frottement fût nul, la surface conique se réduirait à son axe, et, par conséquent, les actions mutuelles des deux solides ne pourraient avoir qu'une seule direction, celle de la normale commune à leurs surfaces menée par le point de contact. C'est dans ce cas idéal que nous nous sommes placés, lorsque nous avons considéré l'équilibre d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe ou sur une surface fixe (§§ 126 et 134).

§ 204. **Équilibre de deux solides qui se touchent.** — Si deux solides S, S' en équilibre se touchent par un seul point, il doit y avoir équilibre entre toutes les forces qui agissent sur chacun d'eux, c'est-à-dire entre les forces qui lui sont directement appliquées et l'action qu'il éprouve de la part de l'autre solide, au point où ils se touchent. Il suit de là que, si l'on considère chacun des deux solides comme étant invariable de forme, et si l'on compose entre elles les forces qui lui sont directement appliquées, en laissant de côté l'action qu'il éprouve de la part de l'autre solide, on devra nécessairement trouver pour ces forces une résultante unique égale et directement opposée à cette action. D'après cela il est aisé de voir que, pour que les deux solides SS' soient en équilibre, il faut : 1° que toutes les forces directement appliquées à l'un quelconque de ces deux solides aient une résultante dirigée vers le point par lequel ils se touchent ; 2° que la résultante des forces directement appliquées au solide S soit égale et contraire à la résultante des forces directement appliquées au solide S' ; 3° que ces deux résultantes soient dirigées à l'intérieur des deux nappes de la surface conique ayant pour sommet le point de contact des deux solides, pour axe la normale commune en ce point, et pour angle des génératrices avec l'axe l'angle de frottement correspondant à la nature des surfaces qui se touchent ; 4° enfin que ces deux résultantes agissent dans des sens tels qu'elles tendent à appuyer les deux solides l'un contre l'autre, et non à les séparer l'un de l'autre.

Lorsque deux solides en équilibre se touchent par plusieurs points, les forces directement appliquées à l'un d'eux S sont mises en équilibre par les actions qu'il éprouve de la part de l'autre solide S' aux divers points par lesquels ils se touchent ;

et comme ces actions de S' sur S n'ont pas nécessairement une résultante unique, il s'ensuit que, pour l'équilibre, il n'est pas nécessaire non plus que les forces directement appliquées au solide S aient une résultante unique. Tout ce que nous pouvons dire ici d'une manière générale, c'est que les forces directement appliquées au solide S, et les actions que ce solide S exerce sur le solide S', constituent deux systèmes de forces équivalents (§ 180), puisque l'un et l'autre de ces deux systèmes de forces est mis en équilibre par l'ensemble des actions de S' sur S.

§ 205. Considérons en particulier deux solides S, S', qui se touchent par plusieurs points A, B, C, D,... *fig.* 103, tous situés dans un même plan P. Supposons que les parties matérielles du solide S qui se trouvent sur les perpendiculaires au plan P menées par les points de contact A, B, C,... et dans le voisinage de ces points, soient toutes placées d'un même côté du plan P ; et que par conséquent les parties matérielles du solide S' situées sur les mêmes perpendiculaires et dans le voisinage des mêmes points A, B, C,... soient toutes placées de l'autre côté de ce plan. Supposons en outre que les forces directement appliquées au solide S aient une résultante unique R, ce qui entraîne nécessairement comme conséquence que les forces directement appliquées au solide S' aient aussi une résultante unique R' égale et contraire à la précédente.

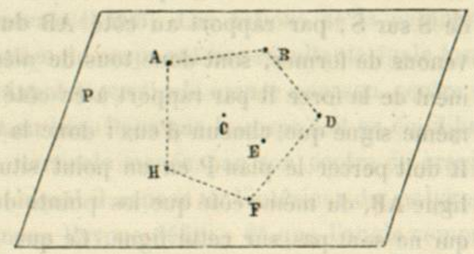

Fig. 103.

La résultante R des forces directement appliquées au solide S est équivalente au système des actions que ce solide S exerce sur le solide S', aux divers points de contact A, B, C,..., ainsi que nous venons de le voir il n'y a qu'un instant ; cette force R est donc aussi la résultante des actions de S sur S', et son moment par rapport à une droite quelconque tracée dans le plan P est égal à la somme des moments de ces actions de S sur S′ par rapport à la même droite (§ 180).

Cela posé, construisons un polygone convexe ABDFH ayant pour sommets des points pris parmi les points de contact A, B, C, D,... des deux solides, et contenant à son intérieur ou sur ses côtés tous ceux de ces points de contact qui ne sont pas à ses sommets. D'après ce que nous admettons, les diverses actions de S sur S′ tendent toutes à repousser les points A, B, C,... du solide S′ d'un même côté du plan P, et par suite la résultante R de ces actions doit aussi tendre à repousser le solide S′ de ce même côté du plan P ; les moments de ces actions de S sur S′, par rapport au côté AB du polygone que nous venons de former, sont donc tous de même signe, et le moment de la force R par rapport à ce côté a par conséquent le même signe que chacun d'eux : donc la direction de la force R doit percer le plan P en un point situé, par rapport à la ligne AB, du même côté que les points de contact C, D, E,... qui ne sont pas sur cette ligne. Ce que nous venons de dire pour le côté AB du polygone convexe ABDFH, nous pouvons le répéter pour chacun de ses autres côtés ; nous en conclurons nécessairement que la direction de la force R doit percer le plan P à l'intérieur de ce polygone convexe, auquel on donne le nom de *polygone d'appui* des deux solides. Il faut en outre, bien entendu, que la force R tende à appuyer le solide S sur le solide S′, et non à l'écarter de ce dernier solide.

Si, outre les hypothèses précédentes, nous admettons encore que le coefficient de frottement soit le même pour les divers points de contact A, B, C, D,... des deux solides S, S′, chacune des actions de S sur S′ ne pourra pas faire avec la perpendiculaire au plan P un angle plus grand que l'angle de frottement commun aux divers points de contact ; d'ailleurs, on peut évidemment trouver la grandeur et la direction de la force R en transportant les actions de S sur S′ parallèlement à elles-mêmes au point où cette force R perce le plan P, et les composant ensuite à l'aide du polygone des forces : il est aisé d'en conclure

que la force R elle-même ne peut pas faire avec la perpendiculaire au plan P un angle plus grand que l'angle de frottement dont il vient d'être question.

Nous n'avons particularisé en aucune manière le nombre des points de contact A, B, C, D,... que nous avons supposés tous situés dans un même plan, et, par conséquent, tout ce que nous venons de dire est applicable au cas où les deux solides S, S′ se toucheraient dans toute l'étendue d'une face plane.

§ 206. **Équilibre d'un solide pesant posé sur un plan.** — Un corps solide, soumis à la seule action de la pesanteur, et posé sur un plan, c'est-à-dire sur une face plane d'un autre corps, rentre évidemment dans le cas que nous venons d'étudier d'une manière générale (§ 205). Les actions de la pesanteur sur les diverses parties du corps ont une résultante égale à son poids, agissant suivant la verticale menée par son centre de gravité, et de haut en bas. Pour que le corps soit en équilibre, il faut : 1° que la verticale menée par son centre de gravité perce le plan sur lequel il repose à l'intérieur du polygone d'appui, tel que nous l'avons défini ; 2° que l'angle compris entre la verticale et la perpendiculaire au plan, ou, ce qui est la même chose, l'angle que le plan fait avec l'horizon, soit inférieur à l'angle de frottement correspondant à la nature des surfaces qui sont en contact.

Dans le cas particulier où le corps que l'on considère est posé sur un plan horizontal, la seconde condition est toujours satisfaite ; on n'a donc qu'à se préoccuper de la première condition, pour savoir si le corps est ou n'est pas en équilibre dans une position donnée.

Cherchons à nous rendre compte de la grandeur des pressions qu'un corps pesant, posé sur un plan horizontal, exerce en ses divers points d'appui ; et considérons pour cela les divers cas qui peuvent se présenter, eu égard au nombre des points d'appui. Si le corps ne s'appuie que par un seul point, il ne peut être en équilibre qu'autant que son centre de gravité est situé sur la verticale menée par ce point d'appui, et la pression qu'il exerce en ce point est évidemment égale à son poids. Si le corps s'appuie par deux points A, B, *fig.* 104, la verticale menée par son centre de gravité doit percer le plan, sur lequel il repose, en un point C situé sur la droite qui passe par les deux points A, B, et entre ces deux points ; il suffit de décomposer le poids P du corps, appliqué suivant cette verticale en deux composantes parallèles agissant sur les points A et B, pour avoir les pressions exercées par le corps en ces deux points : on trouve ainsi $\frac{P \times CB}{AB}$ pour la pression au point A, et $\frac{P \times AC}{A}$ pour la pression au point B. Si le corps s'appuie par trois points A, B, C, non situés en ligne droite, *fig.* 105, la verticale menée par son centre de gravité doit percer le plan en un point D situé à l'intérieur du triangle ABC ; les pressions qu'il exerce sur le plan, aux points A, B, C, seront trois forces parallèles ayant pour résultante une force verticale égale à son poids P et appliquée au point D ; le moment de cette résultante P par rapport au plan vertical mené par BC sera égal au moment de la composante appliquée en A par rapport au même plan vertical (§ 158), et, par suite, cette composante et la résultante seront entre elles dans le rapport inverse des distances de leurs points d'application A et D au côté BC, c'est-à-dire, dans le rapport inverse des surfaces des triangles BAC, BDC : donc les pressions exercées par le corps en chacun de ses trois points d'appui A, B, C, auront respectivement pour valeurs $\frac{P \times BDC}{ABC}$, $\frac{P \times ADC}{ABC}$, $\frac{P \times ADB}{ABC}$.

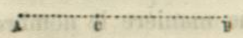

Fig. 104.

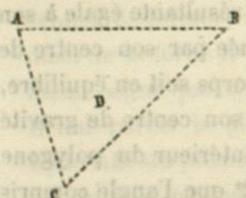

Fig. 105.

Si le nombre des points d'appui du corps avec le plan est supérieur à trois, il n'est plus possible de déterminer les pressions qu'il exerce en chacun de ses points d'appui, par la seule connaissance de la position que la verticale menée par son centre de gravité occupe par rapport à ces points ; on peut en effet trouver une infinité de systèmes de forces parallèles et de même sens appliquées à ces points d'appui, qui aient pour résultante le poids P du corps appliqué à son centre de gravité : on peut prendre arbitrairement les valeurs de ces pressions à l'exception de trois d'entre elles, sans toutefois dépasser certaines limites pour ces valeurs, et on en conclut facilement les grandeurs des trois pressions restantes, de manière que la résultante de toutes ces pressions soit égale au poids du corps et soit dirigée suivant la verticale du centre de gravité. La même difficulté se présente également lorsque le corps s'appuie par trois points situés sur une même ligne droite ; la détermination des pressions exercées par le corps en chacun de ces trois points d'appui ne peut pas s'effectuer par la seule connaissance du point où la verticale menée par le centre de gravité du corps rencontre la droite menée par ces trois points d'appui. Les pressions que le corps exerce sur le plan, aux divers points par lesquels il le touche, ne sont cependant pas indéterminées ; mais on ne peut les trouver qu'autant que l'on connait la nature du corps pesant que l'on considère, que l'on sait quelle est la rigidité ou la flexibilité plus ou moins grande qu'il présente dans ses diverses parties, et que l'on sait également comment se comporte le corps à face plane et horizontale sur lequel il s'appuie sous l'action des pressions que ce second corps éprouve de la part du premier. La question que nous allons traiter dans le paragraphe suivant montrera comment cette connaissance de la nature des deux corps permet d'effectuer la détermination des pressions aux différents points par lesquels ils se touchent.

§ 207. Considérons un solide S, *fig.* 106, reposant sur un plan horizontal par une face plane rectangulaire AB, qui est représentée en vraie grandeur en $aba'b'$. Supposons que la surface latérale du solide, dans le voisinage de la face d'appui AB, soit formée de plans perpendiculaires à cette face menés par ses quatre côtés, et que le centre de gravité G du solide se trouve dans le plan vertical qui passe par les milieux m, n des côtés aa', bb' de la face d'appui. Supposons en outre que la surface plane sur laquelle le corps S repose présente une grande rigidité, et reste plane malgré la légère dépression que le poids du corps lui fait subir ; que le solide S soit partout également compressible sous l'action des forces qui peuvent lui être appliquées, du moins dans la partie qui avoisine sa face d'appui AB ; enfin que, en raison de cette égale compressibilité, les molécules qui étaient primitivement dans un plan CD parallèle à la face AB et très voisin de cette face, avant que le solide fût soumis aux pressions qu'il éprouve de bas en haut sur cette face d'appui, se trouvent encore dans un même plan C′D′, après la déformation que ces pressions lui ont fait subir. Prenons en particulier dans le solide un prisme vertical HL, à base infiniment petite ω s'étendant entre les plans AB, CD, avant que le solide ait été déformé dans le voisinage de sa face d'appui ; ce prisme s'est raccourci, par suite des pressions qu'il éprouve à ses deux extrémités, et sa longueur, qui était primitivement HL, s'est réduite à HL′ : LL′ est donc la quantité dont sa longueur a diminué, et par conséquent on aura pour la pression p que la base inférieure ω de ce prisme éprouve de la part du plan d'appui (§ 196) :

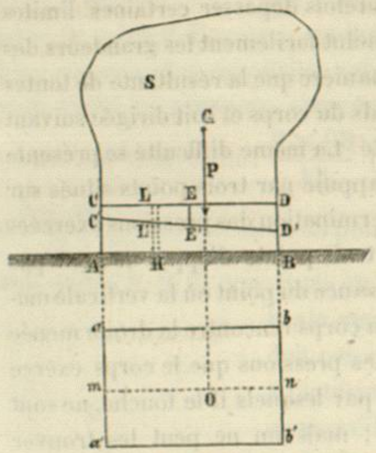

Fig. 106.

$$p = \mathrm{E}\omega \frac{\mathrm{LL}'}{\mathrm{HL}}.$$

Cette formule fournira les valeurs de la pression p que le solide éprouve sur les divers éléments ω dans lesquels on peut concevoir que la face d'appui soit décomposée, pourvu qu'on y attribue à LL′ la valeur qui convient à chacun de ces éléments; quant aux quantités F et HL, elles ne varient pas, parce que, d'une part, le solide est supposé également compressible dans toute l'étendue de sa face d'appui, et d'une autre part, les plans parallèles AB, CD, sont partout également distants. Toutes les

pressions telles que p sont verticales et dirigées de bas en haut, et la résultante doit être égale et directement opposée au poids P du solide appliqué à son centre de gravité G. Ces pressions sont d'ailleurs proportionnelles aux produits ω. LL′, dont chacun représente le volume de la portion du prisme HL qui est comprise entre les plans CD, C′D′. Il est aisé d'en conclure que la résultante de ces pressions p passe par le centre de gravité de la tranche du solide comprise entre les plans CD, C′D′, en supposant toutefois que cette tranche soit homogène ; et qu'en outre cette résultante a pour valeur le produit du volume de la tranche CDC′D′ par le facteur $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{HL}}$.

Nous voyons par là que le solide S doit éprouver, sous l'action de son poids, une déformation telle que la verticale menée par son centre de gravité G passe par le centre de gravité du volume CDC′D′ considéré comme un corps homogène ; et les pressions que ce solide éprouve sur les divers éléments égaux de sa face d'appui AB, sont proportionnelles aux portions des verticales menées par ces éléments qui sont comprises entre les plans CD, C′D′. Le centre de gravité G étant situé par hypothèse dans le plan vertical dont la trace horizontale est *mn*, il est aisé de voir que l'intersection des plans CD, C′D′ doit être parallèle aux côtés *aa′*, *bb′* de la face d'appui du solide ; et le centre de gravité du corps homogène compris entre ces deux plans coïncide avec le centre de gravité du trapèze suivant lequel ce corps est coupé par le plan vertical mené par *mn*. On voit d'après cela que les pressions sont les mêmes, pour les divers éléments égaux de la face d'appui qui sont situés sur une parallèle quelconque aux côtés *aa′*, *bb′* de cette face ; et que, si l'on suppose que la verticale menée par le point G passe par un point O plus rapproché de *bb′* que de *aa′*, les pressions sur les éléments égaux de la face d'appui augmenteront constamment depuis le côté *aa′* de cette face, jusqu'au côté *bb′*. Soient r et s les longueurs des côtés *ab*, *aa′* de la face d'appui. La pression totale que supporte cette face étant égale à P, on a $\frac{\mathrm{P}}{rs}$ pour la pression moyenne rapportée à l'unité de surface, et par conséquent $P\frac{\omega}{rs}$ pour la pression que supporte un élément ω situé à égale distance des côtés aa', bb'. D'après cela, il est aisé de voir que, pour un élément ω situé tout près de l'arête bb', la pression p, qui est plus grande que partout ailleurs, a pour valeur

$$p = P\frac{\omega}{rs}\cdot\frac{DD'}{EE'},$$

EE' étant la ligne qui joint les milieux des côtés non parallèles dans le trapèze CDC'D'.

Convenons maintenant que, par un changement de forme de la partie supérieure du solide, nous déplacions son centre de gravité G, sans le faire sortir du plan vertical mené par mn. Le trapèze CDC'D' devra changer de forme en même temps, de manière que son centre de gravité se trouve toujours sur la verticale menée par le point G. Si la projection horizontale O du centre de gravité G se rapproche du côté bb' de la base, sans que le poids total P du solide change, le côté DD' du trapèze doit augmenter, et le côté CC' doit diminuer de la même quantité; car il faut que le volume compris entre les plans CD, C'D' reste le même, et par conséquent aussi la surface du trapèze CDC'D', ce qui fait que la demi-somme EE' des côtés CC' et DD' doit conserver la même grandeur. Lorsque On ne sera plus que le tiers de ab, le côté CC' du trapèze se réduira à zéro, et le trapèze se changera en un triangle dans lequel le côté DD' opposé au sommet C sera double de EE'; alors la pression p supportée par un élément ω de la face d'appui situé tout près du côté bb' deviendra égale à $2P\frac{\omega}{rs}$, c'est-à-dire qu'elle sera double de la pression moyenne rapportée à un élément de même étendue. Si la projection horizontale O du centre de gravité G se rapproche encore de bb', la ligne C'D', qui est venue précédemment passer par le point C, doit s'élever au-dessus de ce point C et s'abaisser encore au-dessous du point D; cela indique que la pression tend à devenir négative dans le voisinage de l'arête

aa' de la face d'appui, c'est-à-dire à se changer en une traction. C'est ce qui arriverait en effet si la face d'appui était collée sur le plan sur lequel elle repose. Mais, comme cette face d'appui est simplement posée sur le plan, les choses ne peuvent pas se passer ainsi, le solide S ne peut éprouver que des pressions de la part du plan qui le supporte. Dans ce cas, les pressions ne s'exercent plus sur toute la surface du rectangle $aba'b'$; une portion de ce rectangle, située vers l'arête aa', n'est plus pressée en aucun de ses points; et la portion restante, qui supporte la pression totale P, est un autre rectangle qui se trouve dans le cas où était le rectangle tout entier, lorsque On était égal au tiers de ab. Si nous nommons ε la distance On devenue plus petite que le tiers de ab, 3ε et s seront les deux côtés de la portion de la face $aba'b'$ qui s'appuie réellement sur le plan. $P\frac{\omega}{3\varepsilon s}$ est la pression moyenne sur un élément ω de cette surface; et $2P\frac{\omega}{3\varepsilon s}$ est la pression supportée par un élément ω situé tout près de l'arête bb'.

On voit par la valeur que nous venons de trouver pour la pression sur un élément ω voisin de bb' que cette pression augmente à mesure que ε diminue. Soit $R\omega$ la pression capable de déterminer l'écrasement du prisme élémentaire qui a pour base ω. Si l'on pose

$$2P\frac{\omega}{3\varepsilon s} = R\omega,$$

on en tire

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\frac{P}{Rs}.$$

Cette valeur de ε est la limite au delà de laquelle on ne doit pas faire décroître la distance ε ou On, sans quoi le solide S s'écraserait dans le voisinage de l'arête bb'. Nous sommes conduits par là à ajouter quelque chose à la condition d'équilibre du solide pesant S posé sur un plan horizontal. Nous avions trouvé que cet équilibre ne pouvait avoir lieu qu'autant que la verticale menée par le centre de gravité G du solide perçait le plan en un point situé à l'intérieur du rectangle $aba'b'$ qui constitue son polygone d'appui ; nous voyons qu'il faut en outre que cette verticale passe à l'intérieur de ce rectangle, à une distance suffisamment grande de chacun de ses côtés.

On comprend toute l'importance que peuvent avoir des considérations analogues aux précédentes, toutes les fois que l'on a à s'occuper de l'équilibre de corps solides se touchant par des faces planes, comme cela a lieu dans les constructions en pierre, et en particulier dans les voûtes.

CHAPITRE VI

ÉQUILIBRE DES FLUIDES

§ 208. Les fluides (liquides ou gaz) sont des corps dont les molécules sont extrêmement mobiles les unes par rapport aux autres. Lorsqu'on cherche à faire glisser les différentes parties d'une masse fluide les unes sur les autres, on n'éprouve pas de résistance analogue à celle qui se développe dans le glissement des corps solides et que nous nommons frottement. L'absence absolue du frottement, entre les diverses parties d'un fluide qui se déplacent les unes par rapport aux autres, constitue la *fluidité parfaite*. Les liquides et les gaz, tels qu'ils existent dans la nature, sont en général extrêmement près de présenter cette fluidité parfaite, surtout lorsqu'ils sont en équilibre absolu ou relatif. Nous supposerons dans ce chapitre qu'ils jouissent complètement de cette propriété. La vérification expérimentale des résultats auxquels nous parviendrons ainsi montre que, en faisant cette hypothèse, nous ne nous écartons pas sensiblement de la réalité.

Lorsqu'un liquide est contenu dans un vase, et qu'on cherche à diminuer le volume qu'il occupe en le comprimant dans ce vase, on ne peut pas y parvenir : le liquide conserve le volume qu'il avait d'abord, ou du moins la diminution du volume qu'il éprouve est si faible, qu'on a beaucoup de peine à s'en aperce-