tés des contre-poids destinés à équilibrer le poids de ce tablier. On peut, en outre, obliger ces contre-poids à glisser le long de courbes fixes, afin que la tension de chaque chaîne due à l'action du contre-poids qui la termine varie suivant que le tablier du pont est plus ou moins relevé. Si l'on détermine ces courbes fixes de telle manière que le centre de gravité du tablier, des chaînes et des contre-poids reste toujours sur un même plan horizontal, le pont-levis sera en équilibre indifférent dans toutes les positions qu'on pourra lui faire prendre.

Un pont-levis à flèches, ou bien à contre-poids mobiles le long de courbes fixes, est loin de rentrer complètement dans le cas des systèmes à liaisons que nous avons considérés. Les tourillons du tablier et ceux des flèches éprouvent des frottements de la part des ouvertures ou coussinets dans lesquels ils tournent; les contre-poids glissant le long de courbes fixes éprouvent également des frottements de la part de ces courbes. Mais il est clair qu'on peut faire abstraction de ces frottements divers dans la théorie de l'établissement des ponts-levis, et raisonner comme nous l'avons fait, en faisant rentrer ces appareils dans les systèmes à liaisons que nous avons considérés d'une manière générale : si un pont-levis est disposé de manière à être en équilibre indifférent dans toutes les positions qu'on peut lui donner, dans le cas où il ne se développerait de frottement dans aucune de ses parties, il restera à plus forte raison en équilibre dans chacune de ses positions lorsque ces frottements exerceront leur action.

§ 191. Dans la construction des appareils de diverses espèces destinés à peser les corps, on cherche à réaliser autant que possible les liaisons idéales que nous avons définies précédemment (§ 186); ces appareils sont d'autant meilleurs à ce point de vue, qu'ils sont plus près de rentrer complètement dans les systèmes à liaisons pour lesquels nous avons établi le théorème du § 186. Ainsi, on dispose les diverses pièces susceptibles de fléchir sous l'action des forces qui leur sont appliquées, telles que les fléaux de balances, de manière que leur flexion soit toujours très faible et qu'on puisse les regarder comme étant

des solides invariables; on fait en sorte que les diverses pièces solides qui doivent se mouvoir les unes par rapport aux autres ne se touchent que par des couteaux à arêtes déliées, de manière que les mouvements relatifs soient des rotations autour des arêtes de ces couteaux, etc. Les frottements que l'on peut laisser subsister dans certains appareils, tout en en faisant abstraction dans les considérations théoriques sur lesquelles repose leur construction (§ 190), parce qu'ils ne nuisent pas à l'effet qu'on veut obtenir, seraient au contraire ici très nuisibles, en ce qu'ils diminueraient la mobilité, et par conséquent la sensibilité des appareils dont nous nous occupons.

Le plus ordinairement ces appareils, dont on se sert pour peser les corps, se composent de deux plateaux mobiles reliés l'un à l'autre par un système de pièces solides articulées entre elles; de sorte que le mouvement ascendant ou descendant de l'un des plateaux détermine nécessairement le mouvement de l'autre plateau en sens contraire. Le corps à peser étant placé sur l'un des plateaux, on lui fait équilibre au moyen de poids connus placés en quantité convenable sur l'autre plateau, et la quantité de ces poids connus, qu'on a dû employer, fait connaître le poids du corps. Il est aisé de voir qu'un appareil de ce genre doit nécessairement satisfaire à cette condition, que le mouvement de chacun des deux plateaux soit un mouvement de translation, c'est-à-dire que ses diverses parties s'élèvent ou s'abaissent en même temps d'une même quantité. Car, en supposant que l'équilibre soit établi, comme nous venons de le dire, il faut que cet équilibre ne soit pas troublé par un simple changement de position d'un des corps pesants sur la surface d'un plateau qui le supporte; il faut donc que le centre de gravité de ce corps se déplace verticalement de la même quantité, quelle que soit sa position sur le plateau, pour un même mouvement virtuel attribué au système et compatible avec les liaisons, sans quoi la somme des travaux virtuels de toutes les actions de la pesanteur sur ce système changerait de valeur par le changement de position du corps, et cette somme ne pourrait pas être nulle dans tous les cas.

La condition que nous venons de faire connaître, et qui consiste en ce que chacun des deux plateaux doit s'élever ou s'abaisser d'un mouvement de translation pour un mouvement infiniment petit des pièces articulées qui les relient l'un à l'autre, suffit pour que l'appareil puisse être employé à la détermination des poids des corps, en supposant, bien entendu, qu'il satisfasse d'ailleurs à la condition de mobilité dont nous avons parlé tout d'abord. L'équilibre qu'on établit en mettant le corps à peser sur l'un des plateaux, et des poids connus sur l'autre plateau, est tel que les diverses pièces mobiles de l'appareil sont dans les mêmes positions que si les plateaux n'étaient chargés ni l'un ni l'autre; en sorte que, pour tout déplacement virtuel du système, la somme des travaux virtuels des actions de la pesanteur, sur les diverses parties qui constituent l'appareil lui-même, est égale à zéro : il faut donc que la somme des travaux virtuels de la pesanteur, sur le corps qu'on veut peser d'une part, et sur les poids connus d'une autre part, soit séparément nulle; c'est-à-dire que le poids inconnu et l'ensemble des poids connus sont entre eux dans le rapport inverse des quantités dont les deux plateaux se déplacent en même temps suivant la verticale. Ainsi, il suffit de connaître le rapport qui existe entre ces déplacements simultanés des deux plateaux, estimés suivant la verticale, pour en conclure le rapport du poids inconnu à l'ensemble des poids connus qui lui font équilibre, et par conséquent pour trouver la valeur de ce poids inconnu. Dans la balance ordinaire, où les deux plateaux sont suspendus aux extrémités d'un fléau mobile autour de son milieu, les déplacements simultanés des plateaux suivant la verticale sont égaux l'un à l'autre, et par suite le poids du corps que l'on pèse est égal à l'ensemble des poids connus avec lesquels on lui fait équilibre. Il en est de même de la balance de Roberval, ou balance à plateaux supérieurs, qui est si répandue depuis quelque temps dans le commerce. Dans les bascules diverses employées à peser les corps un peu lourds, les déplacements simultanés des deux plateaux sont ordinairement entre eux dans le rapport de 1 à 10 ou même de 1 à 100, de sorte qu'il faut prendre 10 fois ou 100

fois l'ensemble des poids connus mis dans le petit plateau pour avoir le poids du corps que l'on pèse.

§ 192. **Équilibre du polygone funiculaire.** — Supposons qu'un fil parfaitement flexible et inextensible soit sollicité par des forces F, F', F'', F''', F$^{\text{IV}}$, *fig.* 94, appliquées à ses extrémités,

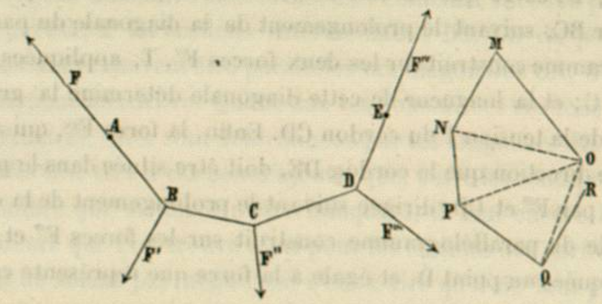

Fig. 94.

A, E, et à divers points B, C, D, de sa longueur; ce fil étant en équilibre sous l'action des forces dont il s'agit, affectera la forme d'un polygone ayant pour sommets les divers points d'application de ces forces : on donne à un pareil fil le nom de *polygone funiculaire*. Nous allons voir en quoi consistent les conditions de son équilibre.

Chacun des cordons AB, BC,... éprouve une certaine tension, et l'on conçoit que cette tension peut être évaluée en nombre à l'aide d'un dynamomètre (§ 86) qu'on interposerait entre deux parties de ce cordon, préalablement coupé en un point quelconque de sa longueur. La tension du cordon AB est évidemment égale à la force F, et la direction de ce cordon est la même que celle de cette force. Il en est de même du cordon DE, qui est dirigé suivant la direction de la force F$^{\text{IV}}$, et dont la tension est égale à cette force. Soient T et T' les tensions des cordons intermédiaires BC, CD; le point B est en équilibre sous l'action des forces F', F, T, dont les deux dernières agissent respectivement suivant les lignes BA, BC; il s'ensuit que l'une quelconque de ces trois forces est égale et directement opposée à la résultante des deux autres : donc le cordon BC doit être dirigé dans le plan des deux forces F, F′, suivant le prolongement de la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces, appliquées toutes deux au point B, et la longueur de cette diagonale détermine la grandeur de la tension T du cordon BC. De même l'équilibre du point C, soumis aux actions des forces F″, T, T′, exige que CD soit dirigé dans le plan mené par F″ et par BC, suivant le prolongement de la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces F″, T, appliquées au point C; et la longueur de cette diagonale détermine la grandeur de la tension T du cordon CD. Enfin, la force F$^{\text{iv}}$, qui a la même direction que le cordon DE, doit être située dans le plan mené par F‴ et CD, dirigée suivant le prolongement de la diagonale du parallélogramme construit sur les forces F‴ et T′, appliquées au point D, et égale à la force que représente cette diagonale.

Ces conditions d'équilibre du polygone funiculaire peuvent s'exprimer simplement à l'aide d'une construction géométrique, ainsi que nous allons le voir. Par un point quelconque O de l'espace, *fig.* 94, menons une droite OM égale et parallèle à celle qui représente la force F, et dans le sens dans lequel cette force agit; par le point M ainsi obtenu, menons de même une droite MN égale et parallèle à celle qui représente la force F; la droite ON est égale et parallèle à celle qui représente la résultante des deux forces F, F′ : le cordon BC doit donc être parallèle à la droite ON, et la tension T de ce cordon doit être égale à la force que représente cette droite. On verra de même que, si l'on mène NP égale et parallèle à la droite qui représente la force F″, OP sera égale et parallèle à la droite qui représente la résultante des forces F″ et T, appliquées au point C : le cordon DC doit donc être parallèle à la droite OP, et la tension T de ce cordon doit être égale à la force que représente cette droite. Enfin, si l'on mène PQ, égale et parallèle à F‴, la force F$^{\text{iv}}$ doit être parallèle à OQ et égale à la force que cette droite OQ représente; de sorte que, si l'on mène par le point Q une droite égale et parallèle à celle qui représente la force F$^{\text{iv}}$, l'extrémité de cette droite doit

coïncider avec le point O. Il suit de là que si, à partir d'un point quelconque O, on mène à la suite les unes des autres les droites OM, MN, NP, PQ, QR, respectivement égales et parallèles aux forces F, F′, F″, F‴, F$^{\text{iv}}$, les conditions d'équilibre du polygone funiculaire consistent en ce que : 1° l'extrémité R du polygone auxiliaire ainsi formé doit coïncider avec son point de départ O; 2° les cordons intermédiaires BC, CD du polygone funiculaire doivent être parallèles aux diagonales ON, OP de ce polygone auxiliaire. Quant aux tensions de ces cordons intermédiaires, elles sont déterminées par les longueurs des diagonales ON, OP. Il est bon d'ajouter que, outre les conditions d'équilibre qui viennent d'être indiquées, il faut encore que les valeurs que l'on trouve ainsi pour les tensions des cordons BC, CD ne soient pas négatives, c'est-à-dire qu'il ne faut pas que les forces appliquées aux deux extrémités de l'un de ces cordons tendent à rapprocher ces extrémités l'une de l'autre, au lieu de tendre à les éloigner : si l'on trouvait une valeur négative pour la tension d'un cordon, l'équilibre ne pourrait pas avoir lieu, à moins que ce cordon ne fût remplacé par une tige rigide capable de résister aux actions des forces qui tendent à rapprocher ses extrémités l'une de l'autre.

Dans le cas particulier où les diverses forces F, F′, F″,.... qui agissent sur le polygone funiculaire, sont toutes parallèles à un même plan, il est aisé de voir que le polygone auxiliaire OMNP.... est situé tout entier dans un plan parallèle au précédent; le polygone funiculaire dont les divers cordons sont parallèles aux lignes OM, ON, OP,...., est donc également situé tout entier dans un plan, qui contient en même temps les directions des forces F, F′, F″,.... Il en est encore de même lorsque toutes les forces intermédiaires F′, F″, F‴ sont parallèles entre elles, quelles que soient les directions des forces extrêmes F, F$^{\text{iv}}$; car alors les côtés MN, NP, PQ du polygone auxiliaire sont dirigés suivant une même ligne droite, et par conséquent ce polygone auxiliaire prend dans son ensemble la forme d'un triangle : le polygone funiculaire est donc nécessairement situé tout entier dans un plan parallèle au plan de ce triangle.

§ 193. Nous pouvons appliquer ce qui précède à la détermination de la forme des chaînes qui supportent un pont suspendu. Ces chaînes sont reliées au tablier du pont par des barres verticales équidistantes. Dans la construction d'un pareil pont, on s'impose la condition que ces barres verticales soient également tendues, c'est-à-dire que chacune d'elles ait à supporter une même portion du poids total du tablier : c'est d'après cette condition que l'on cherche la forme que doit prendre chacune des chaînes, considérée comme constituant un polygone funiculaire.

Soient ABCDE, *fig.* 95, une portion quelconque de l'une de ces chaînes, et AA′, BB′, CC′, DD′.... les barres verticales

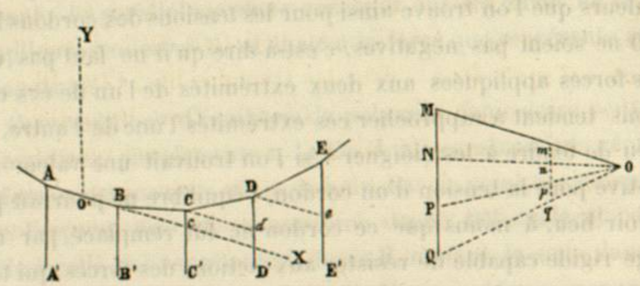

Fig. 95.

qui relient cette chaîne au tablier. Construisons le polygone auxiliaire OMNPQ du paragraphe précédent. Pour cela, nous mènerons par un point quelconque O une droite OM parallèle à AB et égale en longueur à la ligne qui représente la tension de AB supposée connue ; par le point M, nous mènerons une ligne MN verticale et égale à celle qui représente la charge supportée par la barre BB′ ; par le point N, nous mènerons de même une ligne NP verticale et égale à celle qui représente la charge de la barre CC′, et ainsi de suite. Les barres BB′, CC′, DD′,.... devant être également chargées, les lignes MN, NP, PQ,.... seront toutes de même longueur. Nous savons que les côtés BC, CD, DE,.... doivent être respectivement parallèles aux lignes ON, OP, OQ,.... Voyons maintenant quelles sont les conséquences que nous pourrons tirer de cette construction.

Traçons une ligne *mnpq* parallèle à MNPQ, et passant à une distance du point O égale à la distance constante A′B′ qui sépare deux barres consécutives ; les portions *mn*, *np*, *pq*,.... de cette ligne comprises entre les points où elle coupe OM, ON, OP, OQ,.... seront égales entre elles. Pour étudier la forme de la chaîne ABCD,.... rapportons ces divers sommets à deux axes O′X, O′Y, dont l'un est dirigé suivant le côté AB, et l'autre est la verticale menée par le milieu O′ de ce côté. Menons, en outre, par les points C, D,.... des lignes C*d*, D*e*,.... parallèles à O′X. Il est aisé de voir que les lignes B*c*, C*d*, D*e*,.... sont toutes égales à O*m*; d'ailleurs, les côtés AB, BC, CD, DE,.... étant respectivement parallèles à O*m*, O*n*, O*p*, O*q*,...., les angles CB*c*, DC*d*, ED*e*,.... sont respectivement égaux aux angles *m*O*n*, *m*O*p*, *m*O*q*,...., et les angles B*c*C, C*d*D, D*e*E,.... sont tous égaux à l'angle O*mn* : donc les triangles BC*c*, CD*d*, DE*e*,.... sont respectivement égaux aux triangles O*mn*, O*mp*, O*mq*,.... et par suite les lignes C*c*, D*d*, E*e*,.... sont respectivement égales à *mn*, *mq*, *mp*,...., c'est-à-dire à *mn*, 2*mn*, 3*mn*,.... Désignons B*c* par a, et C*c* par b. Nous aurons évidemment pour les coordonnées du point B,

$$x=\frac{1}{2}a, \qquad y=0;$$

pour celles du point C,

$$x=\frac{3}{2}a, \qquad y=b;$$

pour celles du point D,

$$x=\frac{5}{2}a, \qquad y=b+2b;$$

pour celles du point E,

$$x=\frac{7}{2}a, \qquad y=b+2b+3b;$$

et en général, pour les coordonnées d'un sommet quelconque de rang n,

$$x=\frac{2n-1}{2}a;$$

$$y=b+2b+3b+\ldots+(n-1)b=\frac{n(n-1)}{2}b.$$

Si nous éliminons n entre ces deux dernières formules, nous trouvons l'équation

$$x^2 = \frac{2a^2}{b} y + \frac{a^2}{4},$$

qui est celle d'une courbe passant par tous les sommets A,B,C, D,.... : on voit que cette courbe est une parabole du second degré, ayant l'axe des y pour un de ses diamètres, et par conséquent ayant son axe de figure dirigé verticalement.

Supposons, ce qui a lieu habituellement, que l'un des côtés de la chaîne soit horizontal, et que nous connaissions l'inclinaison d'un autre côté quelconque, du côté extrême par exemple; nous pourrons facilement déterminer la forme de la chaîne entre ces deux côtés, ainsi que les rapports des tensions de ses diverses parties à la charge constante que chacun de ses sommets doit supporter. Pour cela, traçons une ligne horizontale ST, *fig.* 96, puis menons par le point S une verticale

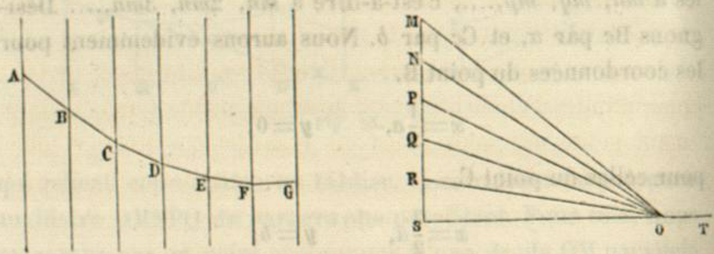

Fig. 96.

sur laquelle nous porterons autant de longueurs égales SR, RQ,......, NM, qu'il y a de sommets de la chaîne entre le côté horizontal et le côté dont l'inclinaison nous est donnée; menons ensuite par le point E une ligne MO, inclinée comme ce dernier côté : nous pourrons regarder les longueurs SR, RQ,.... MN, comme représentant les charges égales des divers sommets, et alors la longueur MO représentera la tension du côté auquel cette ligne est parallèle, SO représentera la tension du côté horizontal, et enfin les lignes RO, QO,......, feront connaître à la fois les directions des côtés intermédiaires

et les tensions de ces côtés. Si, après avoir mené une série de parallèles équidistantes destinées à représenter les directions des diverses barres verticales de suspension, on trace le côté horizontal FG entre deux de ces parallèles, il suffira de mener par le point F une ligne FE parallèle à OR, puis par le point E une ligne ED parallèle à OQ, et ainsi de suite, pour avoir la figure ABCDEFG de la partie de chaîne comprise entre le côté horizontal FG et le côté AB, dont l'inclinaison est donnée.

Nous n'avons pas besoin d'en dire davantage pour faire comprendre l'usage du polygone auxiliaire dans la solution des diverses questions qu'on pourrait se proposer relativement à la chaîne des ponts suspendus.

§ 194. **Équilibre d'un fil homogène pesant.** — Supposons qu'un fil inextensible et parfaitement flexible soit attaché par ses deux extrémités à deux points fixes, et cherchons la figure d'équilibre qu'il prendra sous l'action de la pesanteur. Nous admettrons que ce fil est homogène, c'est-à-dire que les diverses portions de même longueur dans lesquelles on pourra le décomposer ont toutes la même masse.

Imaginons que le fil, pris à l'état d'équilibre, soit divisé en une infinité d'éléments ayant tous une même longueur infiniment petite ds; nous pourrons regarder ces divers éléments comme étant les côtés d'un polygone infinitésimal suivant lequel le fil est dirigé. Désignons par p le poids de l'unité de longueur du fil; le poids de chacun des éléments sera égal à pds. Il est aisé de voir qu'au lieu de regarder la pesanteur comme agissant sur toute la longueur de chacun des éléments du fil, on peut supposer que le polygone infinitésimal formé par la succession de ces éléments soit uniquement soumis à des forces verticales, toutes égales à pds, appliquées à ses différents sommets : la forme que l'on trouvera pour ce polygone infinitésimal sera précisément celle qu'affectera le fil homogène pesant que nous considérons. La question d'équilibre dont nous nous occupons n'est plus dès lors qu'un cas particulier de l'équilibre du polygone funiculaire.

Toutes les forces appliquées aux divers sommets du polygone infinitésimal dont il s'agit étant parallèles entre elles, nous savons déjà, d'après ce qui a été dit précédemment (§ 192), que ce polygone doit être situé tout entier dans un plan, qui sera le plan vertical mené par les deux points d'attache du fil. Rapportons les divers points du fil à deux axes coordonnés dirigés dans ce plan, et prenons pour axe des x une ligne horizontale, et pour axe des y une verticale; supposons, en outre, que les y se comptent positivement de bas en haut. Soient T la tension d'un côté quelconque du polygone infinitésimal dont nous cherchons la forme, et dx, dy, les projections de ce côté sur les axes coordonnés; les composantes de la tension T, suivant des parallèles aux axes, auront pour valeurs

$$T\frac{dx}{ds}, \qquad T\frac{dy}{ds}.$$

Si nous considérons les composantes analogues de l'élément suivant, il est clair qu'elles auront pour valeurs

$$T\frac{dx}{ds}+d\left(T\frac{dx}{ds}\right), \qquad T\frac{dy}{ds}+d\left(T\frac{dy}{ds}\right).$$

D'après cela, il est aisé de voir que, pour l'équilibre du sommet commun à ces deux éléments consécutifs du polygone infinitésimal, on doit avoir les équations

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0, \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right)-pds\,0=, \qquad (a)$$

qui expriment que les sommes des projections des forces appliquées à ce sommet sur chacun des deux axes coordonnés sont séparément nulles (§ 104). L'intégration de ces deux équations différentielles va nous faire connaître la forme d'équilibre du fil.

La première des équations (a) s'intègre immédiatement et donne

$$T\frac{dx}{ds}=Q,$$

Q étant une constante arbitraire; cette constante Q est évidemment la valeur de la tension T, au point le plus bas du fil, c'est-à-dire qu'elle représente la tension de l'élément horizontal qui se trouve à ce point le plus bas, puisque, pour cet élément, dx est égal à ds. Si l'on tire de là la valeur de T, pour la substituer dans la seconde des équations (a), cette équation devient

$$Q\,d\frac{dy}{dx}=pds;$$

ou bien, en remplaçant ds par sa valeur $dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$,

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\frac{P}{Q}=\frac{1}{a}, \qquad (b)$$

a étant mis pour simplifier à la place de $\frac{Q}{p}$. La lettre a désigne évidemment la longueur d'une portion du fil, dont le poids pa est égal à la tension Q, au point le plus bas.

En intégrant l'équation (b), on trouve

$$l.\left(\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)=\frac{x}{a}. \qquad (c)$$

La constante que nous devrions ajouter à l'un des deux membres est nulle, si nous convenons de prendre pour axe des y la verticale menée par le point le plus bas du fil, de telle sorte que, pour $x=0$, on doit avoir $\frac{dy}{dx}=0$. L'équation (c), résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, donne

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

d'où, en intégrant de nouveau, et supposant que l'axe des x soit choisi de manière que la constante soit nulle,

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Telle est l'équation de la courbe qu'affecte un fil homogène et parfaitement flexible, sous l'action de la pesanteur. Cette courbe, que l'on nomme *chaînette*, jouit de propriétés remarquables; mais ce n'est pas ici le lieu de nous en occuper.

CHAPITRE V

ÉQUILIBRE DES SOLIDES NATURELS.

§ 195. Ainsi que nous l'avons déjà dit (§ 183), les conditions d'équilibre d'un solide invariable peuvent être appliquées à un solide naturel, soit en prenant ce solide avec la forme qu'il possédait avant qu'il fût soumis à l'action des forces que l'on considère, soit en lui attribuant la forme qu'il a prise sous l'action de ces forces. Dans le premier cas, on ne commet généralement qu'une erreur très petite, et d'autant plus petite que le solide est moins déformable; dans le second cas, on ne commet absolument aucune erreur. Mais cette seconde manière d'appliquer les conditions d'équilibre d'un solide invariable à l'équilibre d'un solide naturel ne peut être employée qu'autant que l'on a à étudier un équilibre existant réellement, et que l'on veut trouver les grandeurs de quelques-unes des forces qui agissent sur le solide considéré. Si l'on donne un solide naturel, et qu'on demande s'il pourra être en équilibre sous l'action de diverses forces données, en les supposant appliquées à certains points de ce solide, on ne connaît pas d'avance la forme qu'affectera ce solide lorsque l'équilibre dont il s'agit sera établi, si toutefois il peut s'établir; il faut alors, ou bien qu'on néglige la déformation que les forces feront subir au solide, ou bien qu'on sache comment il se déforme sous l'action de forces données. Dans la plupart des cas, on opère de la première manière; c'est-à-