ , décrit en tournant un cylindre creux, dont le volume a pour valeur  $2\pi y dx dy$  ; le volume total du solide engendré par l'aire mobile sera donc égal à

$$\iint 2\pi y dx dy,$$

l'intégrale s'étendant à tous les éléments qui composent cette aire. Mais, si l'on désigne l'aire mobile par  $A$  et l'ordonnée de son centre de gravité par  $y_1$ , on a, d'après le théorème des moments,

$$\iint y dx dy = y_1 A :$$

en vertu de cette relation, l'expression du volume décrit par la rotation de l'aire  $A$  deviendra

$$2\pi y_1 A,$$

ce qui est précisément le résultat indiqué par le théorème dont il s'agit.

On peut généraliser le théorème de Guldin, en observant que, si la courbe ou l'aire mobile ne fait pas un tour entier autour de son axe de rotation, on obtiendra toujours l'aire ou le volume engendré, en multipliant la longueur ou l'aire de la figure génératrice par la portion de circonférence décrite par son centre de gravité, quelle que soit cette portion de circonférence, finie ou infiniment petite. On en conclut sans peine que, si une figure plane (courbe ou aire) est animée d'un mouvement tel, qu'à chaque instant elle tourne autour d'une droite située dans son plan, ou, en d'autres termes, si le plan de cette figure mobile

roule sans glisser sur une surface développable quelconque, l'aire ou le volume que cette figure décrit en se mouvant ainsi s'obtient en multipliant la longueur ou l'aire de la figure mobile par le chemin total parcouru par son centre de gravité.

Il est bon d'observer que, si la figure mobile n'était pas située tout entière d'un même côté de l'axe autour duquel elle tourne d'une quantité finie ou infiniment petite, le théorème de Guldin fournirait la différence et non la somme des aires ou des volumes engendrés par les deux parties dans lesquelles cette figure est partagée par l'axe de rotation ; c'est ce que l'on reconnaîtra sans peine, en remarquant que les éléments de ces aires ou de ces volumes entrent avec des signes différents dans les expressions que nous avons considérées précédemment, suivant qu'ils proviennent d'éléments de la figure mobile situés d'un côté ou de l'autre de l'axe de rotation.

Le théorème de Guldin peut servir, dans certains cas, à trouver le centre de gravité d'une figure plane ; nous allons en voir un exemple. Si l'on fait tourner un arc de cercle autour d'un diamètre du même cercle, mené parallèlement à sa corde, il engendre une zone sphérique à deux bases, qui a pour surface

$$2\pi rc,$$

en désignant par  $r$  le rayon du cercle, et par  $c$  la corde de l'arc mobile ; d'après le théorème de Guldin, si l'on divise cette surface par la longueur  $l$  de l'arc qui l'a décrite, on aura pour quotient la circonférence parcourue par le centre de gravité de cet arc : on en conclut que la distance de ce centre de gravité au centre du cercle est égale à

$$\frac{rc}{l},$$

ainsi qu'on l'a déjà trouvé précédemment (§ 168).

§ 172. **Extension de la notion du centre de gravité au cas d'un système matériel quelconque.** — Quel que soit le système matériel dont on s'occupe, que ses diverses parties soient en repos ou bien en mouvement les unes par rapport aux autres, si l'on prend ce système tel qu'il existe, à un in-

stant quelconque, et si l'on imagine qu'il devienne invariable de forme, on pourra lui appliquer ce qui a été dit précédemment; le système, ainsi transformé en un solide invariable, aura un centre de gravité qu'on pourra déterminer par les moyens indiqués: ce point est ce qu'on nomme le centre de gravité du système matériel à l'instant considéré. Il est clair qu'il n'y a pas lieu de dire que le centre de gravité, ainsi défini, est le point d'application de la résultante des actions de la pesanteur sur les diverses parties dont le système matériel se compose; car il n'est pas possible de composer entre elles des forces qui agissent ainsi sur des corps différents, isolés, et pouvant se mouvoir indépendamment les uns des autres. Ce centre de gravité ne peut avoir pour nous, jusqu'à présent, aucune signification; mais nous verrons bientôt que sa considération est très utile dans diverses circonstances.

§ 173. **Travail de la pesanteur, dans le mouvement d'un système matériel quelconque.** — La considération du centre de gravité permet de simplifier beaucoup l'expression du travail dû aux actions de la pesanteur sur les diverses parties d'un système matériel en mouvement. Soient  $p$  le poids d'une molécule quelconque du système,  $z$  la distance de cette molécule à un plan horizontal supérieur, au commencement du temps pendant lequel on veut évaluer le travail, et  $z'$  ce que devient cette distance à la fin du temps dont il s'agit; soient de même  $P$  le poids total du système, et  $Z, Z'$  les distances de son centre de gravité (§ 172) au plan horizontal dont il vient d'être question, aux mêmes instants. On aura (§ 164)

$$\sum pz = PZ,$$

et aussi

$$\sum pz' + PZ :$$

en retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on trouve

$$\sum p(z' - z) = P(z' - Z).$$

Or  $p(z' - z)$  est évidemment le travail du poids  $p$  pendant le temps que l'on considère (§ 118); et, par conséquent,  $\sum p(z' - z)$

est la somme des travaux dus à l'action de la pesanteur sur les diverses parties du système matériel pendant ce temps: cette somme de travaux, que l'on nomme simplement le travail de la pesanteur sur le système, pendant le temps dont il s'agit, est donc égale au travail que développerait, pendant ce temps, une force égale au poids total  $P$  du système appliquée à son centre de gravité. On peut énoncer ce résultat auquel nous venons de parvenir, en disant que le travail de la pesanteur, sur un système matériel quelconque en mouvement, est le même que si toute la matière dont le système se compose était concentrée à son centre de gravité.