CHAPITRE III

ÉQUILIBRE D'UN SOLIDE INVARIABLE.

§ 174. **Condition d'équilibre d'un solide invariable.** — Nous avons vu (§ 159) qu'un système quelconque de forces F, F′, F″...... appliquées à un solide invariable en équilibre, peut toujours être remplacé par deux forces R_1, R_2, dont l'une agit sur un point choisi à volonté. Pour que le solide soit en équilibre sous l'action des seules forces F, F′, F″....., il faut que l'équilibre existe également, lorsque ces forces sont remplacées par les deux forces R_1, R_2, qui peuvent en tenir lieu. Or, si nous considérons le solide en équilibre sous l'action de ces deux dernières forces, il est clair que nous ne troublerons pas l'équilibre en supposant que l'un des points du solide, situé sur la direction de la force R_1, est fixe dans l'espace, et que le solide ne peut que tourner autour de ce point; mais alors la force R_1, qu'on peut supposer appliquée à ce point fixe pris sur sa direction, n'est capable de produire aucun effet, en raison de la fixité absolue du point sur lequel elle agit, et peut, en conséquence, être supprimée sans que l'équilibre cesse d'exister : donc la direction de la force R_2, qui reste seule, doit passer par le point qu'on a rendu fixe, sans quoi cette force R_2 tendrait évidemment à faire tourner le solide dans un certain sens autour de ce point, et le solide ne serait pas en équilibre. On voit par là que la direction de la force R_2 doit passer par un quelconque des points pris sur la direction de la force R_1, c'est-à-dire que ces deux forces

doivent être dirigées suivant la même ligne droite. Dès lors, ces deux forces R_1, R_2 ont une résultante égale à leur somme ou à leur différence, suivant qu'elles agissent dans le même sens ou dans des sens opposés. Cette résultante devant évidemment être nulle pour que le solide soit en équilibre, il s'ensuit que les deux forces R_1, R_2, doivent être égales et de sens contraires. Ainsi, pour qu'un solide invariable soit en équilibre sous l'action d'un système quelconque de forces F, F′, F″...., il est nécessaire que les deux forces R_1, R_2, par lesquelles on peut les remplacer, soient égales et directement opposées.

Il est aisé de voir que cette condition est suffisante pour que le solide soit en équilibre. En effet, les deux forces R_1, R_2, par lesquelles on a remplacé toutes les forces données F, F′, F″...., étant égales et directement opposées, il est clair que le solide, soumis à ces deux forces seulement, sera en équilibre; donc l'équilibre subsistera encore lorsqu'on reviendra de ces deux forces au système des forces F, F′, F″...., en effectuant des opérations inverses de celles qu'on avait dû faire pour passer du système des forces F, F′, F″..... aux deux forces R_1, R_2.

§ 175. **Lemme relatif aux travaux de deux forces égales et directement opposées, agissant sur deux points différents.** — Avant de rechercher les équations par lesquelles on peut exprimer la condition d'équilibre à laquelle nous venons de parvenir, nous allons établir une proposition qui nous servira plusieurs fois dans la suite, et dont nous avons besoin en particulier dans la question qui nous occupe.

Soient A et B, *fig.* 89, deux points sur lesquels agissent deux forces égales F, dirigées suivant la droite AB, et en sens contraire l'une de l'autre. Si ces points, en se déplaçant simultanément, parcourent les chemins infiniment petits AA′, BB′, chacune des deux forces développera un certain travail (§ 117) : nous allons chercher la somme de ces deux travaux. Soient *a*, *b*, les projections des points A′ et B′ sur la droite AB. Le travail de la force appliquée en B a pour valeur F × B*b*; celui de la force

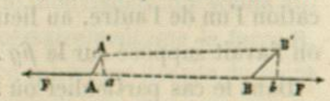

Fig. 89.

appliquée en A a pour valeur $-F \times Aa$: leur somme est donc égale à

$$F.(Bb - Aa),$$

ou ce qui est la même chose,

$$F.(ab - AB).$$

Désignons par r la distance primitive AB des points d'application des deux forces, par $r + dr$ la distance A'B' de ces deux points après leur déplacement, et par α l'angle infiniment petit que A'B' fait avec AB. Nous aurons

$$ab = (r + dr)\cos\alpha;$$

et par suite la somme des travaux des deux forces deviendra

$$F.\,[(r + dr)\cos\alpha - r],$$

quantité qui se réduit à

$$F.dr,$$

en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier.

Ainsi la somme des travaux développés par deux forces égales et directement opposées, agissant sur deux points différents, pendant que ces deux points se déplacent l'un et l'autre de quantités infiniment petites, s'obtient en multipliant l'une des deux forces par l'accroissement infiniment petit de la distance de leurs points d'application. Il est clair que, pour que cette somme des travaux des deux forces appliquées aux points A et B ait le signe qu'elle doit avoir, on devra regarder la force F qui entre dans son expression comme négative, si les deux forces dont il s'agit tendent à rapprocher leurs points d'application l'un de l'autre, au lieu de tendre à les éloigner, comme on l'avait supposé sur la *fig.* 89.

Dans le cas particulier où la distance des deux points A et B ne change pas, dans le mouvement dont ils sont animés simultanément, on a $dr = 0$, et, par conséquent, la somme des travaux des deux forces appliquées à ces points est nulle; en d'autres termes, les travaux de ces deux forces sont égaux et de signes contraires.

§ 176. **Théorème du travail virtuel, pour le cas d'un solide invariable.** — Nous avons dit (§ 174) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un solide invariable soit en équilibre sous l'action d'un système quelconque des forces F, F', F''...., c'est que les deux forces R_1, R_2, par lesquelles on peut toujours remplacer ce système de forces, soient égales et directement opposées. Nous allons voir comment cette condition peut s'exprimer sans qu'on ait besoin de chercher les deux forces R_1, R_2.

Si les deux forces R_1, R_2, que l'on peut toujours supposer appliquées à deux points différents A, B du solide, sont égales et directement opposées l'une à l'autre, la somme des travaux de ces deux forces sera nulle pour tout déplacement infiniment petit attribué au solide sur lequel elles agissent, puisque, dans ce mouvement du solide, les points d'application A, B de ces deux forces resteront à une même distance l'un de l'autre (§ 175). Il est aisé de voir d'ailleurs que, réciproquement, si la somme des travaux des deux forces R_1, R_2 est nulle, pour tout déplacement infiniment petit attribué au solide auquel elles sont appliquées, ces deux forces sont nécessairement égales et directement opposées. En effet, si l'on déplace le solide de manière que le point A reste immobile, le travail de la force R_1 appliquée à ce point sera nul de lui-même; le travail de la force R_2 sera donc aussi nul, puisque la somme de ces deux travaux est nulle par hypothèse : donc la force R_2 est dirigée perpendiculairement au chemin élémentaire que son point d'application B parcourt, lorsque le solide tourne infiniment peu autour du point A, et cela a lieu de quelque manière que s'effectue le mouvement du solide autour de ce point. On en conclut nécessairement que la force R_2 est dirigée normalement à la surface sphérique décrite du point A comme centre avec AB pour rayon, ou, en d'autres termes, que la direction de cette force coïncide avec la droite AB. On reconnaîtra de la même manière que la force R_1 est également dirigée suivant la droite AB. Cela étant établi, imaginons que nous donnions au solide un mouvement de translation infiniment petit, suivant la droite AB elle-même; la somme des travaux des deux forces R_1, R_2, correspondant à ce mouvement du solide, est encore nulle, par hypothèse : or cela ne peut avoir lieu sans que ces deux forces soient égales et de sens contraire. Ainsi, dire que les deux forces R_1, R_2, appliquées en deux points différents d'un solide invariable, sont égales et directement opposées, ou bien dire que la somme des travaux de ces deux forces est nulle pour tout déplacement infiniment petit attribué au solide, c'est exactement la même chose. Il est facile de voir, d'ailleurs, que cette proposition serait encore vraie si les deux forces R_1, R_2 étaient appliquées à un même point du solide.

Revenons maintenant au système des forces F, F′, F″...., auxquelles nous avons substitué les deux forces R_1, R_2, et considérons la somme des travaux développés par ces forces F, F′, F″...., lorsqu'on imagine que le solide sur lequel elles agissent prenne un mouvement infiniment petit quelconque. Si nous passons en revue la série des opérations qui doivent être effectuées successivement pour passer des forces données F, F′, F″.... aux forces équivalentes R_1, R_2, nous verrons qu'aucune des modifications que l'on fait ainsi subir à ce système de forces ne change la valeur de la somme de travaux dont on vient de parler ; en sorte que cette somme de travaux des forces F, F′, F″.... est égale à la somme des travaux des deux forces R_1, R_2, quel que soit le mouvement infiniment petit qu'on ait attribué au solide auquel ces forces sont appliquées. En effet, ces opérations consistent, soit à transporter une force d'un point à un autre de sa direction ; soit à composer entre elles plusieurs forces appliquées à un même point, suivant des directions différentes ; soit, au contraire, à décomposer une force en deux ou trois composantes, suivant des droites données, passant par son point d'application. Or, si l'on se reporte à la *fig.* 72 (page 242), où les trois forces F, F′, F″ sont supposées égales entre elles, on verra que, pour tout déplacement du solide, le travail de la force F′ est égal et de signe contraire au travail de la force F″ ; mais le travail de la force F est aussi égal et de signe contraire au travail de la force F″ (§ 175) ; les travaux des deux forces F, F′ sont donc égaux et de même signe, ce qui montre que le travail

d'une force ne change pas, quand on transporte cette force du point auquel elle était appliquée d'abord à un autre point quelconque pris sur sa direction. D'un autre côté, on sait que le travail de la résultante de plusieurs forces appliquées à un même point est égal à la somme des travaux des composantes, quel que soit le déplacement que prenne leur point d'application commun (§ 117).

D'après ce qui précède, on peut dire que, pour qu'un solide invariable soit en équilibre sous l'action d'un système quelconque de forces F, F′, F″,.... il est nécessaire et suffisant que la somme des travaux de ces forces soit nulle, pour tout déplacement infiniment petit attribué à ce solide. C'est en cela que consiste le *théorème du travail virtuel*, pour le cas d'un solide invariable.

On donne souvent le nom de *déplacement virtuel* au déplacement idéal et infiniment petit dont il est question dans l'énoncé précédent, pour le distinguer du déplacement réel qu'éprouverait le solide pendant un élément du temps, s'il était en mouvement. Ce déplacement virtuel est un mouvement purement géométrique, que l'on imagine être donné au solide, ou plutôt à l'ensemble des points d'application des forces considérés comme formant entre eux une figure invariable, afin d'arriver à exprimer par une équation la condition d'équilibre qui avait été obtenue tout d'abord. On donne, par la même raison, le nom de *travail virtuel* au travail infiniment petit d'une force correspondant à un pareil déplacement idéal de son point d'application, pour le distinguer du travail réel de la force correspondant à un déplacement effectif et infiniment petit de son point d'application. C'est de là que vient le nom attribué au théorème lui-même.

§ 177. **Équations qui expriment l'équilibre d'un solide invariable.** — Si nous appliquons le théorème du travail virtuel, en attribuant successivement au solide des déplacements virtuels différents les uns des autres, ce théorème nous fournira autant d'équations, auxquelles les forces F, F′, F″... devront satisfaire. Le nombre des équations qu'on peut obtenir ainsi est illimité, mais il n'y en a que quelques-unes qui soient réellement distinctes, et toutes les autres peuvent s'en déduire par des combinaisons algébriques. Nous allons nous occuper d'établir ces équations distinctes, qui, à elles seules, expriment complètement l'équilibre du solide.

Concevons que les divers points du solide soient rapportés à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, *fig.* 90. Soit A le point d'application d'une force quelconque F, dont les composantes parallèles aux axes seront représentées par X, Y, Z. Si nous donnons au solide un mouvement de translation infiniment petit parallèlement à l'axe OX, et si nous désignons par ε le déplacement commun à tous les points dans ce mouvement, le travail virtuel de la force F sera $X\varepsilon$; en exprimant que la somme des travaux virtuels de toutes les forces appliquées au solide, correspondant à ce mouvement particulier, est égale à zéro, nous aurons l'équation

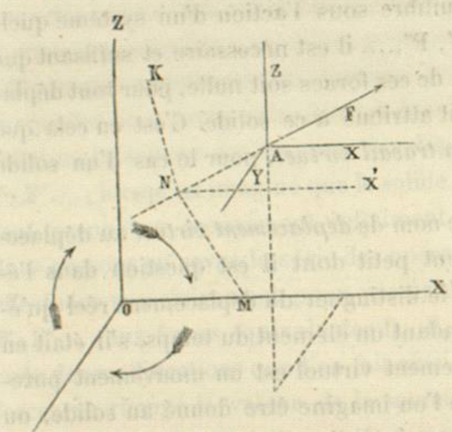

Fig. 90.

$$\Sigma X\varepsilon = 0;$$

ou bien, en observant que le facteur ε, commun à tous les termes de la somme, peut être supprimé,

$$\Sigma X = 0.$$

Deux autres mouvements virtuels de translation, dirigés, l'un suivant l'axe OY, l'autre suivant l'axe OZ, conduiraient de même aux deux équations

$$\Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0.$$

Imaginons maintenant que le solide tourne d'un angle θ autour de l'axe OX. Ce nouveau déplacement virtuel va nous con-

duire à une équation d'une autre forme. Désignons par p la plus courte distance MN de la direction de la force F et de l'axe OX, et par α l'angle que ces deux directions de F et de OX font entre elles. Pour évaluer le travail virtuel de la force F, nous pouvons supposer qu'elle est appliquée au point N de sa direction. Si par ce point N nous menons NX' parallèle à l'axe OX, puis NK perpendiculaire au plan MNX', cette droite NK sera la direction du déplacement virtuel $p\theta$ du point N ; et la force F, située dans le plan KNX', fera avec NK un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$. D'après cela le travail virtuel de la force F sera égal à

$$Fp\theta \sin \alpha.$$

Si nous égalons à zéro la somme de tous les travaux virtuels des diverses forces F, F', F'',..... analogues à celui que nous venons de déterminer et correspondant à la rotation θ autour de l'axe des x, et si nous supprimons le facteur θ commun à tous les termes, nous aurons l'équation

$$\Sigma Fp \sin \alpha = 0.$$

Il est aisé de voir que cette équation exprime que la somme des moments des forces F, F', F''..... par rapport à l'axe OX (§ 103) est égale à zéro. Nous aurons évidemment deux autres équations analogues, qui nous seront fournies par la considération de deux rotations virtuelles autour des axes OY, OZ. Nous allons écrire ces équations, en y introduisant les composantes X, Y, Z, de chacune des forces F.

Pour évaluer le moment d'une force par rapport à un des axes OX, OY, OZ, convenons de le regarder comme positif, si la force tend à faire tourner le solide autour de cet axe, dans le sens de la flèche tracée sur le plan qui lui est perpendiculaire, *fig.* 90. Le moment de la force F, par rapport à l'axe OX, étant égal à la somme des moments de ses trois composantes X, Y, Z par rapport à cet axe (§ 103), il est aisé de voir que ce moment de la force F aura pour valeur

$$Zy - Yz,$$

en désignant par x, y, z les coordonnées du point A auquel la force F est appliquée. D'après cela, l'équation qui exprime que la somme des moments des forces F, F', F''..... par rapport à l'axe OX, est nulle sera

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0.$$

Les équations analogues, relatives aux axes OY, OZ, seront de même

$$\Sigma(Xz - Zx) = 0, \qquad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Ainsi, en donnant au solide six mouvements virtuels différents, savoir, trois translations parallèles aux axes coordonnés, et trois rotations autour de ces axes, nous avons obtenu les six équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{lll} \Sigma X = 0, & \Sigma Y = 0, & \Sigma Z = 0 \\ \Sigma(Zy - Yz) = 0, & \Sigma(Xz - Zx) = 0, & \Sigma(Yx - Xy) = 0 \end{array}\right\} (a)$$

Nous allons voir que ces six équations sont suffisantes pour exprimer l'équilibre du solide soumis aux actions des forces F, F', F''.....

§ 178. D'après la manière dont les équations (a) ont été obtenues, on peut dire qu'elles expriment que la somme des travaux virtuels des forces F, F', F''.... est nulle pour chacun des six déplacements virtuels particuliers que nous avons considérés. Si nous remplaçons ces forces F, F', F''.... par deux forces seulement R_1, R_2, dont l'une R_1 agisse sur le point du solide qui est à l'origine des coordonnées (§ 159), nous savons que la somme des travaux virtuels de ces deux forces R_1, R_2 est la même que la somme des travaux virtuels des forces F, F', F'', dont elles tiennent lieu, quel que soit le déplacement virtuel que l'on attribue au solide (§ 176). Nous devons nécessairement conclure de là que, si les forces F, F', F''.... satisfont aux équations (a), les deux forces R_1, R_2 satisfont aussi à des équations analogues. Il s'ensuit que : 1° en vertu des trois premières de ces équations, les projections de R_1 et de R_2 sur les axes OX, OY, OZ sont respectivement égales et de signes contraires ; 2° en vertu des trois dernières, si l'on désigne par X_2, Y_2, Z_2 les composantes de R_2 suivant des parallèles aux axes, et par x_2, y_2, z_2 les coordonnées du point d'application de cette force R_2, et si l'on observe que les coordonnées du point d'application de R_1 sont nulles par hypothèse, on a

$$Z_2y_2 - Y_2z_2 = 0, \quad X_2z_2 - Z_2x_2 = 0, \quad Y_2x_2 - X_2y_2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{X_2}{x_2} = \frac{Y_2}{y_2} = \frac{Z_2}{z_2},$$

ce qui montre que la force R_2 agit suivant la droite qui joint son point d'application à celui de la force R_1. Ainsi, de ce que les forces F, F', F''..... satisfont aux six équations (a), il résulte que les deux forces R_1, R_2, par lesquelles on peut remplacer les forces données F, F', F''...... sont égales et directement opposées : donc les six équations (a) suffisent pour exprimer que le solide soumis aux actions de ces forces F, F', F''..... est en équilibre.

Il est bon de remarquer que, si l'on supprimait une quelconque des six équations (a), les cinq équations restantes ne suffiraient plus pour exprimer l'équilibre. Il est facile en effet de trouver un système de forces qui satisfasse à ces cinq équations, sans que l'équilibre existe. Si c'est, par exemple,

$$\Sigma X = 0$$

qu'on a supprimée, on verra qu'une force unique appliquée au solide suivant l'axe OX satisferait bien aux cinq équations restantes ; si c'est l'équation

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0,$$

un couple (§ 156) dirigé dans le plan YOZ satisferait de même aux cinq équations conservées ; cependant le solide ne serait en équilibre, ni sous l'action de la force dont on a parlé dans le premier de ces deux cas, ni sous l'action du couple, dans le second cas.

Une considération d'un autre genre permet encore de montrer que les six équations (a) suffisent pour exprimer l'équilibre du solide, en établissant que toutes les équations en nombre infini que l'on peut trouver par l'application du théorème du travail virtuel sont des conséquences de ces équations (a). Nous savons qu'un mouvement infiniment petit quelconque du solide peut toujours se décomposer en trois translations parallèles aux axes OX, OY, OZ, et en trois rotations autour de ces axes (§ 58). Il est aisé de voir en outre que, si le déplacement infiniment petit du point d'application d'une force résulte de la composition de plusieurs autres déplacements infiniment petits, le travail de la force correspondant au mouvement résultant est égal à la somme des travaux de cette force correspondant aux divers mouvements correspondants : car la projection du déplacement résultant sur la direction de la force est égale à la somme des projections des déplacements composants sur la même direction. D'après cela, si nous attribuons au solide un mouvement virtuel quelconque, et que nous décomposions ce mouvement en trois translations ε, ε', ε'' suivant les axes, et en trois rotations θ, θ', θ'' autour de ces axes, nous aurons

$$X\varepsilon + Y\varepsilon' + Z\varepsilon'' + (Zy - Yz)\theta + (Xz - Zx)\theta' + (Yx - Xy)\theta''$$

pour le travail virtuel de la force F; et en exprimant que la somme des travaux virtuels des diverses forces F, F', F''... est égale à zéro, nous trouverons l'équation

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon\Sigma X + \varepsilon'\Sigma Y + \varepsilon''\Sigma Z \\ + \theta\Sigma(Zy - Yz) + \theta'\Sigma(Xz - Zx) + \theta''\Sigma(Yx - Xy) \end{array}\right\} = 0,$$

qui est évidemment satisfaite, quels que soient ε, ε', ε'', θ, θ', θ'', si les équations (a) le sont.

D'après la signification des équations (a), il est clair que l'on peut dire que, pour qu'un solide invariable soit en équilibre sous l'action d'un système de forces F, F', F'',...., il est nécessaire et suffisant que la somme des projections de ces forces sur une droite quelconque soit nulle, et que la somme des moments de ces forces par rapport à une droite quelconque soit également nulle.

Dans tout ce qui précède, nous avons toujours supposé que les forces F, F', F''.... étaient appliquées à un solide invariable primitivement en repos, et nous avons cherché les conditions auxquelles ces forces devaient satisfaire pour que le solide restât en repos malgré leur action ; c'est-à-dire que nous nous sommes occupés d'établir les conditions d'équilibre du solide. Nous avons vu que ces conditions d'équilibre sont complètement exprimées par les six équations (a). Il peut arriver qu'un solide invariable en mouvement soit soumis à des forces qui satisfassent à ces six équations. Dans ce cas, le solide n'est pas en équilibre ; mais on dit toujours que les forces se font équilibre sur ce solide.

§ 179. Le système des six équations (a) se simplifie dans diverses circonstances, ainsi que nous allons le voir.

Supposons d'abord que toutes les forces F, F', F''.... appliquées au solide invariable soient parallèles entre elles. Si nous choisissons les axes auxquels nous rapportons le solide, de telle manière que l'axe OZ soit parallèle à ces forces, les composantes X et Y de chacune d'elles seront nulles, et la composante Z sera égale à la force elle-même. D'après cela, trois des six équations (a) se réduiront à des identités, et il ne restera plus que les trois autres qui deviendront

$$\Sigma F = 0, \quad \Sigma Fx = 0, \quad \Sigma Fy = 0.$$

Ces trois équations, nécessaires et suffisantes pour exprimer l'équilibre d'un solide invariable soumis à un système de forces parallèles, peuvent s'énoncer ainsi : 1° la somme des forces doit être nulle ; 2° les sommes des moments de ces forces, par rapport à deux plans rectangulaires menés parallèlement à leur direction (158), doivent être nulles chacune séparément. Cette seconde condition, correspondant aux deux dernières équations, peut encore être énoncée d'une autre manière, en disant que la somme des moments des forces par rapport à un plan quelconque parallèle à leur direction doit être nulle.

Considérons encore le cas où toutes les forces F, F', F''..... seraient dirigées dans un même plan. Si nous prenons ce plan pour plan des xy, la composante Z de chacune des forces sera nulle, et il en sera de même de la coordonnée z de chacun de