en un point situé à l'intérieur du rectangle $aba'b'$ qui constitue son polygone d'appui ; nous voyons qu'il faut en outre que cette verticale passe à l'intérieur de ce rectangle, à une distance suffisamment grande de chacun de ses côtés.

On comprend toute l'importance que peuvent avoir des considérations analogues aux précédentes, toutes les fois que l'on a à s'occuper de l'équilibre de corps solides se touchant par des faces planes, comme cela a lieu dans les constructions en pierre, et en particulier dans les voûtes.

CHAPITRE VI

ÉQUILIBRE DES FLUIDES

§ 208. Les fluides (liquides ou gaz) sont des corps dont les molécules sont extrêmement mobiles les unes par rapport aux autres. Lorsqu'on cherche à faire glisser les différentes parties d'une masse fluide les unes sur les autres, on n'éprouve pas de résistance analogue à celle qui se développe dans le glissement des corps solides et que nous nommons frottement. L'absence absolue du frottement, entre les diverses parties d'un fluide qui se déplacent les unes par rapport aux autres, constitue la *fluidité parfaite*. Les liquides et les gaz, tels qu'ils existent dans la nature, sont en général extrêmement près de présenter cette fluidité parfaite, surtout lorsqu'ils sont en équilibre absolu ou relatif. Nous supposerons dans ce chapitre qu'ils jouissent complètement de cette propriété. La vérification expérimentale des résultats auxquels nous parviendrons ainsi montre que, en faisant cette hypothèse, nous ne nous écartons pas sensiblement de la réalité.

Lorsqu'un liquide est contenu dans un vase, et qu'on cherche à diminuer le volume qu'il occupe en le comprimant dans ce vase, on ne peut pas y parvenir : le liquide conserve le volume qu'il avait d'abord, ou du moins la diminution du volume qu'il éprouve est si faible, qu'on a beaucoup de peine à s'en apercevoir. C'est ce qui fait qu'on donne aux liquides le nom de *fluides incompressibles*. Dans ce qui suit, nous traiterons les liquides comme jouissant d'une incompressibilité absolue ; nous nous écarterons ainsi tellement peu de la réalité, que cela n'occasionnera aucune erreur appréciable dans les résultats auxquels nous parviendrons.

Un gaz se comporte tout autrement qu'un liquide, quand on cherche à le comprimer ; on peut sans grande difficulté réduire son volume à n'être plus que la moitié, le tiers, le quart de ce qu'il était d'abord. Si ensuite on cesse d'exercer l'effort qui a déterminé cette diminution de volume, le gaz revient de lui-même à son volume primitif. C'est pour cela qu'on donne aux gaz le nom de *fluides élastiques*.

§ 209. **Transmission des pressions dans les fluides.** — Considérons une masse fluide en équilibre dans une enveloppe fermée qu'elle remplit complètement, *fig.* 107, et supposons que ses molécules ne soient soumises à aucune force autre que les actions que chacune d'elles éprouve de la part des molécules voisines. Ce fluide exercera généralement des pressions sur les diverses parties de l'enveloppe qui le renferme. Si l'on vient à enlever une petite portion de cette enveloppe, et si on la remplace par un piston A de même forme, mobile dans un bout de tuyau adapté au contour de l'ouverture ainsi produite, on conçoit que le fluide pourra se trouver exactement dans les mêmes conditions que précédemment, pourvu qu'on applique au piston A une force convenable F dirigée parallèlement aux parois du tuyau dans lequel il peut se mouvoir. De même, on pourra remplacer une autre portion de l'enveloppe par un piston B, également mobile dans un bout de tuyau, et soumis à l'action d'une certaine force F', sans que le fluide cesse d'être exactement dans les mêmes conditions. Cela posé, nous allons voir que, si les bases des deux

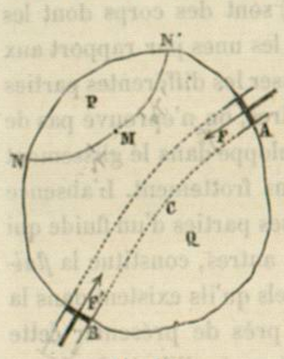

Fig. 107.

pistons A, B sont égales, les deux forces F, F' doivent aussi être égales.

Pour démontrer cette proposition, imaginons que nous réunissions les deux bouts de tuyau dans lesquels peuvent se mouvoir les deux pistons A, B, par un canal courbe ACB, contenu tout entier à l'intérieur de l'espace occupé par le fluide et se raccordant à ses deux extrémités avec ces bouts de tuyau ; nous pourrons même supposer que la section transversale de ce canal ACB soit partout égale à la base de l'un des pistons A, B. Le fluide dont il s'agit étant en équilibre, nous pouvons lui appliquer le théorème du travail virtuel (§ 184). Pour cela, concevons que le piston A marche d'une quantité infiniment petite ε vers l'intérieur de l'enveloppe ; que la portion du fluide qui est située en dedans du canal ACB glisse le long de ce canal sans en sortir, et suive ainsi le mouvement de ce piston A, tout en conservant le même volume ; qu'en conséquence le piston B marche vers l'extérieur d'une quantité égale à ε; enfin que toute la portion du fluide qui se trouve en dehors du canal ACB ne se déplace pas : pour ce déplacement virtuel particulier du système matériel que nous considérons, la somme des travaux virtuels des forces qui sont appliquées à ses diverses parties doit être nulle. Or, la portion ACB du fluide, qui se déplace seule, ne change pas de volume ; les diverses parties qui la composent se meuvent séparément en glissant simplement les unes sur les autres, ou bien sur la partie du fluide qui est en dehors du canal ACB et qui reste immobile ; mais ce glissement s'effectue sans qu'il y ait de frottement, en raison de la fluidité parfaite du système (§ 208) : il résulte de là et de ce que nous avons dit à l'occasion des systèmes matériels dans lesquels on imagine des liaisons (§ 186), que la somme des travaux virtuels dus aux actions que les molécules du fluide tout entier exercent les unes sur les autres est égale à zéro. D'après cela, on voit que la somme des travaux virtuels des forces appliquées à notre système matériel se réduit à

$$F\varepsilon = F'\varepsilon ;$$

et comme cette somme doit être nulle, il s'ensuit qu'on a

$$F = F'.$$

On conclut, de la proposition qui vient d'être établie, que la force F, appliquée au piston A, donne lieu à une pression égale à F sur toute portion de l'enveloppe ayant une étendue égale à la base de ce piston. C'est ce qui constitue le *théorème de la transmission des pressions* dans un fluide dont les molécules ne sont soumises à aucune force autre que les actions que chacune d'elles éprouve de la part des molécules voisines. Il est bon d'observer que la force F, appliquée au piston A, peut recevoir une grandeur quelconque, si le fluide que l'on considère est incompressible, mais qu'elle doit, au contraire, avoir une valeur déterminée, s'il s'agit d'un fluide élastique, valeur qui dépend de la tendance plus ou moins grande du fluide à augmenter de volume.

§ 210. **Égalité des pressions dans tous les sens, autour d'un point quelconque, dans un fluide en équilibre.** — Soit M, *fig.* 107, un point quelconque pris à l'intérieur de la masse fluide dont nous nous sommes occupés dans le paragraphe précédent. Concevons que nous fassions passer par ce point une surface NN′ qui s'étende de tous côtés jusqu'à l'enveloppe, et qui soit plane jusqu'à une certaine distance, tout autour du point M. Cette surface divisera la masse fluide en deux portions P, Q. Supposons que la partie P, c'est-à-dire celle qui ne reçoit pas directement l'action du piston A, soit solidifiée sans changer de forme ; il est clair que, par là, nous ne troublons pas l'équilibre du système tout entier, et que, par conséquent, après cette solidification de la partie P, la partie Q reste à l'état d'équilibre comme précédemment. Mais alors la surface NN′ devient une partie de la paroi qui enveloppe le fluide restant Q ; donc, en vertu de l'action de la force F sur le piston A, le fluide Q exerce une pression égale à F sur une portion de la face plane menée par le point M ayant même étendue que le piston A. Ce résultat est indépendant de la direction que nous avons donnée à la partie plane de la surface NN′ menée

par le point M ; la pression que le fluide situé d'un côté de cette surface exerce sur le fluide situé de l'autre côté, dans le voisinage du point M, et sur une étendue égale à la base du piston A, est donc toujours égale à F, quelle que soit la direction du plan qui sépare ces deux fluides.

Nous venons d'établir l'égalité des pressions dans tous les sens, autour d'un point quelconque M d'un fluide en équilibre, en considérant spécialement un fluide dont les diverses molécules ne sont soumises qu'à leurs actions mutuelles. Nous allons faire voir maintenant que cette égalité des pressions dans tous les sens, autour d'un point quelconque, existe toujours, quelles que soient les forces qui agissent sur les diverses molécules du fluide en équilibre. Mais, pour y arriver, nous étudierons d'abord la transmission des pressions sur les diverses parties de l'enveloppe qui renferme un liquide homogène pesant, à l'état d'équilibre.

§ 211. Reprenons donc ce que nous avons dit dans le § 209, en substituant un liquide homogène pesant au fluide quelconque que nous avons considéré, et dont les diverses molécules n'étaient soumises qu'aux actions que chacune d'elles éprouve de la part des molécules voisines. Les pistons égaux A et B, *fig.* 107, étant disposés comme nous l'avons dit, et étant soumis aux actions des forces F, F′, tellement choisies que le liquide soit en équilibre, cherchons à déterminer la relation qui existe entre ces deux forces F, F′. Pour cela, concevons encore que nous fassions marcher le piston A d'une quantité ε vers l'intérieur de l'enveloppe, et le piston B d'une quantité égale vers l'extérieur, et supposons que le liquide contenu dans le canal ACB glisse le long de ce canal pour suivre le mouvement simultané des deux pistons, sans que les molécules liquides situées en dehors du canal ACB se déplacent en aucune manière : en égalant à zéro la somme des travaux des diverses forces appliquées au système, pour ce mouvement particulier, nous arriverons à la relation cherchée entre F et F′. Or il est clair que cette somme de travaux virtuels ne différera de celle que nous avons trouvée précédemment (§ 209), qu'en ce qu'elle contiendra de plus le travail de la pesanteur sur les diverses molécules liquides auxquelles nous attribuons un déplacement.

Pour évaluer ce travail de la pesanteur sur le liquide contenu dans le canal ACB, nous nous appuierons sur ce qui a été démontré dans le § 173 : ce travail s'obtiendra en multipliant le poids du liquide contenu dans ACB par la quantité dont le centre de gravité de ce liquide s'est abaissé verticalemeut. Mais il est aisé de voir que, eu égard au travail produit par la pesanteur, peu importe que le liquide ACB tout entier glisse le long du canal qui le renferme, de manière que ses deux faces extrêmes A et B marchent chacune d'une quantité ε ; ou bien que la portion de liquide occupant l'espace d'épaisseur ε que nous faisons parcourir au piston A soit transportée seule à l'autre extrémité du liquide ACB, de manière à remplir l'espace abandonné par le piston B dans son mouvement vers le dehors de l'enveloppe : dans ce second cas, où la portion de liquide contenue dans le canal ACB, entre la position finale du piston A et la position initiale du piston B, ne se déplacerait nullement, le centre de gravité du liquide total renfermé dans le canal ACB s'abaisserait verticalement de la même quantité que dans le premier cas. On voit par là que, pour avoir le travail de la pesanteur sur le liquide ACB, il nous suffira de multiplier le poids du liquide contenu dans l'espace que nous faisons parcourir au piston A, par la distance du centre de gravité de cet espace au plan horizontal mené par le centre de gravité de l'espace analogue que parcourt le piston B. Désignons par ω l'aire de la base de chacun des pistons A, B ; par ρ la masse spécifique du liquide (§ 164) ; par h la distance du centre de gravité de la base du piston A au plan horizontal mené par le centre de gravité de la base du piston B ; par α l'angle que la direction du déplacement ε du piston A fait avec la verticale ; et par α' l'angle analogue pour le piston B. Le poids du liquide contenu dans l'espace que nous faisons parcourir au piston A est égal à

$$\rho g \omega \varepsilon ;$$

la hauteur verticale du centre de gravité de cet espace au-dessus

du centre de gravité de l'espace parcouru par le piston B a pour valeur

$$h - \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos \alpha + \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos \alpha' :$$

le travail que nous cherchons est donc exprimé par

$$\rho g \omega \varepsilon \left(h - \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos \alpha + \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos \alpha'\right).$$

D'après cela, l'équation fournie par le théorème du travail virtuel appliqué au mouvement particulier que nous avons choisi, sera

$$F\varepsilon - F'\varepsilon + \rho g \omega \varepsilon \left(h - \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos \alpha + \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos \alpha'\right) = 0 ;$$

d'où l'on déduit, en observant que ε est infiniment petit,

$$F' = F + \rho g \omega h.$$

Cette formule permet de déterminer la pression que le liquide exerce en un point quelconque de l'enveloppe qui le renferme, sur une surface égale à ω, lorsque l'on connaît la pression F qui lui est appliquée en un point particulier, sur une surface de même étendue.

§ 212. Revenons maintenant à la question principale qui nous occupe, c'est-à-dire à la démonstration de l'égalité de pression dans tous les sens autour d'un point, dans un fluide en équilibre dont les molécules sont soumises à des forces quelconques. Pour cela nous considérerons d'abord le cas d'un liquide homogène pesant, puis celui d'un fluide quelconque pesant, enfin le cas général d'un fluide soumis à des forces quelconques.

Dans le cas d'un liquide homogène pesant, supposons encore qu'une partie de l'enveloppe ait été remplacée par un piston A, *fig.* 107, auquel on applique une force F tendant à le faire pénétrer dans le liquide, et considérons les pressions dans différents sens autour d'un point quelconque M pris à l'intérieur du liquide. Quelle que soit la direction du plan que nous ferons passer par le point M, si nous prenons sur ce plan une surface égale à ω ayant son centre de gravité au point M, la pression que le liquide Q situé d'un côté du plan exerce sur cette surface ω aura toujours pour valeur $F + \rho g\omega h$, h étant la hauteur verticale du centre de gravité de la base du piston A au-dessus du point M. L'égalité des pressions dans tous les sens, autour du point M pris à l'intérieur d'un liquide pesant en équilibre, se trouve donc démontrée par là ; mais cette égalité de pression suppose que les diverses surfaces planes égales à ω, sur lesquelles s'exercent les pressions que l'on considère, sont placées de manière que le centre de gravité de chacune d'elles coïncide avec le point M, condition à laquelle nous n'avions pas besoin de nous astreindre lorsque nous considérions un fluide dont les molécules n'étaient soumises qu'à leurs actions mutuelles.

Lorsqu'un fluide pesant en équilibre n'est pas homogène, c'est-à-dire lorsque sa densité n'est pas la même dans toute l'étendue du volume qu'il occupe, on ne peut plus raisonner comme nous venons de le faire. Mais alors, pour établir l'égalité des pressions dans tous les sens autour d'un point M de ce fluide, rien ne nous empêche de considérer seulement la portion du fluide qui est contenue à l'intérieur d'une surface fermée de petites dimensions s'étendant tout autour du point M ; si nous concevons que tout le reste du fluide soit solidifié, sans que ses molécules changent de position les unes par rapport aux autres, cela constituera une nouvelle enveloppe renfermant la portion de fluide qui est voisine du point M et à laquelle nous conservons sa fluidité primitive. Cette petite portion du fluide total ne sera généralement pas homogène ; mais la densité n'y variera que très peu d'un point à un autre, en raison du peu de distance qui existe entre ses divers points, et l'erreur que l'on commettra en regardant la densité comme constante dans toute l'étendue de cette portion de fluide sera d'autant plus faible que les dimensions de l'espace qu'elle occupe seront supposées plus petites : on peut dire que, si l'on ne considère qu'une portion infiniment petite du fluide pesant dont il s'agit, tout autour du point M, les choses s'y passent de même que dans un fluide homogène pesant. D'après cela, les pressions supportées par diverses surfaces planes égales à ω, menées par le point M, et ayant leurs centres de gravité en ce point, sont toutes égales

entre elles, pourvu que ω soit infiniment petit. Le défaut d'homogénéité du fluide nous oblige ainsi à ajouter cette nouvelle condition de la petitesse de ω, à celle que nous avions trouvée d'abord par cela seul que le fluide était soumis à l'action de la pesanteur.

Nous n'avons plus que quelques mots à ajouter pour établir l'égalité des pressions dans tous les sens autour d'un point, dans le cas d'un fluide soumis à des forces quelconques. Considérons, pour chaque molécule du fluide, la résultante de toutes les forces auxquelles elle est soumise, en faisant abstraction toutefois des actions que cette molécule éprouve de la part des molécules voisines. Cette résultante n'a généralement pas la même direction, et le rapport de son intensité à la masse de la molécule n'a généralement pas la même grandeur, pour les diverses molécules du fluide ; mais ces changements de grandeur et de direction ne se font sentir que peu à peu, à mesure qu'on passe d'une molécule à une autre, en suivant une ligne quelconque à l'intérieur du fluide : on peut donc regarder la direction de cette force résultante, et le rapport de son intensité à la masse de la molécule sur laquelle elle agit, comme restant les mêmes dans toute l'étendue d'un espace très petit. Dès lors la portion du fluide contenue dans cet espace se trouve dans des conditions analogues à celles où elle se trouverait si elle était uniquement soumise à l'action de la pesanteur ; donc, dans le cas général dont nous nous occupons maintenant, il y a encore égalité entre les pressions qui s'exercent dans tous les sens, autour d'un point, sur des surfaces planes infiniment petites et égales ayant leurs centres de gravité en ce point.

Si l'on divise la pression P, qui s'exerce sur un élément plan ayant son centre de gravité en un point M du fluide, par l'aire ω de cet élément, le quotient $\frac{P}{\omega}$ est ce qu'on nomme la pression en M rapportée à l'unité de surface ; ce n'est autre chose que la pression totale que le fluide exercerait sur une surface plane ayant pour aire l'unité de surface, dans le cas où chacun des éléments égaux à ω dans lesquels on pourrait décomposer cette surface plane supporterait une pression partielle égale à P. Ce quotient $\frac{P}{\omega}$ est souvent désigné, pour abréger, sous la simple dénomination de pression au point M ; aussi, toutes les fois que l'on parle de la pression en un point, dans un fluide en équilibre, sans spécifier quelle est l'étendue de la surface sur laquelle la pression s'exerce, on doit entendre qu'il s'agit de la pression rapportée à l'unité de surface.

§ 213. **Équilibre d'un fluide pesant.** — Considérons en particulier un fluide pesant, en équilibre dans une enveloppe fermée qu'il remplit complètement, et comparons les pressions qui correspondent aux différents points de l'espace qu'il occupe. Pour cela nous prendrons d'abord deux points M, M', situés sur un même plan horizontal, *fig.* 108. Concevons que nous tracions deux cercles infiniment petits et égaux ayant leurs plans perpendiculaires à la droite MM', et leurs centres aux points M, M' eux-mêmes ; concevons en outre que nous joignions ces deux cercles l'un à l'autre par une surface cylindrique dont ils forment les deux bases.

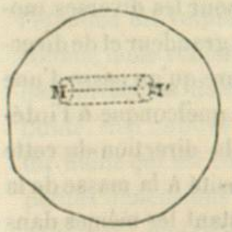

Fig. 108.

Le fluide que renferme le cylindre ainsi obtenu est en équilibre sous l'action de diverses forces qui sont : 1° la pesanteur ; 2° les pressions qu'il éprouve de la part du fluide environnant ; 3° les actions mutuelles de ses diverses molécules. Soient p et p' les pressions en M et M', et ω l'aire de l'une quelconque des bases du cylindre : $p\omega$ et $p'\omega$ seront les pressions exercées, sur chacune de ces deux bases, par le fluide environnant. Cela posé, si nous considérons toutes les forces extérieures qui agissent sur le fluide renfermé dans le cylindre, et si nous exprimons que la somme des projections de ces forces sur la droite MM' est nulle (§ 185), nous trouverons simplement l'équation

$$p\omega - p'\omega = 0;$$

car les actions de la pesanteur sur les diverses molécules du

fluide sont toutes perpendiculaires à MM', et il en est de même des pressions que le fluide environnant exerce sur les diverses parties de la surface latérale du cylindre. On conclut de là que p est égal à p', c'est-à-dire que la pression est la même pour tous les points d'un même plan horizontal mené à l'intérieur du fluide.

Prenons maintenant deux points M, M', *fig.* 109, situés à la rencontre de deux plans horizontaux infiniment voisins avec une même verticale. Désignons par p et p' les pressions en ces points M, M' ; par ω la surface de la base infiniment petite d'un cylindre de révolution ayant MM' pour axe ; par dz la distance MM', et par ρ la masse spécifique du fluide en M, masse spécifique que nous supposerons être la même dans toute l'étendue du cylindre ayant pour base ω et pour hauteur MM' ou dz.

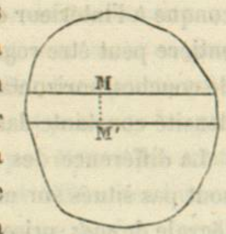

Fig. 109.

Le poids du fluide contenu dans ce cylindre sera égal à $\rho g\omega dz$, et les pressions supportées par ses bases supérieure et inférieure auront respectivement pour valeurs $p\omega$ et $p'\omega$. Si nous projetons sur la verticale MM' les diverses forces extérieures qui agissent sur cet élément cylindrique de fluide, et si nous exprimons que la somme des projections ainsi obtenues est nulle, nous trouverons évidemment

$$p\omega - p'\omega + \rho g\omega dz = 0.$$

On en déduit

$$p' = p + \rho g dz,$$

ce qui montre que la pression augmente nécessairement quand on passe d'un plan horizontal quelconque à un autre plan horizontal infiniment voisin du premier et situé au-dessous de lui.

Cette augmentation $\rho g dz$ qu'éprouve la pression, quand on passe du point M du premier plan au point M' du second plan, doit être la même, quelle que soit la position du point M sur le premier plan; puisque la pression est constante dans toute l'étendue de chacun des deux plans. Or dz ne varie pas, et g est une constante; donc ρ doit avoir la même valeur dans toute l'étendue du plan horizontal sur lequel nous avons pris le point M. Nous voyons par là que, si la densité du fluide pesant en équilibre dont nous nous occupons n'est pas la même partout, cette densité doit nécessairement être la même pour tous les points d'un même plan horizontal mené d'une manière quelconque à l'intérieur du fluide; en sorte que la masse fluide tout entière peut être regardée comme se composant d'une infinité de couches horizontales infiniment minces, dont chacune a une densité constante dans toute son étendue.

La différence des pressions relatives à deux points qui ne sont pas situés sur un même plan horizontal a pour valeur l'intégrale de $\rho g dz$, prise entre des limites correspondant aux plans horizontaux qui passent par ces deux points; il est aisé de voir que cette différence de pression n'est autre chose que le poids du fluide contenu à l'intérieur d'un cylindre vertical, ayant pour base l'unité de surface, et s'étendant de l'un à l'autre de ces deux plans horizontaux. Si le fluide que l'on considère avait partout la même densité, et c'est ce qui arriverait si c'était un liquide homogène, la différence de pression dont il s'agit aurait pour valeur $\rho g h$, ρ étant la masse spécifique du fluide et h la distance des plans horizontaux dont il vient d'être question.

Les divers plans horizontaux que l'on peut mener dans l'espace occupé par le fluide prennent le nom de *surfaces de niveau*. La distance h des plans horizontaux menés par deux points quelconques est ce qu'on nomme la différence de niveau de ces deux points.

Lorsqu'un liquide pesant est placé dans un vase ouvert par le haut, ou bien dans un vase fermé trop grand pour qu'il puisse le remplir en totalité, il se dépose au fond du vase et se termine par une surface libre dont les divers points n'éprouvent aucune pression. Imaginons qu'une paroi solide s'étende sur cette surface libre du liquide, et aille se relier de tous côtés avec les parois latérales du vase, sans cependant exercer de pression en aucun point sur le liquide avec lequel elle est en contact. La masse liquide dont il s'agit se trouvera dès lors contenue dans une enveloppe fermée de toute part dont elle remplira toute la capacité, sans cesser d'être exactement dans les mêmes conditions d'équilibre qu'auparavant, et par conséquent nous pourrons lui appliquer les résultats auxquels nous sommes parvenus dans ce qui précède. La pression étant nulle dans toute l'étendue de la surface libre, cette surface doit nécessairement être plane et horizontale; car, s'il en était autrement on pourrait toujours prendre sur cette surface libre deux points qui ne fussent pas sur un même plan horizontal, et par suite les pressions en ces deux points ne pourraient pas être nulles toutes deux, puisqu'elles seraient nécessairement différentes l'une de l'autre. La pression p, en un point quelconque situé à une distance h du plan horizontal qui forme la surface libre du liquide, aura pour valeur

$$p = \rho g h,$$

puisque la pression est nulle sur la surface libre.

Lorsque deux liquides pesants, de densités différentes, se trouvent dans un même vase sans se mélanger, ils ne peuvent être en équilibre qu'autant que leur surface de séparation est plane et horizontale; car, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait mener un plan horizontal qui pénétrerait à la fois dans les deux liquides, et la densité ne serait pas la même dans tous les points de ce plan horizontal, ce qui est impossible.

§ 214. **Équilibre d'un fluide soumis à des forces quelconques.** — Lorsqu'un fluide est en équilibre sous l'action de forces quelconques, la pression varie en général d'un point à un autre de l'espace occupé par ce fluide. Considérons spécialement les divers points pour lesquels la pression a une même valeur; l'ensemble de ces points forme généralement une surface à laquelle on donne le nom de *surface de niveau*, par extension de ce qui se rapporte aux fluides pesants. On comprend qu'à chaque point du fluide correspond une surface de niveau;

en sorte qu'on peut imaginer une infinité de ces surfaces tracées à l'intérieur de l'espace que le fluide occupe.

La résultante R des forces appliquées à une molécule quelconque du fluide, abstraction faite des actions qu'elle éprouve de la part des molécules voisines, est dirigée normalement à la surface de niveau qui passe par le point M où cette molécule se trouve. Pour démontrer cette proposition, imaginons que, par le point M, nous tracions une courbe quelconque sur la surface de niveau qui lui correspond; nous allons voir que la résultante R doit être normale à cette courbe. Supposons, en effet, que cela ne soit pas, et que la résultante R soit oblique à la courbe dont nous venons de parler. Nous pourrons toujours prendre sur cette courbe un arc qui comprenne le point M, et qui soit assez petit pour que toutes les résultantes telles que R, appliquées aux diverses molécules par lesquelles il passe, soient inclinées par rapport à la courbe du même côté que la force R ; car la direction de cette résultante R ne change que peu à peu, quand on passe d'un point du fluide à d'autres points situés dans le voisinage du premier. Regardons cet arc de courbe comme l'axe d'un canal de section uniforme et infiniment petite, et appliquons le théorème du travail virtuel au fluide contenu à l'intérieur de ce canal, en supposant que ce fluide glisse dans le sens de la longueur du canal, sans changer de volume : nous en conclurons évidemment que les pressions aux deux extrémités de l'arc de courbe que nous avons pris ne sont pas égales, et que la plus grande correspond à l'extrémité vers laquelle la direction de la force R s'incline. Mais nous savons qu'il n'en est pas ainsi, puisque, par la définition même des surfaces de niveau, les pressions doivent être les mêmes aux deux extrémités de l'arc dont il s'agit : donc nous ne pouvons pas admettre que la résultante R soit oblique par rapport à cet arc de courbe, et par conséquent elle lui est normale. La force R est donc normale à la surface de niveau correspondant au point auquel elle est appliquée, puisqu'elle est normale à toute ligne tracée par ce point sur la surface.

Considérons maintenant deux surfaces de niveau infiniment

voisines AB, A'B', *fig.* 110. Soient p la pression correspondant aux différents points de la surface AB, et $p + dp$ celle qui correspond à la surface A'B'. Si nous prenons deux points M, M' de ces surfaces, situés sur une normale à l'une d'elles, et si nous regardons la droite MM' comme

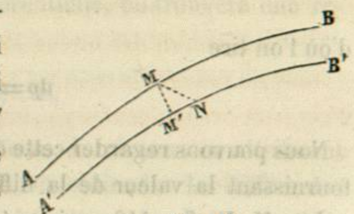

Fig. 110.

l'axe d'un cylindre ayant une base infiniment petite ω, il nous suffira de projeter sur MM' les forces extérieures appliquées aux diverses molécules du fluide contenu dans ce cylindre, ainsi que les pressions qui s'exercent sur sa surface, et d'exprimer que la somme des projections de toutes ces forces est nulle, pour trouver la valeur de la différence dp des pressions correspondant aux deux surfaces AB, A'B'. Désignons par ρ la masse spécifique du fluide en M ; par φ le rapport qui existe entre la résultante des forces extérieures appliquées à la molécule située en M et la masse de cette molécule, rapport qui n'est autre chose que l'accélération du mouvement que cette résultante communiquerait à la molécule M supposée libre ; et enfin par ds la distance MM'. La masse du fluide contenu dans le cylindre infiniment petit dont nous avons parlé est exprimée par

$$\rho\omega ds.$$

La résultante totale des diverses forces extérieures appliquées à ce fluide, non compris les pressions qu'il éprouve de la part du fluide environnant, a donc pour valeur

$$\rho\varphi\omega ds,$$

et cette résultante est dirigée suivant la ligne MM'; les pressions qui s'exercent sur les deux bases du cylindre, en M et en M', sont respectivement égales à

$$p\omega, \qquad (p+dp)\omega,$$

et sont dirigées également suivant la ligne MM', en sens contraires l'une de l'autre. D'après cela on aura la relation