$$p\omega - (p + dp)\omega + \rho\varphi\omega ds = 0\,;$$

d'où l'on tire

$$dp = \rho\varphi ds. \qquad (a)$$

Nous pouvons regarder cette équation différentielle (a) comme fournissant la valeur de la différence des pressions en deux points M, N, *fig.* 110, qui sont infiniment voisins, et par lesquels nous avons fait passer les deux surfaces de niveau AB, A′B′. La distance MM′ ou ds est la projection de la distance MN de ces deux points sur la direction de la force correspondant à l'accélération φ. Désignons par x, y, z les coordonnées du point M par rapport à trois axes rectangulaires; par $x + dx, y + dy, z + dz$, les coordonnées du point N; et par X, Y, Z les projections de φ sur les trois axes coordonnés. Le cosinus de l'angle M′MN a pour valeur

$$\frac{ds}{\mathrm{MN}},$$

et aussi

$$\frac{\mathrm{X}}{\varphi}\frac{dx}{\mathrm{MN}} + \frac{\mathrm{Y}}{\varphi}\frac{dy}{\mathrm{MN}} + \frac{\mathrm{Z}}{\varphi}\frac{dz}{\mathrm{MN}}\,;$$

si l'on égale ces deux valeurs du même cosinus, on en déduit

$$\varphi ds = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz,$$

et par suite l'équation (a) devient

$$dp = \rho(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz). \qquad (b)$$

A l'aide de cette équation différentielle, on peut déterminer la loi suivant laquelle la pression p varie d'un point à un autre du fluide, en supposant que ρ, X, Y, Z soient connus.

La pression étant constante dans toute l'étendue d'une même surface de niveau, on a pour une pareille surface

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0\,:$$

c'est l'équation différentielle des surfaces de niveau. Si l'on peut intégrer cette équation différentielle, on trouvera une relation telle que

$$f(x, y, z) = \mathrm{C},$$

qui sera l'équation finie des surfaces du niveau; en attribuant à la constante C diverses valeurs, on obtiendra les différentes surfaces de niveau qui existent dans la masse fluide considérée. Si le fluide dont il s'agit est un liquide contenu dans un vase qu'il ne remplit pas complètement, la surface libre à laquelle ce liquide se termine, et le long de laquelle il n'éprouve aucune pression, sera encore représentée par l'équation précédente, pourvu qu'on y attribue à la constante C une valeur particulière.

Il est aisé de comprendre maintenant pourquoi l'on donne le nom de surfaces de niveau aux surfaces que nous avons considérées à l'occasion du théorème des forces vives dans le mouvement d'un point matériel (§ 119).

La pression p est une fonction de trois variables x, y, z, dont la différentielle totale est fournie par l'équation (b). Pour que la valeur de dp soit la différentielle d'une fonction de x, y, z, il faut qu'on ait :

$$\frac{d.\rho\mathrm{X}}{dy} = \frac{d.\rho\mathrm{Y}}{dx}, \quad \frac{d.\rho\mathrm{X}}{dz} = \frac{d.\rho\mathrm{Z}}{dx}, \quad \frac{d.\rho\mathrm{Y}}{dz} = \frac{d.\rho\mathrm{Z}}{dy}. \qquad (c)$$

Les conditions exprimées par ces trois équations (c) sont donc nécessaires pour que le fluide soit en équilibre; mais il est aisé de voir que généralement elles ne seront pas suffisantes. En effet, si ces conditions sont remplies, on pourra intégrer l'équation (b), et l'on obtiendra ainsi p en fonction de x, y, z; or, pour que le fluide soit en équilibre, il faudra que, en chaque point, la densité correspondant à la masse spécifique ρ soit telle que le fluide puisse supporter la pression p relative à ce point. Cette dernière condition est toujours satisfaite dans le cas d'un liquide, en raison de son incompressibilité; puisque, avec une densité donnée, ce liquide peut supporter une pression d'une intensité quelconque ; mais il n'en est pas de même dans le cas d'un gaz, qui, avec une densité donnée, ne peut supporter qu'une pression déterminée.

Dans le cas particulier où

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

est la différentielle d'une certaine fonction $f(x, y, z)$, les surfaces de niveau sont représentées par l'équation

$$f(x, y, z) = C.$$

Soient C et $C + dC$ les valeurs de la constante, qui correspondent aux deux surfaces de niveau S, S', passant par deux points infiniment voisins M, M'; si x, y, z sont les coordonnées du point M, et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ celles du point M', on aura évidemment :

$$Xdx + Ydy + Zdz = dC;$$

et par suite l'équation (b) deviendra

$$dp = \rho dC.$$

Or, quels que soient le point M pris sur la surface S et le point infiniment voisin M' pris sur la surface S', dp aura toujours la même valeur, puisque p est constant dans toute l'étendue de chacune de ces deux surfaces; dC restera aussi toujours le même ; donc ρ est constant pour tous les points de la surface S. Ainsi, dans ce cas où

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

est la différentielle d'une fonction de x, y, z, le fluide en équilibre doit avoir la même densité dans toute l'étendue de chacune des surfaces de niveau ; en sorte qu'on peut le regarder comme composé d'une infinité de couches homogènes infiniment minces, séparées les unes des autres par des surfaces de niveau. Ce résultat est analogue à celui que nous avons déjà obtenu dans le cas d'un fluide pesant.

Tout ce que nous venons de dire, pour l'équilibre d'un fluide soumis à des forces quelconques, s'applique aussi bien au cas d'un équilibre relatif qu'au cas d'un équilibre absolu, pourvu que, lorsqu'il s'agit d'un équilibre relatif, on joigne aux forces réelles les forces apparentes dont on doit tenir compte dans ce cas. L'équilibre d'un fluide pesant, que nous avons considéré tout d'abord (§ 213), n'est lui-même qu'un équilibre relatif, en raison du mouvement de la terre dans l'espace ; nous l'avons présenté comme un équilibre absolu, en regardant chaque molécule du fluide comme soumise à l'action de son poids, qui n'est, comme nous le savons, que la résultante de l'attraction de la terre et de la force centrifuge due à la rotation du globe terrestre (§ 146).

§ 215. **Exemples de l'équilibre des fluides.** — *Liquide tournant autour d'un axe vertical.* — Supposons qu'un liquide pesant soit contenu dans un vase, et que le tout soit animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical. Le liquide prend dans le vase un certain état d'équilibre relatif que nous allons étudier. Nous pouvons regarder le poids mg d'une molécule liquide de masse m comme une force réelle, que nous aurions à considérer seule, si le liquide ne tournait pas autour de la verticale et était en repos par rapport à la terre. Pour pouvoir assimiler l'équilibre relatif dont nous nous occupons à un équilibre absolu, nous devons joindre à cette force mg la force centrifuge due à la rotation du liquide. Rapportons les divers points du liquide à trois axes coordonnés rectangulaires, dont l'un, l'axe des z, coïncide avec l'axe de rotation ; et supposons que les z positifs se comptent de bas en haut. Si nous désignons par ω la vitesse angulaire constante avec laquelle le liquide tourne, par x, y, z les coordonnées de la molécule de masse m que nous considérons en particulier, et par r la distance de cette molécule à l'axe de rotation, nous aurons

$$m\omega^2 r$$

pour la force centrifuge que nous devons joindre au poids mg, et

$$m\omega^2 x, \qquad m\omega^2 y,$$

pour les composantes de cette force centrifuge dirigées parallèlement aux axes des x et des y; quant à la composante parallèle à l'axe des z, elle est évidemment nulle. D'après cela, nous aurons

$$X = \omega^2 x, \qquad Y = \omega^2 y, \qquad Z = -g;$$

en sorte que l'équation différentielle des surfaces de niveau sera

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0.$$

En intégrant cette équation, nous trouvons

$$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + C,$$

ce qui montre que les surfaces de niveau sont des paraboloïdes de révolution ayant l'axe de rotation du liquide pour axe de figure. Ces paraboloïdes sont tous égaux entre eux, et peuvent être regardés comme étant les diverses positions que prendrait l'un d'eux, si on lui donnait un mouvement de translation, en le faisant glisser le long de son axe. La surface libre du liquide étant une surface de niveau pour laquelle la pression est nulle, a également la forme du paraboloïde dont il vient d'être question.

Si le liquide tournant est surmonté d'une atmosphère gazeuse pesante, comme cela a lieu lorsqu'on fait tourner un vase plein d'eau au milieu de l'air atmosphérique, les choses ne se passent plus tout à fait de la même manière. Les surfaces de niveau du liquide tournant sont bien toujours les mêmes ; mais sa surface libre n'est plus une de ces surfaces de niveau, parce que les points situés à différentes hauteurs sur cette surface libre éprouvent des pressions inégales de la part du gaz pesant qui la surmonte. Cependant cette inégalité de pression est presque insensible, si le vase qui contient le liquide tournant n'a pas de très grandes dimensions, et par conséquent la surface libre du liquide se confond presque complètement avec une surface de niveau. Si l'on admettait que le gaz qui surmonte le liquide fût entraîné par celui-ci dans son mouvement de rotation et tournât avec la même vitesse angulaire que lui autour de l'axe vertical, les surfaces de niveau seraient les mêmes pour le liquide et pour le gaz ; et comme la densité devrait être constante dans toute l'étendue de chacune de ces surfaces, il s'ensuit que la surface de séparation du liquide et du gaz serait précisément une de ces surfaces de niveau.

§ 216. *Atmosphère terrestre ; nivellement barométrique.* — L'atmosphère de la terre est une masse gazeuse que l'on peut considérer en général comme étant en équilibre sur le globe terrestre qu'elle recouvre en totalité. Diverses causes permanentes ou accidentelles viennent, il est vrai, troubler cet équilibre, et occasionnent les vents que nous observons à la surface de la terre ; mais nous ferons abstraction de ces causes de mouvement. Les diverses molécules de l'atmosphère sont pesantes, et c'est sous l'action de la pesanteur qu'elles se mettent en équilibre. S'il ne s'agissait que d'une masse gazeuse occupant un espace de peu d'étendue sur la terre, nous pourrions y regarder la pesanteur comme une force constante en grandeur et en direction; et par suite les surfaces de niveau, dans cette masse gazeuse, seraient des plans horizontaux (§ 213); mais il n'en est pas ainsi, parce que le gaz que nous considérons environne la terre de toute part, et que, en conséquence, la pesanteur agit sur ses diverses molécules suivant des directions extrêmement différentes dans toute son étendue. La pesanteur, aux divers points de la surface de la terre, ne s'éloigne pas beaucoup d'être dirigée vers le centre du globe terrestre; il s'ensuit que les surfaces de niveau de l'atmosphère sont presque des surfaces sphériques concentriques ayant pour centre commun le centre de la terre : ces surfaces de niveau sont seulement un peu aplaties vers les pôles, et renflées vers l'équateur, par l'effet de la force centrifuge qui se combine avec l'attraction de la terre pour produire ce que nous nommons la pesanteur.

Au lieu d'étudier ici cette question de l'équilibre de l'atmosphère terrestre d'une manière générale, nous nous contenterons de la traiter pour une portion restreinte de l'atmosphère, afin d'arriver à la formule qui permet de déterminer des différences de niveau au moyen d'observations barométriques; et pour cela nous chercherons spécialement la loi suivant laquelle la pression atmosphérique varie, quand on passe d'un point à un autre d'une même verticale, en supposant que la pesanteur y soit constante en grandeur et en direction. Soit z la distance d'un point quelconque de cette verticale au point où elle perce la surface de la terre. D'après l'équation (a) du § 214, on aura

$$dp = -\rho g dz.$$

Or, on sait que, d'après les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, on a, entre la pression p et la masse spécifique ρ relatives à un point quelconque de l'atmosphère, la relation

$$\rho = \frac{kp}{1+\alpha t},$$

en désignant par t la température de l'air en ce point, par α le coefficient de dilatation de l'air qui est égal à 0,00366, et par k un coefficient constant. Si l'air avait partout la même composition, et si la température t aux différents points de la verticale était connue en fonction de z, nous trouverions facilement la relation exacte entre p et z, en éliminant ρ entre les deux relations précédentes et intégrant ensuite. Mais il n'en est pas ainsi: l'air contient habituellement de la vapeur d'eau, en quantité variable avec la hauteur; et la température t, différente d'un point à un autre de la verticale, n'est pas connue en fonction de z. Pour suppléer à ce que nous ne connaissons pas, nous remplacerons t par la moyenne arithmétique des températures t_0 et t_1 correspondant aux deux points particuliers entre lesquels nous voulons calculer la différence de pression; et, en outre, nous mettrons 0,004 au lieu de 0,00366 pour α, afin de tenir compte jusqu'à un certain point de l'existence de la vapeur d'eau, dont la proportion croît ordinairement avec la température, de telle sorte que sa présence équivaut à une certaine augmentation du coefficient de dilatation de l'air. La relation entre ρ et p deviendra donc

$$\rho = \frac{kp}{1+\frac{2}{1000}(t_0+t_1)},$$

et par suite l'équation différentielle qui lie dp à dz pourra être mise sous la forme

$$dz = -\frac{1}{kg}\left[1+\frac{2}{1000}(t_0+t_1)\right]\frac{dp}{p}.$$

En intégrant entre des limites correspondant à deux points déterminés de la verticale, et désignant par H la distance de ces deux points, et par p_0 et p_1 les valeurs extrêmes de p, on trouve

$$H = \frac{1}{kg}\left[1+\frac{2}{1000}(t_0+t_1)\right] l.\frac{p_0}{p_1}.$$

Le logarithme qui entre dans cette formule est un logarithme népérien. Enfin, si nous remplaçons les pressions p_0, p_1, par les hauteurs h_0, h_1, des colonnes barométriques qui leur servent de mesure, et qui par conséquent leur sont proportionnelles; si nous substituons au logarithme népérien un logarithme ordinaire, et si nous donnons au coefficient constant du second membre la valeur que les mesures directes de différences de niveau ont indiquée comme étant la plus convenable, nous aurons définitivement la formule

$$H = 18393^{m}\left[1+\frac{2}{1000}(t_0+t_1)\right]\log.\frac{h_0}{h_1}.$$

C'est à l'aide de cette formule que l'on détermine la différence de niveau H de deux points, en mesurant en chaque point la hauteur de la colonne barométrique et la température de l'air. D'après la manière dont elle a été obtenue, on ne devrait s'en servir que dans le cas où les deux points seraient situés sur une même verticale. Mais les surfaces de niveau de l'atmosphère peuvent être regardées comme équidistantes, dans une certaine étendue, tout autour de chaque verticale; il s'ensuit que, lors même que les deux stations où l'on a mesuré les hauteurs h_0, h_1, et les températures t_0, t_1, ne se trouvent pas sur une même verticale, si ces stations ne sont pas très éloignées l'une de l'autre, on peut prendre la valeur de H fournie par la formule pour la distance de l'une d'elles à la surface de niveau passant par l'autre, c'est-à-dire pour la différence de niveau qui existe entre elles. Les hauteurs h_0, h_1 des colonnes de mercure qui font équilibre à la pression atmosphérique dans les deux stations doivent, bien entendu, être corrigées tout d'abord en raison de l'inégale température du mercure dans ces deux stations, et ramenées à la température de zéro.

La formule que nous venons d'obtenir suffit généralement pour déterminer les différences de niveau au moyen des observations barométriques, quoiqu'elle ait été trouvée en attribuant à l'intensité de la pesanteur une valeur constante. Si l'on veut arriver à une exactitude plus grande, il faut tenir compte de ce que cette force varie à la fois avec la latitude du lieu et avec la hauteur du point que l'on considère au-dessus de la surface de la terre ; mais nous ne nous occuperons pas ici de chercher la modification qui en résulterait dans la formule qui donne la différence de niveau H.

§ 217. **Pressions d'un liquide pesant sur les parois du vase qui le renferme.** — Un liquide pesant, en équilibre dans un vase fermé qu'il ne remplit pas en totalité, ou bien dans un vase ouvert par le haut, se termine à une surface libre qui est plane et horizontale. Nous avons établi cette proposition (§ 213), en admettant que le liquide ne soit soumis à aucune pression aux différents points de sa surface libre. Elle est vraie encore dans le cas où le liquide est surmonté d'une atmosphère gazeuse, en équilibre elle-même sous l'action de la pesanteur, comme nous le voyons constamment à la surface de la terre, parce que les surfaces de niveau sont planes et horizontales, à la fois dans le liquide et dans le gaz, et que leur surface de séparation doit évidemment être une de ces surfaces de niveau. Nous allons étudier les pressions que ce liquide exerce sur les parois du vase qui le renferme.

Nous savons déjà que la pression p, en un point quelconque du liquide, a pour valeur

$$p = p_0 + \rho g h,$$

en désignant par p_0 la pression qui s'exerce sur la surface libre, et par h la distance du point que l'on considère à cette surface (§ 213). L'existence de la pression p_0 sur la surface libre ne fait donc qu'augmenter d'une même quantité les pressions qui s'exerceraient sans cela aux différents points de la masse liquide. Nous en ferons abstraction, et nous raisonnerons comme si p_0 était nul : il sera facile de voir comment les résultats auxquels nous parviendrons devront être modifiés pour tenir compte de cette pression sur la surface libre, dans le cas où elle ne sera pas nulle. D'après cela, chaque élément ω de la paroi du vase sera regardé comme éprouvant de la part du liquide une pression égale à $\rho g \omega h$, h étant la distance du centre de gravité de cet élément à la surface libre.

Considérons d'abord les pressions exercées sur les divers éléments d'une paroi plane. Ces pressions sont des forces parallèles et de même sens ; elles ont une résultante égale à leur somme, qui est la pression totale supportée par la paroi. Le point d'application de cette résultante, sur la paroi même, se nomme *centre de pression*. La pression supportée par un élément ω de cette paroi plane étant exprimée par $\rho g \omega h$, la pression totale est égale à

$$\Sigma \rho g \omega h ;$$

ou bien, ce qui est la même chose,

$$\rho g \mathrm{AH},$$

en désignant par A l'aire totale de la paroi, et par H la distance de son centre de gravité à la surface libre du liquide, en observant que, d'après les propriétés des centres de gravité, on a

$$\Sigma \omega h = \mathrm{AH}.$$

Pour trouver le centre de pression correspondant à la paroi plane AB, *fig.* 111, observons que la pression sur un élément

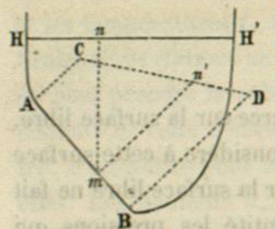

Fig. 111.

ω ayant son centre de gravité en *m* est égale au poids d'une colonne de liquide ayant pour base ω et pour hauteur la distance *mn* du point *m* à la surface libre HH'. Si par chaque point *m* de la paroi AB nous élevons une perpendiculaire à cette paroi, et si nous prenons sur cette perpendiculaire une longueur *mn'* égale à la distance du point *m* à la surface HH' du liquide, nous obtiendrons un prisme tronqué ABCD. Concevons que ce prisme tronqué soit divisé en prismes élémentaires ayant leurs arêtes perpendiculaires à la paroi AB, et ayant pour base les divers éléments ω de cette paroi ; si chacun de ces prismes élémentaires est un solide homogène de même densité que le liquide considéré, et si ces divers prismes sont soumis à l'action de la pesanteur s'exerçant suivant une direction perpendiculaire AB, il est aisé de voir que la paroi AB sera pressée par l'ensemble de ces prismes exactement de même qu'elle l'est par le liquide avec lequel elle est en contact, et qui s'étend jusqu'à la surface libre HH'. On conclut de là qu'il suffit de chercher le centre de gravité du prisme tronqué ABCD considéré comme un solide homogène, et de le projeter sur la face AB, pour avoir le centre de pression correspondant à cette face AB.

Si, par exemple, la paroi AB est rectangulaire, et a un de ses côtés situé dans le plan horizontal HH', le centre de pression se trouve sur la ligne qui joint le milieu des côtés horizontaux du rectangle, et au tiers de cette ligne à partir du côté inférieur. Si la paroi AB est un triangle ayant son sommet dans le plan HH' et sa base dirigée horizontalement, le centre de pression est situé sur la ligne qui joint le sommet au milieu de la base, et au quart de cette ligne à partir de la base. Si la paroi plane est un triangle ayant sa base dans le plan HH', le centre de pression se trouve au milieu de la ligne qui joint le milieu de la base au sommet opposé.

§ 218. Considérons maintenant une portion de paroi de forme quelconque, et cherchons à composer entre elles les pressions que le liquide exerce sur les divers éléments dont elle est formée. Pour cela, imaginons que nous tracions trois axes coordonnés rectangulaires, dont l'un soit vertical, et décomposons la pression supportée par un élément quelconque ω de la paroi en trois composantes dirigées parallèlement à ces axes. Si nous désignons par α, β, γ les angles que la normale à l'élément considéré fait avec les trois axes, nous aurons

$$\rho g\omega h \cos\alpha, \qquad \rho g\omega h \cos\beta, \qquad \rho g\omega h \cos\gamma,$$

pour les valeurs de ces composantes ; nous voyons que ce sont précisément les pressions que le liquide exercerait sur les projections

$$\omega\cos\alpha, \qquad \omega\cos\beta, \qquad \omega\cos\gamma,$$

de l'élément de paroi ω sur les trois plans coordonnés, en supposant que le centre de gravité de chacune de ces projections se trouvât à la même distance *h* au-dessous de la surface libre du liquide. Cette décomposition étant faite pour les pressions supportées par tous les éléments de la portion de paroi que nous considérons, nous pouvons composer entre elles toutes les pressions composantes dirigées parallèlement à chacun des axes coordonnés : nous aurons ainsi trois résultantes partielles ayant respectivement leurs directions parallèles à ces axes, et si nous pouvons trouver une force unique qui soit la résultante de ces trois résultantes partielles, cette force unique sera la résultante des pressions que le liquide exerce sur les divers éléments de la paroi. Quant à ces résultantes partielles, il est aisé de trouver la grandeur de chacune d'elles, ainsi que la position de son point d'application. On reconnaît en effet, d'après ce que nous venons de dire, que la résultante des pressions composantes dirigées parallèlement à l'un des deux axes horizontaux est précisément la pression que le liquide exercerait sur la projection de la paroi considérée sur le plan vertical perpendiculaire à cet axe. On reconnaît en outre que la résultante des pressions composantes dirigées verticalement est égale au poids du liquide contenu à l'intérieur du cylindre vertical passant par le contour de la paroi, et s'étendant depuis cette paroi jusqu'à la surface libre ; cette résultante est dirigée suivant la verticale menée par le centre de gravité de la portion de liquide dont il s'agit. Ces énoncés supposent que toutes les pressions composantes parallèles à un quelconque des trois axes sont dirigées dans le même sens ; c'est-à-dire que, dans la projection de la portion de paroi considérée sur un plan perpendiculaire à cet axe, il n'y a pas plusieurs parties qui se projettent l'une sur l'autre : il est aisé de voir en quoi les énoncés devraient être modifiés, si les choses se passaient autrement.

Nous pouvons appliquer ce qui vient d'être dit à la recherche de la résultante de toutes les pressions qu'un liquide pesant exerce sur les diverses parties de la paroi du vase qui le renferme. Après avoir mené trois axes coordonnés rectangulaires, dont l'un soit vertical, concevons que nous circonscrivions à la paroi qui renferme le liquide un cylindre ayant ses génératrices parallèles à un des deux axes horizontaux ; la ligne de contact du cylindre avec cette paroi la divise en deux portions distinctes, dont les projections sur un plan perpendiculaire à cet axe se recouvrent complètement : il est aisé de voir d'après cela que les composantes des pressions élémentaires dirigées parallèlement au même axe ont une résultante nulle. Les composantes de ces pressions élémentaires dirigées parallèlement à l'autre axe horizontal ont également une résultante nulle. Ces pressions élémentaires ont donc la même résultante que leurs composantes verticales ; et par conséquent cette résultante de toutes les pressions que le liquide exerce sur la paroi du vase est égale au poids du liquide tout entier, et sa direction passe par le centre de gravité de ce liquide, ce qui était évident *à priori*.

§ 219. **Pressions supportées par un corps solide plongé dans un liquide pesant en équilibre.** — Si un corps solide plonge en totalité ou en partie dans un liquide pesant en équilibre, il éprouve de la part du liquide des pressions dont nous allons chercher la résultante. Il est clair que nous pouvons regarder la surface du solide plongé comme constituant une partie

des parois qui renferment le liquide, et qu'en conséquence nous pouvons lui appliquer ce qui vient d'être dit pour les pressions supportées par ces parois.

Considérons d'abord un solide complètement plongé. Si l'on décompose la pression du liquide sur chacun des éléments de la surface du corps en trois composantes parallèles à un axe vertical et à deux axes horizontaux perpendiculaires l'un à l'autre, on verra que les composantes parallèles à l'un quelconque des deux axes horizontaux ont une résultante nulle ; en sorte que la résultante des composantes verticales sera la résultante de toutes les pressions élémentaires supportées par le corps. Si maintenant on imagine un cylindre vertical circonscrit au corps, la ligne de contact de ce cylindre divisera la surface du corps en deux portions. La résultante des composantes verticales des pressions exercées sur la portion inférieure sera une force verticale dirigée de bas en haut, et égale au poids du liquide qui remplirait le cylindre circonscrit, depuis cette portion inférieure de la surface du corps jusqu'à la surface libre du liquide ; de même la résultante des composantes verticales des pressions supportées par la portion supérieure sera une force verticale, dirigée de haut en bas et égale au poids du liquide qui remplirait le cylindre circonscrit depuis cette portion supérieure de la surface du corps jusqu'à la surface libre du liquide : donc la résultante des composantes verticales des pressions élémentaires supportées par toute la surface du corps, et par conséquent la résultante de ces pressions élémentaires elles-mêmes, est une force verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du liquide dont le corps tient la place et agissant suivant la verticale menée par le centre de gravité de ce liquide. C'est en cela que consiste le fameux *principe d'Archimède*, qu'on énonce ordinairement en disant qu'un corps plongé dans un liquide perd une partie de son poids égale au poids du liquide déplacé.

Si un corps solide ne plonge qu'en partie dans un liquide pesant en équilibre, on arrive de la même manière à trouver la résultante des pressions qu'il éprouve de la part du liquide. On reconnaît ainsi que cette résultante est égale au poids du liquide qui remplirait l'espace occupé par la portion du corps située au-dessous de la surface libre du liquide, et qu'elle agit de bas en haut suivant la verticale menée par le centre de gravité de ce liquide.

§ 220. **Équilibre d'un corps solide plongé dans un liquide pesant ou flottant à sa surface.** — Pour qu'un corps solide, plongé en totalité ou en partie dans un liquide, soit en équilibre sous l'action de la pesanteur et des pressions qu'il éprouve de la part du liquide, il faut que la résultante des actions de la pesanteur sur les diverses molécules du corps soit égale et directement opposée à la résultante des pressions que le liquide exerce sur les diverses parties de la surface de ce corps. On est conduit par là aux deux conditions suivantes : 1° le poids du corps doit être égal au poids du liquide qu'il déplace ; 2° le centre de gravité du corps et celui du liquide déplacé doivent se trouver sur une même verticale. Ces deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour que le corps plongé soit en équilibre, si toutefois ce corps peut être regardé comme étant un solide invariable.

Si le corps que l'on considère est homogène, il ne peut être en équilibre, lorsqu'il est complètement plongé dans un liquide, qu'autant que sa densité est égale à celle du liquide ; cette condition est d'ailleurs suffisante pour que l'équilibre ait lieu, puisque, dans ce cas, le centre de gravité du corps et celui du liquide déplacé coïncident toujours, quelle que soit la position du corps à l'intérieur du liquide. Un corps homogène ne peut être en équilibre, en flottant sur un liquide pesant, qu'autant que sa densité est moindre que celle du liquide.

LIVRE QUATRIÈME

DYNAMIQUE

TROISIÈME PARTIE

DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES MATÉRIELS

CHAPITRE PREMIER

MOUVEMENT D'UN SYSTÈME MATÉRIEL QUELCONQUE.

§ 221. **Théorème de d'Alembert.** — Un système matériel quelconque étant en mouvement sous l'action des forces tant intérieures qu'extérieures qui sont appliquées à ses diverses parties, chacun des points matériels qui le composent (§ 150) se meut conformément à ce qui a été dit dans le Livre II ; l'accélération totale du mouvement de ce point a même direction et même sens que la résultante de toutes les forces qui agissent sur lui, et la grandeur de cette accélération est telle qu'en la multipliant par la masse du point, on obtient un produit égal à la résultante dont il vient d'être question. Reportons-nous maintenant à la définition que nous avons donnée de la force d'inertie (§ 138), et nous verrons que si, à un instant quelconque, on joint la force d'inertie du point matériel dont il s'agit aux forces qui lui sont réellement appliquées, on aura un ensemble de