il s'agit. Entre les points d'application de ces deux forces F, F′, le moment d'élasticité du prisme doit être partout égal au moment du couple formé par la force F et la résistance Q situées d'un même côté de la section transversale pour laquelle on considère ce moment d'élasticité ; d'après la valeur $\frac{E\mu}{\rho}$ du moment d'élasticité, le rayon de courbure $\rho$ de la fibre neutre est donc constant dans toute la partie comprise entre ces deux points d'application des forces F, F′, c'est-à-dire que cette partie de la fibre neutre affecte la forme d'un arc de cercle. Quant aux deux autres portions du prisme, situées en dehors des points d'application des forces F, F′, on en déterminera facilement la forme, en opérant comme précédemment et exprimant qu'elles se raccordent avec la partie moyenne aux points où ces forces F, F′ sont appliquées.

Si le prisme, reposant sur deux appuis de même hauteur, est uniquement soumis à l'action de la pesanteur, les résistances des deux appuis sont égales l'une et l'autre à $\frac{pl}{2}$, en désignant par $p$ le poids de l'unité de longueur du prisme, et par $l$ sa longueur totale. En plaçant l'origine des coordonnées au point milieu de la fibre neutre, et n'exprimant que la partie du prisme située à droite d'une section transversale quelconque et en équilibre, sous les actions simultanées de la pesanteur et de la force $\frac{pl}{2}$ appliquée à son extrémité verticalement et de bas en haut, on trouve facilement

$$E\mu\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}p\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 + \tfrac{1}{2}pl\left(\frac{l}{2}-x\right) = \tfrac{1}{2}p\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right),$$

d'où l'on déduit

$$y = \frac{p}{48E\mu}(3l^2x^2 - 2x^4),$$

en observant que $y$ est nul pour $x = 0$, et que $\frac{dy}{dx}$ est également nul pour cette valeur de $x$, en raison de la symétrie.



Les divers cas que nous venons de considérer suffisent pour montrer la marche que l'on doit suivre pour résoudre toutes les questions de ce genre qui peuvent se présenter.

§ 199. Désignons par R la force qui serait capable de rompre un prisme ayant une section égale à l'unité de surface, en agissant à l'une des extrémités de ce prisme, et dans le sens de sa longueur, de manière à l'allonger. La force capable de rompre une fibre de section $\omega$, en agissant de la même manière, sera égale à $R\omega$. Pour qu'un prisme, soumis à l'action de forces qui le font fléchir transversalement, ne se rompe dans aucune de ses parties, il faut que, pour une fibre quelconque, la force $\varphi$ (§ 197) soit plus petite que $R\omega$. Si nous nous reportons à la valeur de cette force $\varphi$, nous verrons que cette condition revient à celle-ci :

$$E\frac{v}{\rho} < R;$$

et il est clair qu'il suffit qu'elle soit satisfaite, dans chaque section transversale, pour la fibre correspondant à la plus grande valeur de $v$, valeur que nous désignerons par V : ainsi on devra avoir, pour une section quelconque du prisme,

$$E\frac{V}{\rho} < R.$$

Si nous représentons par M le moment d'élasticité correspondant à cette section, nous savons qu'on a

$$M = \frac{E\mu}{\rho};$$

la condition précédente peut donc être remplacée par cette autre

$$M < \frac{R\mu}{V}.$$

Pour que le prisme que nous considérons ne se rompe dans aucune de ses parties, sous l'action des forces qui lui sont appliquées, il suffit évidemment que la condition que nous venons d'obtenir soit satisfaite pour la section à laquelle correspond le plus grand moment d'élasticité M ; c'est dans cette section que le prisme commencerait à se rompre si les forces qui le font fléchir étaient suffisamment grandes, et c'est pour cela qu'on lui donne le nom de *section de rupture*.

Il est aisé, dans chacun des cas que nous avons considérés, de trouver la section pour laquelle le moment d'élasticité est le plus grand ; en effet, on sait que, pour une section quelconque, ce moment d'élasticité est égal au moment de la résultante F des forces appliquées à la partie du solide qui se trouve d'un côté de la section, pris par rapport au centre de gravité de la section même, ou bien au moment du couple C auquel ces forces se réduisent (§ 197). Dans le cas d'un prisme encastré à l'une de ses extrémités et soumis à son poids ou à l'action d'une force appliquée à son autre extrémité, la section de rupture est celle qui se trouve à l'extrémité encastrée. Dans le cas d'un prisme reposant sur deux appuis et soumis à une force qui agit en un point quelconque de sa longueur, la section de rupture est celle qui contient le point d'application de cette force.

§ 200. Ce qui précède peut évidemment s'appliquer sans erreur sensible à un solide allongé non prismatique dont les sections transversales varient très peu d'un point à un autre, pourvu que ce solide soit symétrique par rapport à un plan, que les forces qui lui sont appliquées tendent à le faire fléchir parallèlement à ce plan, et que la fibre neutre située dans le plan de symétrie soit rectiligne lorsque le solide n'a encore subi aucune déformation. On devra, bien entendu, tenir compte de la variation des dimensions des sections transversales que nous avions regardées jusqu'à présent comme constantes dans toute la longueur du solide. Un solide de ce genre est dit *solide d'égale résistance*, si, en choisissant convenablement les forces qui lui sont appliquées, on peut avoir

$$M = \frac{R\mu}{V}$$

pour toutes les sections.



Considérons en particulier un solide encastré à l'une de ses extrémités, et soumis à l'autre extrémité à l'action d'une force F dirigée dans son plan de symétrie perpendiculairement à sa longueur, *fig.* 99 (page 340). Supposons que la section transversale soit un rectangle dont le côté $b$ perpendiculaire au plan de symétrie conserve partout la même longueur, tandis que le côté $2z$ parallèle à ce plan varie d'une section à une autre. Nous savons que, pour une section de cette forme, le moment d'inertie $\mu$ a pour valeur (§ 197)

$$\mu = \tfrac{2}{3} b z^3 ;$$

d'ailleurs V est égal à $z$ : on a donc

$$\frac{R\mu}{V} = \tfrac{2}{3} R b z^2 .$$

D'un autre côté, le moment de la force F par rapport au centre de la section que nous considérons a pour valeur

$$F(l-x),$$

en désignant par $l$ la longueur totale du solide et par $x$ l'abscisse du centre de la section dont il s'agit ; et comme ce moment est égal au moment d'élasticité M du solide relatif à cette section, il s'ensuit que, pour que le solide soit d'égale résistance, il faut qu'on ait, quel que soit $x$,

$$F(l-x) = \tfrac{2}{3} R b z^2 ,$$

pour une valeur convenable de la force F. Cette équation, que l'on peut mettre sous la forme

$$z^2 = \frac{a^2}{l}(l-x),$$

en désignant par $a$ une constante dépendant de F, R, $b$, montre comment l'épaisseur $2z$ du solide doit varier avec l'abscisse $x$ du point où on la détermine : le plan de symétrie doit couper la surface du solide non déformé suivant une parabole du second degré ayant la fibre neutre pour axe et le point d'application de la force F pour sommet. La plus grande épaisseur du solide correspond à l'extrémité encastrée et a pour valeur $2a$.

Cherchons maintenant quelle est la forme d'équilibre que prend ce solide d'égale résistance, dans le cas où la force F a une valeur quelconque, inférieure à celle que nous avons dû lui supposer il n'y a qu'un instant et qui était capable de déterminer la rupture du solide. Nous avons, pour exprimer l'équilibre de ce solide, l'équation

$$E\mu \frac{d^2y}{dx^2} = F(l-x).$$

Ici $\mu$ n'est plus constant; il varie d'une section transversale à une autre du solide, et, si nous nous servons de la relation trouvée entre $z$ et $x$, nous aurons

$$\mu = \tfrac{2}{3} b z^3 = \tfrac{2}{3} b a^3 \left(\frac{l-x}{l}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

D'après cela, l'équation différentielle qui doit nous fournir la forme de la fibre neutre devient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2} \frac{Fl^{\frac{3}{2}}}{Eba^3} \frac{1}{\sqrt{l-x}}.$$

En intégrant, et observant que $y$ et $\frac{dy}{dx}$ doivent être nuls pour $x=0$, on trouve

$$y = 2 \frac{Fl^{\frac{3}{2}}}{Eba^3}(l-x)^{\frac{3}{2}} + 3 \frac{Fl^2 x}{Eba^3} - 2 \frac{Fl^3}{Eba^3};$$

telle est l'équation de la courbe suivant laquelle la fibre neutre est dirigée. Si l'on y fait $x = l$, on trouve pour la flèche $f$, produite par l'action de la force F, la valeur

$$f = \frac{Fl^3}{Eba^3}.$$

Cette flèche est double de celle que la même force produirait,



si le solide était prismatique et avait partout la même section transversale qu'à l'extrémité qui est encastrée : pour s'en assurer, il suffit de remplacer $\mu$ par $\frac{2}{3} ba^3$ dans la formule qui fournit la flèche $f$ relative à ce cas (§ 198).

Il est aisé de voir que, d'une part, la loi de variation de l'épaisseur du solide, d'une extrémité à l'autre, pour que ce solide soit d'égale résistance, et, d'une autre part, la valeur de la flèche produite par l'action d'une force F appliquée à l'extrémité libre, perpendiculairement à la longueur générale du solide et dans le plan de symétrie, peuvent être considérées comme s'appliquant sans grande erreur à un solide allongé dont les sections transversales n'auraient pas leurs centres de gravité en ligne droite, avant la déformation ; pourvu toutefois que ces centres de gravité soient situés sur une ligne qui ne s'écarte pas trop d'être droite. Dans ce cas, il n'y aurait, parmi les résultats que nous avons trouvés, que l'équation qui détermine la forme de la fibre neutre après la déformation, qui ne pourrait pas être appliquée.

Le dynamomètre de M. Poncelet, *fig.* 101, se compose de deux lames d'acier AB, A'B', dont les extrémités sont réunies par le moyen de chapes articulées AA', BB'. Chacune des moitiés CA, CB, C'A', C'B' de ces lames a la forme du solide d'égale résistance dont nous venons de nous occuper. Conformément à la remarque que nous venons de faire, on ne s'astreint pas à disposer ces lames de manière que, pour chacune d'elles, les centres de gravité des diverses sections transversales soient exactement en ligne droite ; on les construit au contraire de manière que le côté intérieur de leur contour soit une ligne droite, et que son côté intérieur soit formé par deux arcs de parabole ayant les extrémités de la lame pour sommets respectifs, et le côté intérieur pour axe commun. Il est facile de reconnaître que, par là, on fait bien décroître l'épaisseur de la lame, depuis son milieu

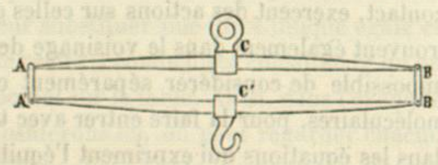

Fig. 101.

jusqu'à chacune des extrémités, conformément à la loi trouvée précédemment pour un pareil solide d'égale résistance. Lorsque le dynamomètre est en équilibre, sous l'action des forces égales et contraires appliquées aux milieux C et C' de ses deux lames et tendant à écarter ces points l'un de l'autre, il est clair que chacune des quatre moitiés CA, CB, C'A', C'B' des lames se trouve dans les mêmes conditions que le solide encastré à l'une de ses extrémités que nous avions considéré tout d'abord; l'accroissement total qu'éprouve la distance des milieux C, C' des deux lames est proportionnel à la grandeur des forces qui agissent sur ces deux points et est double de ce qu'il serait si les lames avaient dans toute leur longueur la même épaisseur qu'en leurs milieux: l'emploi de lames à faces paraboliques, telles que nous venons de les définir, au lieu de lames prismatiques, présente donc l'avantage de doubler la sensibilité de l'appareil, sans diminuer sa résistance à la rupture.

§ 201. **Actions mutuelles de deux solides qui se touchent.** — Lorsque deux solides naturels en équilibre se touchent par un ou plusieurs points de leurs surfaces, les molécules de chacun des deux solides, situées dans le voisinage des points de contact, exercent des actions sur celles de l'autre solide qui se trouvent également dans le voisinage de ces points. Il nous est impossible de considérer séparément chacune de ces actions moléculaires, pour la faire entrer avec toutes les autres forces dans les équations qui expriment l'équilibre des deux solides; nous ne pouvons tenir compte de ces actions qu'en les prenant dans leur ensemble, et leur substituant un petit nombre de forces capables de produire le même effet. Nous allons voir quelle idée on peut se faire de ces dernières forces, que nous regarderons comme représentant les actions que les deux solides exercent l'un sur l'autre aux points par lesquels ils se touchent.

Considérons d'abord un solide pesant, un boulet de fonte, par exemple, posé sur une table qu'il ne touche que par un seul point. En réalité, le boulet touche la table par un grand nombre de points dont l'ensemble occupe une certaine étendue superficielle, en raison de la déformation que la table et le boulet



éprouvent l'un et l'autre; une petite portion de la surface du boulet s'aplatit légèrement, et s'applique sur une portion correspondante de la surface de la table qui a été rendue légèrement concave par la présence du boulet: mais nous ferons abstraction de cette déformation, dans le langage, et nous parlerons du contact du boulet avec la table comme si c'était simplement le contact d'une surface sphérique avec une surface plane. Le boulet étant en repos sur la table dont la surface est supposée horizontale, il est clair que son poids est mis en équilibre par l'ensemble des actions que ces molécules éprouvent de la part des molécules de la table dans le voisinage du point de contact; ces forces moléculaires, appliquées au boulet, peuvent évidemment être remplacées par une force unique égale et contraire au poids du boulet, et par conséquent dirigée verticalement et de bas en haut: cette force unique, capable de produire sur le boulet le même effet que les actions moléculaires dont il s'agit, constitue ce qu'on nomme la pression de la table sur le boulet. Les actions que les molécules du boulet exercent sur les molécules de la table étant respectivement égales et contraires à celles qu'elles éprouvent de la part de ces mêmes molécules, il est clair qu'on peut également leur substituer une force unique égale et contraire à la précédente: cette seconde force constitue ce qu'on nomme la pression du boulet sur la table. Ainsi, dans l'exemple particulier que nous considérons ici, on peut regarder chacun des deux corps comme exerçant sur l'autre une pression dirigée suivant la normale commune à leurs surfaces menée par leur point de contact: ces deux pressions sont égales et de sens contraires, aussi bien que les actions qui se développent entre deux molécules quelconques.

Lorsqu'un corps pesant est en repos sur une table dont il touche la surface par plusieurs points, on peut regarder les choses comme se passant, pour chaque point de contact, de la même manière que s'il n'y en avait pas d'autre. On peut dire que le corps éprouve de la part de la table, et à chacun de ses points de contact, une pression dirigée verticalement de bas en haut; et de même on peut dire que le corps exerce sur la table, en ces divers points, des pressions égales et contraires aux précédentes. Si le corps touche la surface de la table par une face plane d'une certaine étendue, on peut regarder chaque point de cette face plane comme étant un point de contact; dans ce cas, on considérera le corps comme éprouvant de la part de la table une pression dirigée verticalement de bas en haut, en chaque point de la surface de contact, et comme exerçant en même temps sur la table, en ce point, une pression égale et contraire à la précédente.

§ 202. Un corps pesant étant dans l'état d'équilibre où nous venons de le considérer, c'est-à-dire reposant sur une table à surface horizontale qu'il touche par un certain nombre de points, supposons qu'on vienne lui appliquer une force de traction horizontale F, tendant à le faire glisser sur la surface de la table. Si cette force F est très petite, elle ne produira aucun effet : le corps restera immobile, tout aussi bien que si elle n'agissait pas. Si l'on augmente progressivement l'intensité de la force F, il arrivera bientôt un instant où l'équilibre cessera d'exister, et où le corps commencera à se mettre en mouvement. L'équilibre continuant à subsister après l'application de la force F, tant que cette force n'a pas atteint la valeur pour laquelle le corps commence à glisser, il faut nécessairement qu'il se développe, entre les molécules du corps et celles de la table, de nouvelles actions qui s'opposent à ce que la force F produise son effet. Ces nouvelles actions moléculaires, nulles d'abord, lorsque le corps n'était soumis qu'à la pesanteur, augmentent progressivement, en même temps que la force de traction F à laquelle elles font constamment équilibre; mais elles ne peuvent pas augmenter au delà d'une certaine limite, de telle sorte que, si la force F, en croissant continuellement, les amène à atteindre cette limite, le moindre accroissement qu'éprouve encore la force F détermine le glissement du corps. L'ensemble des actions moléculaires qui se développent ainsi pour s'opposer au glissement du corps, considéré à l'instant où ces actions ont atteint la limite qu'elles ne peuvent pas dépasser, constitue ce qu'on nomme la *résistance au glissement*, ou simplement le *frottement*; ces



expressions désignent en particulier une force unique capable de tenir lieu des actions moléculaires dont il s'agit, force qui est dirigée dans le plan horizontal qui forme la surface de la table, et en sens contraire de la direction suivant laquelle la force F tend à faire glisser le corps sur cette surface. L'intensité de cette résistance au glissement est évidemment la même que celle de la force de traction F, au moment où elle est devenue assez grande pour que le corps commence à glisser en cédant à son action.

L'expérience a fait connaître les lois que suit le frottement, tel que nous venons de le définir, lorsqu'on fait varier les circonstances dans lesquelles il se développe. En se servant d'une caisse dans laquelle on mettait des corps pesants en quantité plus ou moins grande, on a trouvé que la force de traction F, nécessaire pour déterminer son glissement sur la surface horizontale sur laquelle elle reposait, variait proportionnellement au poids total de la caisse, c'est-à-dire proportionnellement à la pression qu'elle exerçait sur cette surface horizontale. D'un autre côté, en faisant varier l'étendue de la face d'appui de la caisse, sans rien changer à la nature de cette face et au poids total de la caisse, on a trouvé que la force de traction nécessaire pour produire le glissement ne changeait pas de grandeur. On en a conclu les deux lois suivantes : 1° le frottement est proportionnel à la pression; 2° le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces frottantes.

Soit N la pression exercée par le corps que l'on considère sur la surface sur laquelle on cherche à le faire glisser. Les deux lois précédentes montrent que le frottement qui se développe sous l'action de cette pression N peut être représenté par $fN$, $f$ étant un coefficient qui dépend uniquement de la nature des surfaces entre lesquelles le glissement tend à se produire. Ce coefficient $f$, qui est le rapport du frottement à la pression, se nomme *coefficient de frottement*.

§ 203. Nous pouvons appliquer les notions précédentes au cas de deux solides S, S', *fig.* 102, qui ne se touchent que par un point A. Sous l'action des forces auxquelles ces deux solides sont soumis, il se développe, en A, non seulement des pressions normales N, N′, qui s'opposent à ce que les solides pénètrent l'un dans l'autre, mais encore des réactions tangentielles R, R′, qui tendent à s'opposer à ce que ces deux solides glissent l'un sur l'autre. Ces réactions R, R′, égales et contraires l'une à l'autre comme les pressions normales N, N′, ne peuvent pas dépasser en intensité la valeur $fN$ du frottement correspondant à ces pressions, $f$ étant le coefficient de frottement relatif à la nature des surfaces des deux solides S, S′; elles peuvent d'ailleurs avoir une grandeur quelconque comprise entre 0 et $fN$, et elles peuvent être dirigées d'une manière quelconque dans le plan tangent commun aux deux solides au point A.

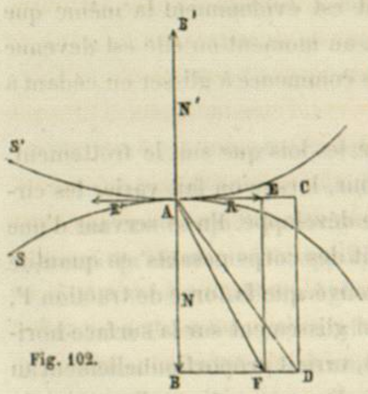

Fig. 102.

Soit AB la ligne qui représente la pression N du solide S′ sur le solide S. Portons sur la direction de la réaction tangentielle R, que le solide S éprouve également de la part du solide S′, une longueur AC représentant le frottement $fN$; et construisons le rectangle ABCD sur les deux lignes AB, AC. Construisons de même le rectangle ABFE, dans lequel le côté AE représente la réaction R. La diagonale AF du second rectangle représente la résultante des deux actions normale et tangentielle que le solide S éprouve de la part du solide S′ : on peut regarder cette résultante comme étant l'action totale que le solide S′ exerce sur le solide S. Dire que la réaction R ne peut pas dépasser $fN$, cela revient évidemment à dire que l'angle FAB ne peut pas dépasser l'angle DAB. Cet angle DAB, que nous désignerons par $\alpha$, est déterminé par la relation

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{DB}{AB} = \frac{fN}{N} = f;$$



il dépend donc uniquement du coefficient de frottement $f$, et par conséquent de la nature des surfaces des deux solides, dans le voisinage du point A : on lui donne le nom d'*angle de frottement*. Ainsi, l'action totale AF que le solide S′ exerce sur le solide S fait nécessairement avec la normale AB un angle plus petit que l'angle de frottement. Imaginons que la ligne AD tourne autour de la normale AB, et qu'elle décrive ainsi un cône de révolution ayant cette normale pour axe : nous pourrons énoncer autrement la condition qui vient d'être indiquée, et dire que l'action AF du solide S′ sur le solide S, au point A, est nécessairement dirigée à l'intérieur de ce cône, dont l'angle au sommet dépend, comme nous venons de le voir, uniquement de la nature des surfaces des deux solides. L'action totale que le solide S exerce sur le solide S′ étant égale et contraire à celle qu'il en éprouve, on peut dire également que cette action de S sur S′ doit être dirigée à l'intérieur du cône égal au précédent, ayant son sommet en A et son axe dirigé suivant AB′. Les deux cônes dont il vient d'être question sont évidemment les deux nappes d'une même surface conique ayant la normale commune BAB′ pour axe, le point A pour sommet, et l'angle de frottement $\alpha$ pour angle des génératrices avec l'axe.

Lorsque deux solides se touchent par plus d'un point, on peut répéter pour chaque point de contact ce que nous venons de dire dans le cas où il n'y en avait qu'un seul; les actions égales et contraires que les deux solides exercent l'un sur l'autre, en chacun de leurs points de contact, sont nécessairement dirigées à l'intérieur des deux nappes opposées d'une surface conique ayant pour axe la normale commune en ce point de contact, pour sommet ce point même, et pour angle des génératrices avec l'axe l'angle de frottement correspondant.

L'angle de la surface conique, à l'intérieur de laquelle les actions mutuelles de deux solides en un de leurs points de contact doivent nécessairement être dirigées, a une valeur plus ou moins petite suivant que le coefficient de frottement correspondant aux deux surfaces qui se touchent en ce point est lui-même plus ou moins petit. Si l'on supposait que ce coefficient de