leurs points d'application. Les six équations (a) se réduiront donc encore à trois, qui seront

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Ces trois équations peuvent s'énoncer en disant que : 1° les sommes des projections des forces F, F′, F″.... sur deux droites rectangulaires, prises à volonté dans le plan de ces forces, doivent être nulles chacune séparément ; 2° que la somme des moments de ces forces par rapport à un point quelconque du plan doit être aussi nulle. La première de ces deux conditions, qui correspond aux deux premières des équations précédentes, peut être remplacée par celle-ci : la somme des projections des forces F, F′, F″..... sur une droite quelconque située dans leur plan, doit être nulle.

Enfin, si nous supposons que tous les points d'application des diverses forces F, F′, F″..... coïncident, les coordonnées x, y, z, étant les mêmes pour tous ces points, pourront sortir des signes Σ dans les trois dernières équations (a) : dès lors, il est clair que ces trois dernières équations ne sont que des conséquences des trois premières, en sorte que le système des équations (a) se réduit à ces trois premières équations. Dans ce cas, les équations auxquelles les forces F, F′, F″.... doivent satisfaire pour que le solide soit en équilibre, sont exactement les mêmes que celles que nous avons trouvées précédemment pour exprimer l'équilibre d'un simple point matériel (§ 104) ; et c'est en effet ce qui doit évidemment avoir lieu.

§ 180. **Équivalence de deux systèmes de forces.** — Un système de forces S est dit équivalent à un autre système de forces S′, lorsque ces deux systèmes, considérés comme agissant sur un solide invariable, peuvent être mis en équilibre chacun séparément par un même troisième système de forces S″. Il est aisé, d'après cela, d'établir les conditions d'équivalence des deux systèmes S, S′, en se fondant sur les conditions d'équilibre que nous avons étudiées précédemment.

Pour que le système S et le système S″ se fassent équilibre, il faut et il suffit que la somme des projections des forces de ces deux systèmes sur une droite quelconque soit nulle, et aussi que

la somme des moments de toutes ces forces, par rapport à une droite quelconque, soit également nulle (§ 178). Les mêmes conditions devant être remplies pour que le système S′ et le système S″ se fassent équilibre, on en conclut nécessairement que, pour que les systèmes S et S′ soient équivalents, il faut et il suffit : 1° que la somme des projections des forces du système S sur une droite quelconque soit égale à la somme des projections des forces du système S′ sur la même droite ; 2° que la somme des moments des forces du système S, par rapport à une droite quelconque, soit égale à la somme des moments des forces du système S′ par rapport à cette droite.

Pour exprimer l'équivalence des deux systèmes S et S′, il suffira d'écrire que cette égalité des sommes de projections et des sommes de moments a lieu pour chacun des trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, auxquels on rapporte les directions des diverses forces, ainsi que les positions de leurs points d'application, ce qui donnera les six équations

$$\Sigma X = \Sigma X', \quad \Sigma Y = \Sigma Y', \quad \Sigma Z = \Sigma Z',$$
$$\Sigma(Zy - Yz) = (\Sigma Z'y' - Y'z'),$$
$$\Sigma(Xz - Zx) = (\Sigma X'z' - Z'x'),$$
$$\Sigma(Yx - Xy) = (\Sigma Y'x' - X'y'),$$

dans lesquelles les premiers membres se rapportent au système S, et les seconds au système S′.

Par les diverses transformations que nous avons fait subir à un système quelconque de forces F, F′, F″,..., pour le réduire à deux forces seulement R_1, R_2 (§ 159), nous n'avons fait que remplacer le système primitif successivement par divers autres systèmes de forces tous équivalents les uns aux autres jusqu'à ce que nous fussions conduits à n'avoir plus que les deux forces R_1, R_2, formant à elles seules un système équivalent à tous les précédents, et par conséquent aussi équivalent au système primitif.

§ 181. **Théorie des couples.** — Un couple est, comme on sait, le système de deux forces égales, parallèles et de sens contraires (§ 156). On donne le nom de *bras de levier* du couple, à une droite quelconque menée perpendiculairement aux directions de ses deux forces, et terminée aux points où elle rencontre ces directions; on suppose souvent que les deux forces d'un couple sont appliquées aux extrémités mêmes de son bras de levier. Si l'on prend la somme des moments des deux forces d'un couple, par rapport à un point quelconque de son plan, on trouve toujours que cette somme de moments est égale au produit de l'une des deux forces du couple par la longueur de son bras de levier : ce produit est ce que l'on nomme le *moment du couple*. On peut remarquer que le moment d'un couple a la même valeur numérique que la surface du parallélogramme dont les droites qui représentent les forces du couple formeraient deux côtés opposés.

Si l'on projette un couple sur un plan quelconque, la projection sera encore un couple; le moment du couple projeté s'obtiendra en multipliant le moment du premier couple par le cosinus de l'angle formé par son plan avec le plan de projection : cette proposition se démontre facilement, en substituant au moment du couple le parallélogramme dont il vient d'être question.

La somme des moments des deux forces d'un couple, par rapport à une droite quelconque, est égale au moment du couple suivant lequel le couple donné se projette sur un plan perpendiculaire à la droite. Il s'ensuit que la somme des moments des deux forces d'un couple par rapport à une droite est la même que la somme des moments de ces deux forces par rapport à une autre droite quelconque, parallèle à la première. Cette somme de moments est nulle, si la droite à laquelle les moments se rapportent est parallèle au plan du couple; elle est maximum si la droite est perpendiculaire à ce plan.

Deux couples sont équivalents (§ 180) lorsque leurs plans sont parallèles ou coïncident, que leurs moments sont égaux, et qu'ils tendent à faire tourner leurs bras de levier dans le même sens. On voit, en effet, que, d'une part, la somme des projections des deux forces du premier couple sur une droite quelconque, est égale à la somme des projections des deux forces du second couple sur la même droite, puisque chacune de ces deux sommes est nulle; et que, d'une autre part, la somme des moments des deux forces du premier couple par rapport à une droite quelconque est égale à la somme des moments des deux forces du second couple par rapport à la même droite, ainsi que cela résulte des propositions qui viennent d'être établies. Deux couples qui ne satisferaient pas aux conditions énoncées ici ne seraient évidemment pas équivalents : la somme des moments des forces du premier couple par rapport à une droite ne serait pas égale à la somme des moments des forces du second couple par rapport à la même droite, quelle que fût la position de cette droite dans l'espace.

Il résulte de là qu'un couple appliqué à un solide invariable en équilibre peut être transporté parallèlement à lui-même, comme on voudra, dans son plan ou dans un plan parallèle; qu'on peut le faire tourner comme on voudra dans son plan, après qu'on l'a ainsi transporté; qu'on peut même changer la grandeur commune de ses deux forces, en faisant varier en même temps son bras de levier dans un rapport inverse, sans qu'il cesse d'être équivalent à ce qu'il était primitivement. Si l'on se reporte à la définition qui a été donnée précédemment (§ 161) du moment résultant d'un système quelconque de forces par rapport à un point, on verra que, dans le cas où le système de forces consiste simplement en un couple, ce moment résultant est toujours le même, quel que soit le point auquel on le rapporte, et a pour valeur le moment même du couple : en effet, on peut toujours transporter le couple parallèlement à lui-même, de manière que le point d'application de l'une de ses deux forces vienne coïncider avec le point par rapport auquel on veut évaluer son moment résultant; de sorte que ce moment résultant est égal au produit de la seconde force du couple par sa distance au point d'application de la première.

Si l'on considère un système quelconque de couples appliqués à un solide invariable en équilibre, les forces qui composent ces couples peuvent toujours être remplacées par deux forces seulement, R_1, R_2 (§ 159). Ces deux forces R_1, R_2 forment nécessairement un couple; car elles constituent un système équivalent au système des couples donnés, et, par conséquent, la somme de leurs projections sur une droite quelconque doit être nulle comme la somme des projections des forces de ces couples donnés sur la même droite (§ 180), ce qui ne peut avoir lieu qu'autant qu'elles sont égales, parallèles et de sens contraires. Ainsi un système quelconque de couples peut toujours être remplacé par un couple unique auquel on donne le nom de *couple résultant*; par opposition, les couples auxquels il peut être substitué sont souvent désignés sous le nom de *couples composants*. Pour trouver le couple résultant K d'un système de couples donnés C, C′, C″,.... transportons ces couples donnés parallèlement à eux-mêmes, de manière que le point d'application de l'une des forces de chacun d'eux coïncide avec un certain point O; imaginons, en outre, que le couple cherché K soit dans une position analogue, c'est-à-dire que l'une de ses deux forces ait également son point d'application en O; enfin appliquons au système des couples C, C′, C″..... pris dans cette position, le théorème établi précédemment (§ 161) relativement à la composition des moments d'un système quelconque de forces par rapport à un point, et considérons les moments des forces des couples C, C′, C″,.... K, par rapport au point O : en effectuant une construction analogue au polygone des forces sur les axes des moments des forces de C, C′, C″,.... qui n'agissent pas sur le point O, on trouvera l'axe du moment de la force K qui n'est pas appliquée à ce point O, et par conséquent on aura à la fois la direction du plan du couple résultant K, la grandeur de son moment et le sens dans lequel il tend à faire tourner son bras de levier.

Lorsqu'on prend ainsi le moment de l'une des deux forces d'un couple par rapport au point d'application de l'autre force, et qu'on détermine l'axe qui représente ce moment (§ 160), on a ce qu'on nomme l'*axe du couple*. Cet axe, qu'on peut mener par un point quelconque de l'espace, suffit pour représenter complètement le couple auquel il correspond ; il fait connaître la direction du plan du couple, la grandeur du moment de ce couple et le sens dans lequel il agit. On voit, par ce qui précède,

que, pour composer un système quelconque de couples, on n'a qu'à considérer les axes de ces couples menés par un même point de l'espace, et à composer ces axes entre eux comme si c'étaient des forces : l'axe résultant de cette composition est l'axe du couple résultant cherché.

§ 182. **Usage de la théorie des couples pour la composition des forces appliquées à un solide invariable.** — Une force F appliquée en un point A d'un solide invariable, *fig.* 91, peut être transportée parallèlement à elle-même en un autre point B du même solide, pourvu qu'on lui adjoigne un couple situé dans le plan FAB et ayant pour moment le produit de la force F par la distance du point B à sa direction primitive. En effet, si l'on applique en B deux forces F′, F″, toutes deux égales à F, suivant une même droite parallèle à la direction de la force F, et en sens contraires l'une de l'autre, ces deux forces se feront équilibre ; et, par conséquent, le système des trois forces F, F′, F″ sera équivalent à la force F : or ce système peut être regardé comme se composant de la force F′ et du couple formé par les deux forces F, F″, ce qui est conforme à la proposition énoncée.

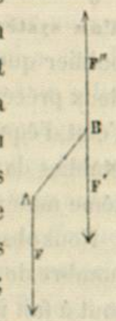

Fig. 91.

Considérons un système quelconque de forces appliquées à un solide invariable. D'après ce que nous venons de voir, chacune de ces forces peut être transportée parallèlement à elle-même en un point O, pris à volonté dans le solide ou lié invariablement avec lui, pourvu qu'à la force ainsi transportée on joigne le couple dû à cette translation ; le système des forces données peut donc toujours être remplacé par un système de forces égales et parallèles aux premières, et appliquées au point O, joint à un système de couples. Toutes les forces appliquées au point O peuvent se composer en une seule force ; tous les couples peuvent également se composer en un seul couple (§ 181) : donc le système donné se trouvera remplacé par une force unique appliquée au point O et un couple unique. On peut toujours supposer que le point d'application de l'une des deux forces du couple coïncide avec le point O ; dès lors, deux des trois forces auxquelles le système vient d'être réduit sont appliquées au même point O, et peuvent se composer en une seule agissant également sur ce point : donc le système des forces données se trouve, en définitive, remplacé par deux forces dont une agit sur un point O choisi à volonté. Nous retombons ainsi sur un résultat que nous avions déjà obtenu par d'autres considérations (§ 159).

§ 183. **Application des théories précédentes à l'équilibre d'un système matériel quelconque.** — Nous ne devons pas oublier que tout ce qui a été dit dans ce chapitre et dans les deux précédents se rapporte à un solide invariable considéré à l'état d'équilibre. Voyons comment les théories que nous avons établies dans ces trois chapitres peuvent s'appliquer à un système matériel quelconque.

Nous observerons d'abord qu'il existe dans la nature un grand nombre de corps solides qui ne se déforment que de quantités tout à fait inappréciables, sous l'action des forces qui leur sont habituellement appliquées : tels sont la plupart des matériaux qui entrent dans les constructions et dans les machines. On peut donc appliquer approximativement à ces solides naturels ce qui a été dit dans le cas des solides invariables ; il n'en résultera qu'une erreur extrêmement faible, et d'autant plus faible que ces solides naturels se rapprocheront plus de la rigidité absolue des solides invariables.

D'un autre côté, lorsqu'un système matériel est en équilibre, quelle que soit d'ailleurs sa nature, on peut évidemment supposer qu'il soit rendu invariable de forme sans que l'équilibre soit troublé : dès lors, les forces qui sont appliquées aux diverses parties du système matériel, et qui se font équilibre sur ce système transformé en un solide invariable, doivent satisfaire aux conditions d'équilibre que nous avons trouvées précédemment. Les six équations que nous avons obtenues pour exprimer cet équilibre (§ 177), et qui étaient suffisantes dans le cas d'un solide invariable, subsistent donc encore dans le cas de l'équilibre d'un système matériel quelconque. Quoiqu'elles ne suffisent plus pour exprimer complètement l'équilibre dans ce cas, on n'en est pas moins en droit de s'en servir pour en tirer les valeurs de quelques-unes des forces qui y entrent comme inconnues ; et les résultats auxquels on arrive ainsi sont rigoureusement exacts, tout aussi bien que si le système matériel était réellement un solide invariable ayant la forme de ce système pris à l'état d'équilibre. D'après cela, quand il ne s'agit que d'arriver à ces six équitions d'équilibre, ou bien à des relations qui en soient des conséquences nécessaires, on peut appliquer aux forces qui agissent sur un système matériel quelconque en équilibre, tout ce qui a été dit relativement à la composition des forces appliquées à un solide invariable et au remplacement d'un système de forces par un autre système équivalent ; mais cette composition des forces, et en général la substitution d'un système de forces à un autre, ne doivent pas être considérées comme pouvant s'effectuer réellement, sans que l'état d'équilibre du système matériel soit changé, à moins cependant que les forces dont il s'agit ne soient appliquées à un même point du système matériel.