d'où, en intégrant de nouveau, et supposant que l'axe des x soit choisi de manière que la constante soit nulle,

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Telle est l'équation de la courbe qu'affecte un fil homogène et parfaitement flexible, sous l'action de la pesanteur. Cette courbe, que l'on nomme *chaînette*, jouit de propriétés remarquables ; mais ce n'est pas ici le lieu de nous en occuper.

CHAPITRE V

ÉQUILIBRE DES SOLIDES NATURELS.

§ 195. Ainsi que nous l'avons déjà dit (§ 183), les conditions d'équilibre d'un solide invariable peuvent être appliquées à un solide naturel, soit en prenant ce solide avec la forme qu'il possédait avant qu'il fût soumis à l'action des forces que l'on considère, soit en lui attribuant la forme qu'il a prise sous l'action de ces forces. Dans le premier cas, on ne commet généralement qu'une erreur très petite, et d'autant plus petite que le solide est moins déformable ; dans le second cas, on ne commet absolument aucune erreur. Mais cette seconde manière d'appliquer les conditions d'équilibre d'un solide invariable à l'équilibre d'un solide naturel ne peut être employée qu'autant que l'on a à étudier un équilibre existant réellement, et que l'on veut trouver les grandeurs de quelques-unes des forces qui agissent sur le solide considéré. Si l'on donne un solide naturel, et qu'on demande s'il pourra être en équilibre sous l'action de diverses forces données, en les supposant appliquées à certains points de ce solide, on ne connaît pas d'avance la forme qu'affectera ce solide lorsque l'équilibre dont il s'agit sera établi, si toutefois il peut s'établir ; il faut alors, ou bien qu'on néglige la déformation que les forces feront subir au solide, ou bien qu'on sache comment il se déforme sous l'action de forces données. Dans la plupart des cas, on opère de la première manière ; c'est-à-dire que, dans la recherche des relations auxquelles doivent satisfaire les forces appliquées au solide pour qu'il y ait équilibre, on regarde ce solide comme ayant, sous l'action des forces, exactement la forme qu'il avait avant d'être soumis à cette action. Seulement, quand on suit cette marche, on doit ensuite se préoccuper de déterminer les tensions et pressions qui se développent dans les diverses parties du solide, afin de voir s'il peut supporter ces tensions ou ces pressions sans se briser. Les questions que nous allons traiter dans ce chapitre suffiront pour donner une idée nette de cette manière d'opérer.

§ 196. **Résistance d'un solide prismatique à l'extension et à la compression.** — Lorsqu'un solide homogène de forme prismatique, tel qu'une pièce de bois de charpente ou une barre de fer, est fixé à l'une de ses extrémités, et soumis à son autre extrémité à l'action d'une force F, qui tend à l'allonger, il éprouve en effet un certain allongement qui varie avec l'intensité de la force F. Si l'on désigne par l la longueur primitive du solide, par i l'allongement produit par l'action de la force F, et par ω l'aire de sa section transversale, l'expérience indique que l'on a

$$F = E\omega\frac{i}{l},$$

E étant une constante; c'est-à-dire que la force F est proportionnelle à l'aire ω de la section transversale du solide, et aussi à l'allongement $\frac{i}{l}$ de l'unité de longueur de ce solide. Le coefficient E, qui dépend uniquement de la nature du corps, est habituellement désigné sous le nom de *coefficient d'élasticité*. Cette relation entre la force F et l'allongement i qu'elle détermine n'est vraie d'ailleurs qu'autant que i ne dépasse pas une certaine limite; en sorte qu'on ne doit en faire usage qu'avec cette restriction.

Si le même solide prismatique, fixé à l'une de ses extrémités, est soumis à l'autre extrémité à l'action d'une force qui tend à le raccourcir, l'intensité de la force et le raccourcisse-

ment qu'éprouve le solide sont encore liés l'un à l'autre par la relation précédente; en sorte qu'on peut y regarder i comme représentant un allongement positif ou négatif, suivant que la force F agit dans le sens convenable pour allonger le solide, ou bien dans le sens opposé. Cette relation ne peut également s'appliquer au cas où F et i sont tous deux négatifs qu'autant que la valeur absolue de i n'est pas trop grande; la limite du raccourcissement au delà de laquelle la formule cesse d'être vraie diffère d'ailleurs en général de la limite analogue correspondant à l'allongement.

La relation expérimentale que nous venons de faire connaître va nous permettre d'étudier l'équilibre des solides naturels dans diverses circonstances.

§ 197. **Équilibre d'un solide allongé sollicité par des forces qui tendent à le faire fléchir transversalement.** — Considérons d'abord un solide ayant la forme d'un prisme symétrique par rapport à un plan, et supposons que ce solide soit soumis à des forces qui tendent à le faire fléchir parallèlement à ce plan. Nous allons chercher à déterminer la forme que prendra le solide sous l'action des forces qui lui sont appliquées, en admettant tout d'abord que la déformation qu'elles lui font éprouver est très petite.

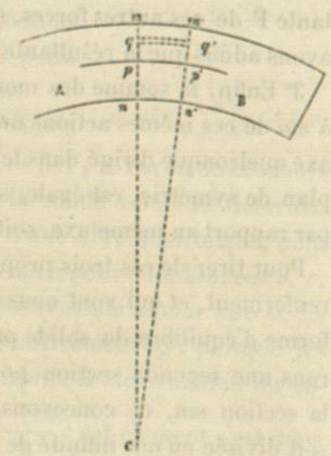

Fig. 97.

Soit mn, *fig.* 97, une section normale de solide pris à l'état d'équilibre; cette section divise le solide en deux parties A et B. Nous admettrons que les molécules qui sont dans le plan de cette section normale étaient déjà dans un même plan perpendiculaire aux arêtes du prisme avant sa flexion. Nous admettrons, en outre, que les forces extérieures qui agissent sur la partie B du solide se réduisent, soit à un couple C dont le plan est parallèle au plan de symétrie, soit à une seule force F dirigée dans le plan de symétrie parallèlement à la section *mn*.

Considérons la partie B du solide toute seule, et regardons-la comme étant un solide invariable (§ 183). Il y a équilibre entre toutes les forces qui lui sont appliquées, c'est-à-dire entre le couple C ou la force F, et les diverses forces moléculaires qui proviennent de l'action de la partie A du solide sur cette partie B. Chacune de ces dernières forces, agissant sur une des molécules de B situées dans le voisinage de la section *mn*, peut être décomposée en deux composantes, dont l'une agit perpendiculairement à *mn*, et l'autre agit dans le plan *mn*. D'après les conditions d'équilibre établies précédemment (§§ 177 et 178), on peut dire que :

1° La somme des composantes normales à *mn* des actions moléculaires exercées par A sur B est nulle, puisque la somme des projections des autres forces sur une perpendiculaire à *mn* est nulle par hypothèse.

2° La somme des composantes de ces mêmes actions moléculaires suivant *mn* est nulle, si les autres forces qui agissent sur B se réduisent à un couple G; cette somme est égale à la résultante F de ces autres forces, si elles en ont une, puisque nous avons admis que la résultante F est dirigée parallèlement à *mn*;

3° Enfin, la somme des moments des composantes normales à *mn* de ces mêmes actions moléculaires, pris par rapport à un axe quelconque dirigé dans le plan *mn* perpendiculairement au plan de symétrie, est égale, soit au moment de la force F pris par rapport au même axe, soit au moment du couple C.

Pour tirer de ces trois propositions les conséquences qu'elles renferment, et qui vont nous conduire à la détermination de la forme d'équilibre du solide prismatique dont il s'agit, considérons une seconde section normale *m'n'*, infiniment voisine de la section *mn*, et concevons que la portion *mnm'n'* du solide soit divisée en une infinité de prismes élémentaires, ayant leurs arêtes dirigées perpendiculairement à *mn*. Ces prismes élémentaires peuvent être regardés comme étant des portions infiniment petites d'autant de fibres dont l'ensemble constitue le solide

tout entier, et qui s'étendent dans toute sa longueur, parallèlement à ses arêtes. Parmi ces portions de fibres comprises entre les sections *mn*, *m'n'*, il y en a nécessairement qui se sont allongées et d'autres qui se sont raccourcies par suite de la déformation du solide ; car, si elles s'étaient toutes allongées ou toutes raccourcies, la somme des composantes normales à *mn* des actions moléculaires exercées par A sur B ne pourrait pas être nulle, comme l'indique la première des trois propositions précédentes. On comprend donc que, entre les fibres qui se sont allongées et celles qui se sont raccourcies, il doit y en avoir qui n'ont subi ni allongement ni raccourcissement : ces fibres intermédiaires, dont les éléments n'ont pas changé de longueur, malgré la déformation du solide, se nomment *fibres neutres*. Nous admettrons que les points où les fibres neutres rencontrent le plan de la section *mn* sont tous situés sur une même ligne droite UU', *fig.* 98, perpendiculaire au plan de symétrie ; nous prendrons cette droite et une droite VV', dirigée suivant l'intersection de *mn* avec le plan de symétrie, pour axes coordonnés dans le plan de la section *mn*, et nous désignerons par u et v les coordonnées d'un point quelconque par rapport à ces axes.

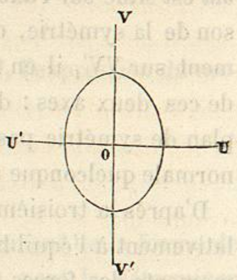

Fig. 98.

Soit *pp'*, *fig.* 97, la fibre neutre située dans le plan de symétrie, désignons par ρ le rayon de courbure *pC* de cette fibre en *p*, après que le solide a subi sa déformation. Considérons un élément *qq'* d'une fibre quelconque, dont le point de rencontre avec le plan *mn* a pour coordonnées u, v, dans ce plan, et dont la section transversale a pour aire ω. La longueur de cet élément était primitivement *pp'*, puisque les plans *mn*, *m'n'* étaient parallèles. Après la déformation du solide, elle est devenue égale à $pp' \frac{\rho + v}{\rho}$: cet élément s'est donc allongé de $pp' \frac{v}{\rho}$, et par conséquent $\frac{v}{\rho}$ est le rapport de son allongement à sa longueur primitive. D'après cela, si nous nommons φ la force normale à mn, qui produit l'allongement de l'élément qq', nous aurons (§ 196)

$$\varphi = E\omega\frac{v}{\rho}.$$

Nous pouvons regarder la force φ comme étant une des composantes normales à mn des actions moléculaires exercées par la partie A du solide sur la partie B ; la somme de ces composantes ayant pour valeur

$$\frac{E}{\rho}\Sigma\omega v,$$

et devant être nulle d'après ce qui précède, il s'ensuit qu'on a

$$\Sigma\omega x = 0.$$

Ce résultat nous montre que le centre de gravité de la section mn est situé sur l'axe UU′ (§ 166) ; et comme d'ailleurs, en raison de la symétrie, ce centre de gravité se trouve nécessairement sur VV′, il en résulte qu'il est au point d'intersection O de ces deux axes : donc, déjà la fibre neutre située dans le plan de symétrie passe par le centre de gravité d'une section normale quelconque mn.

D'après la troisième des propositions énoncées ci-dessus, relativement à l'équilibre de la partie B du solide, la somme des moments des forces telles que φ par rapport à l'axe UU′ est égale au moment de la force F, par rapport à cet axe, ou bien au moment du couple C ; cette somme de moments a pour valeur

$$\frac{E}{\rho}\Sigma\omega v^2:$$

on lui donne le nom de *moment d'élasticité*. En égalant le moment d'élasticité au moment du couple C, ou bien au moment de la force F par rapport à UU′, on aura une équation qui fera connaître le rayon de courbure ρ de la fibre neutre pp' au point p, et qui déterminera par conséquent la forme de cette fibre dans toute sa longueur, ce qui est précisément le but que nous nous proposons d'atteindre. Nous savons que, si la fibre neutre

est rapportée à des axes coordonnés rectangulaires tracés dans son plan, on a pour ρ la valeur

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Mais nous avons admis que la déformation du solide est très petite ; de sorte que, si nous prenons pour axe des x la ligne droite suivant laquelle la fibre neutre était primitivement dirigée, $\frac{dy}{dx}$ est une petite quantité dont nous pouvons négliger le carré à côté de l'unité. Nous pouvons donc prendre pour ρ la valeur simple

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

et si nous désignons par μ le facteur $\Sigma\omega v^2$, l'expression du moment d'élasticité deviendra

$$E\mu\frac{d^2y}{dx^2}.$$

La quantité μ, ou $\Sigma\omega v^2$, dépend uniquement de la forme de la section transversale mn du solide ; on peut la déterminer en prenant pour élément ω de cette section, le rectangle infiniment petit dont les côtés, parallèles aux axes OU, OV, *fig.* 98, sont égaux à du et dv, en sorte que l'on aura

$$\mu = \int\int v^2 du dv,$$

les limites de l'intégrale double étant fournies par la forme du contour de la section mn. Cette quantité μ est ce qu'on nomme le *moment d'inertie* de la section mn par rapport à l'axe OU. Nous verrons plus tard d'où vient ce nom, et nous établirons des théorèmes importants sur les moments d'inertie. Pour le moment, nous nous contenterons de faire connaître la valeur μ pour diverses formes simples attribuées à la section mn. Si mn

est un rectangle de base b et de hauteur $2a$, la base b étant parallèle à UU′, on a

$$\omega = \tfrac{2}{3} ba^3 = \tfrac{1}{3} \Omega a^2,$$

en désignant par Ω la surface du rectangle. Si mn est un triangle isocèle de base b et de hauteur h, la base étant parallèle à UU′, on a

$$\mu = \tfrac{1}{36} bh^3 - \tfrac{1}{12} \Omega h^2,$$

Ω étant encore la surface du triangle. Si mn est un cercle plein de rayon r, on a

$$\mu = \tfrac{1}{4} \pi r^4 = \tfrac{1}{4} \Omega r^2.$$

Enfin, si mn est l'espace compris entre deux circonférences de cercle concentriques de rayon r et r', on a

$$\mu = \tfrac{1}{4} \pi (r^4 - r'^4) = \tfrac{1}{4} \Omega (r^2 + r'^2).$$

§ 198. Nous allons donner plusieurs exemples de l'application de la théorie qui vient d'être exposée, à la détermination de la forme d'équilibre d'un solide prismatique soumis à l'action de forces qui le font fléchir transversalement.

Supposons d'abord que le solide soit encastré à l'une de ses extrémités, *fig.* 99, de telle sorte que, non seulement l'extrémité O de la fibre neutre soit fixe, mais encore que la tangente à cette fibre en O ne puisse pas changer de direction. Si le prisme est soumis à l'action d'une seule force F, agissant à l'autre extrémité et perpendiculairement à la direction primitixe OX de la fibre neutre, on devra exprimer que le moment de la force F par rapport au point p, où la fibre neutre perce le plan mn d'une section transversale quelconque, est égal au moment d'élasticité du prisme correspondant à cette section.

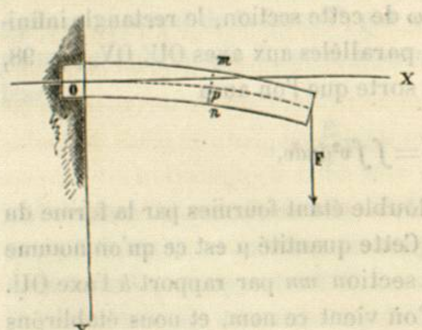

Fig. 99.

D'après cela, si x et y sont les coordonnées du point p par rapport aux axes OX, OY, et si l est la longueur primitive du prisme, longueur qu'on peut prendre sans erreur appréciable pour l'abscisse du point d'application de la force F, on aura

$$\mathrm{E}\mu \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{F}(l - x);$$

d'où, en intégrant et observant que y et $\frac{dy}{dx}$ sont nuls pour $x = 0$,

$$y = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}\mu} (\tfrac{1}{2} lx^2 - \tfrac{1}{6} x^3):$$

telle est l'équation de la courbe formée par la fibre neutre, par suite de l'action de la force F. La flèche f, produite par l'action de la force F, c'est-à dire la quantité dont l'extrémité de la fibre neutre s'est écartée de l'axe OX, s'obtient en faisant $x = l$ dans la valeur de y, ce qui donne

$$\mathrm{F} = \tfrac{1}{3} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}\mu} l^3.$$

Supposons maintenant que, le prisme étant dans les mêmes conditions que précédemment, il soit soumis uniquement à l'action de la pesanteur dirigée parallèlement à l'axe OY. La résultante des actions de la pesanteur sur les diverses molécules de la portion du prisme qui se trouve à droite de la section mn a pour valeur $p\,(l - x)$, en désignant par p le poids de l'unité de longueur du prisme, et son point d'application est situé au milieu de cette portion du prisme ; le moment de cette force par rapport au point p est donc égal à

$$\tfrac{1}{2} p (l - x)^2;$$

il s'ensuit qu'on a

$$\mathrm{E}\mu \frac{d^2y}{dy^2} = \tfrac{1}{2} p (l - x)^2:$$

d'où, en intégrant et observant que y et $\frac{dy}{dx}$ doivent être nuls pour $x=0$,

$$y=\frac{p}{2E\mu}\left(\tfrac{1}{2}l^2x^2-\tfrac{1}{3}lx^3+\tfrac{1}{12}x^4\right).$$

On en déduit pour la flèche f, produite par l'action de la pesanteur,

$$f=\frac{pl^4}{8E\mu}.$$

Si le prisme, toujours dans les mêmes conditions que précédemment, est soumis à la fois à la pesanteur et à une force F appliquée à son extrémité et agissant dans le même sens que la pesanteur, il est aisé de voir que l'on obtiendra l'équation de la courbe suivant laquelle se dirige la fibre neutre, en égalant y à la somme des deux valeurs que nous venons de trouver pour cette variable dans les deux cas précédents ; la valeur de la flèche f sera également la somme des flèches correspondant à ces deux cas.

Considérons encore un prisme reposant simplement sur deux appuis, A, B, *fig.* 100, et soumis à l'action d'une force F dirigée perpendiculairement à sa longueur. Les résistances parallèles Q et Q′, que les deux appuis A, B, exercent sur le solide, composées entre elles comme si le solide était invariable de forme, doivent évidemment avoir pour résultante une force égale et directement opposée à la force F ; elles ont donc pour valeurs

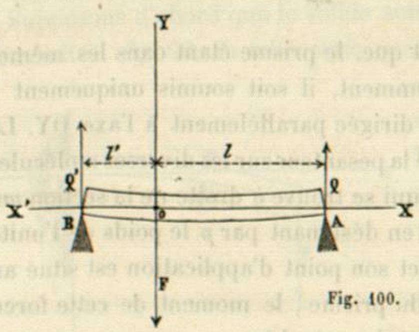

Fig. 100.

$$Q=\frac{Fl'}{l+l'},\qquad Q'=\frac{Fl}{l+l'},$$

en désignant par l et l' les distances des points A, B à la verticale OY, ou bien, ce qui est à très peu près la même chose, les longueurs des deux portions du solide situées de part et d'autre du point d'application O de la force F. Si nous nous occupons d'abord de la portion du solide qui se trouve à droite du point O, et qui est soumise à l'action de la force Q à son extrémité, nous aurons pour un point quelconque de la fibre neutre de cette portion rapportée aux axes OX, OY,

$$E\mu\frac{d^2y}{dx^2}=Q(l-x);$$

d'où en intégrant, et observant que y est nul pour $x=0$,

$$y=\frac{Q}{E\mu}\left(\tfrac{1}{2}lx^2-\tfrac{1}{6}x^3\right)+Cx.$$

La constante C est la valeur de $\frac{dy}{dx}$ correspondant à $x=0$. On aura de même pour l'autre partie du solide rapportée aux axes OX′, OY,

$$y'=\frac{Q'}{E\mu}\left(\tfrac{1}{2}l'x'^2-\tfrac{1}{6}x'^3\right)+C'x'.$$

On doit observer que C′ est égal à — C ; et que, en outre, y et y' doivent être égaux pour $x=l$, et $x'=l'$: on en conclut, en tenant compte des valeurs de Q et de Q′,

$$C=\frac{Fll'(l'-l)}{3E\mu(l+l')}.$$

Les deux équations précédentes, qui définissent la forme de chacune des deux portions de la fibre neutre, sont donc complètement déterminées.

Si, au lieu d'une seule force F agissant en un point quelconque de la longueur du prisme soutenu par deux appuis à ses extrémités, on a deux forces F, F′, égales, parallèles et appliquées en deux points également éloignés du milieu du prisme, ces deux forces étant d'ailleurs dirigées perpendiculairement à sa longueur, il est clair que les résistances Q et Q′ des deux appuis seront égales chacune à l'une des deux forces F, F′ dont