qui remplirait l'espace occupé par la portion du corps située au-dessous de la surface libre du liquide, et qu'elle agit de bas en haut suivant la verticale menée par le centre de gravité de ce liquide.

§ 220. **Équilibre d'un corps solide plongé dans un liquide pesant ou flottant à sa surface.** — Pour qu'un corps solide, plongé en totalité ou en partie dans un liquide, soit en équilibre sous l'action de la pesanteur et des pressions qu'il éprouve de la part du liquide, il faut que la résultante des actions de la pesanteur sur les diverses molécules du corps soit égale et directement opposée à la résultante des pressions que le liquide exerce sur les diverses parties de la surface de ce corps. On est conduit par là aux deux conditions suivantes : 1° le poids du corps doit être égal au poids du liquide qu'il déplace ; 2° le centre de gravité du corps et celui du liquide déplacé doivent se trouver sur une même verticale. Ces deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour que le corps plongé soit en équilibre, si toutefois ce corps peut être regardé comme étant un solide invariable.

Si le corps que l'on considère est homogène, il ne peut être en équilibre, lorsqu'il est complètement plongé dans un liquide, qu'autant que sa densité est égale à celle du liquide ; cette condition est d'ailleurs suffisante pour que l'équilibre ait lieu, puisque, dans ce cas, le centre de gravité du corps et celui du liquide déplacé coïncident toujours, quelle que soit la position du corps à l'intérieur du liquide. Un corps homogène ne peut être en équilibre, en flottant sur un liquide pesant, qu'autant que sa densité est moindre que celle du liquide.

LIVRE QUATRIÈME

DYNAMIQUE

TROISIÈME PARTIE

DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES MATÉRIELS

CHAPITRE PREMIER

MOUVEMENT D'UN SYSTÈME MATÉRIEL QUELCONQUE.

§ 221. **Théorème de d'Alembert.** — Un système matériel quelconque étant en mouvement sous l'action des forces tant intérieures qu'extérieures qui sont appliquées à ses diverses parties, chacun des points matériels qui le composent (§ 150) se meut conformément à ce qui a été dit dans le Livre II ; l'accélération totale du mouvement de ce point a même direction et même sens que la résultante de toutes les forces qui agissent sur lui, et la grandeur de cette accélération est telle qu'en la multipliant par la masse du point, on obtient un produit égal à la résultante dont il vient d'être question. Reportons-nous maintenant à la définition que nous avons donnée de la force d'inertie (§ 138), et nous verrons que si, à un instant quelconque, on joint la force d'inertie du point matériel dont il s'agit aux forces qui lui sont réellement appliquées, on aura un ensemble de verrons que les équations différentielles du mouvement du point matériel dont il vient d'être question peuvent s'écrire ainsi (§ 121) :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X,$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma Y,$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2}=\Sigma Z.$$

Les signes Σ qui entrent dans les seconds membres indiquent des sommes s'étendant à toutes les forces qui sont appliquées au point matériel considéré. Concevons que nous ayons écrit toutes les équations analogues à celles-là, pour les divers points matériels du système, et que nous ajoutions entre elles toutes celles de ces équations qui se rapportent aux mouvements projetés sur un même axe : nous trouverons ainsi les trois équations suivantes :

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X,$$
$$\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma Y,$$
$$\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}=\Sigma Z,$$

dans lesquelles les signes Σ des premiers membres indiquent des sommes s'étendant à tous les points du système, et ceux des seconds membres, des sommes s'étendant à toutes les forces, sans exception, qui agissent sur les diverses parties de ce système.

Désignons maintenant par M la masse totale du système matériel, et par x_1, y_1, z_1, les coordonnées de son centre de gravité, à un instant quelconque. Nous aurons (§ 163) :

$$Mx_1=\Sigma mx,\qquad My_1=\Sigma my,\qquad Mz_1=\Sigma mz;$$

et, par suite, en différenciant deux fois par rapport au temps t,

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2},\qquad M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2},\qquad M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Au moyen de ces formules, les trois équations que nous venons d'obtenir deviendront

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma X,$$
$$M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma Y,$$
$$M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma Z.$$

Ces trois équations déterminent, comme on le voit, les valeurs des coordonnées x_1, y_1, z_1, du centre de gravité, en fonction du temps. Pour les interpréter, et énoncer le théorème auquel elles correspondent, nous ferons d'abord les remarques suivantes : 1° ces équations ont exactement la forme des équations différentielles du mouvement d'un point matériel de masse M ; 2° les forces intérieures du système disparaissent d'elles-mêmes dans les seconds membres de ces équations, puisque, ces forces étant deux à deux égales et directement opposées, leurs projections sur un axe quelconque sont deux à deux égales et de signes contraires ; 3° les forces extérieures, qui restent seules dans les seconds membres, d'après ce que nous venons de dire, peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque, sans que ces seconds membres soient changés, puisque, par là, les projections de ces forces sur un axe quelconque ne changeront ni de grandeur ni de signe. On peut donc dire que

Le centre de gravité d'un système matériel se meut de la même manière que si toute la masse du système y était concentrée, et que toutes les forces extérieures y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes.

Ce théorème nous montre que, lorsque nous faisons abstraction des dimensions d'un corps, pour le réduire par la pensée à un point matériel (§ 82), c'est à son centre de gravité que nous devons concevoir que toute sa masse est concentrée. Tout ce que nous avons dit sur le mouvement d'un point matériel (Livre II) est immédiatement applicable au mouvement du centre de gravité d'un système matériel.

§ 223. Pour faire bien comprendre la vraie signification et la portée du premier théorème général que nous venons d'établir, nous allons l'appliquer à quelques exemples.

Lorsqu'on lance un corps, suivant une direction quelconque, à la surface de la terre, et qu'ensuite la pesanteur est la seule force extérieure qui agisse sur les diverses molécules de ce corps, son centre de gravité décrit une parabole dans le plan vertical mené par la direction de sa vitesse initiale (§ 122). Supposons que le corps dont il s'agit soit une bombe, et que cette bombe fasse explosion avant qu'elle soit tombée sur le sol; l'explosion étant occasionnée uniquement par le développement de forces intérieures, le mouvement du centre de gravité de la bombe tout entière n'en est pas altéré : ce centre de gravité de l'ensemble de toutes les molécules dont la réunion constituait primitivement la bombe continue, après l'explosion, à parcourir la parabole suivant laquelle il a commencé à se mouvoir. Ce n'est que lorsque quelqu'un des fragments de la bombe vient à rencontrer un corps étranger, que le mouvement du centre de gravité du système se modifie; parce que la réaction éprouvée par ce fragment est une nouvelle force extérieure qui vient se combiner avec la pesanteur, et contribuer avec elle à la production de ce mouvement. Il est clair que ces résultats ne sont vrais qu'approximativement, dans le cas où la bombe se meut dans l'air atmosphérique, en raison de la résistance que l'air oppose au mouvement de la bombe et de ses fragments, résistance qui est une force extérieure, et qui, par conséquent, influe sur le mouvement du centre de gravité.

Si les forces extérieures, transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité, ont une résultante nulle, ou bien, s'il n'y a pas de forces extérieures, le centre de gravité du système est nécessairement immobile, ou animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Ainsi, concevons qu'un être animé, un homme, par exemple, se trouve isolé au milieu de l'espace,

qu'il ne soit soumis à aucune force extérieure, et que son centre de gravité soit immobile; cet être animé ne pourra pas de lui-même mettre son centre de gravité en mouvement, de quelque manière qu'il fasse jouer ses muscles pour déplacer les diverses parties de son corps, parce qu'il ne peut développer ainsi que des forces intérieures qui ne sont pas capables de faire sortir le centre de gravité de son état d'immobilité primitive.

Notre système planétaire étant extrêmement éloigné des étoiles qui l'environnent, on peut regarder les actions que ses diverses parties éprouvent de la part des étoiles comme insensibles. Dès lors ce système n'est soumis qu'à des forces intérieures, et, par conséquent, son centre de gravité doit être immobile ou animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

§ 224. Deuxième théorème général, **ou théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe.** — Si l'on projette le mouvement d'un point matériel sur un axe fixe, on a dans le mouvement projeté (§ 113)

$$mv - mv_0 = \Sigma \int_0^t \mathrm{F}dt,$$

F étant la projection d'une quelconque des forces qui agissent sur le point matériel, et le signe Σ indiquant une somme qui s'étend à toutes les forces auxquelles il est soumis; car la projection de la résultante des forces appliquées à ce point est égale à la somme des projections des forces elles-mêmes, et, par conséquent, l'impulsion élémentaire ou totale de cette résultante projetée est égale à la somme des impulsions élémentaires ou totales des composantes projetées. Si l'on écrit toutes les équations de cette forme, relatives aux projections du mouvement des divers points d'un système matériel sur un même axe fixe, et correspondant à un même intervalle de temps, et qu'ensuite on les ajoute membre à membre, on trouve

$$\Sigma mv - \Sigma mv_0 = \Sigma \int_0^t \mathrm{F}dt.$$

Les signes Σ du premier membre de cette nouvelle équation indiquent des sommes qui s'étendent à tous les points matériels du système; et celui du second membre, une somme qui s'étend à toutes les forces appliquées aux diverses parties de ce système. Les forces intérieures, en projection sur l'axe dont il s'agit, sont deux à deux égales et de signes contraires; les termes correspondant à ces forces se détruisent donc mutuellement dans l'équation qui vient d'être obtenue, de sorte qu'on peut l'écrire en ne mettant dans son second membre que les termes correspondant aux forces extérieures. D'après cela, cette équation, qui constitue notre deuxième théorème général, peut s'énoncer de la manière suivante :

L'accroissement total de la somme des quantités de mouvement du système projetées sur un axe fixe quelconque, pendant un temps aussi quelconque, est égal à la somme des impulsions totales des forces extérieures projetées sur cet axe pendant le même temps.

§ 225. Le recul des bouches à feu s'explique naturellement au moyen de ce théorème. Avant l'inflammation de la poudre, le canon et sa charge forment un système immobile, pour lequel la somme des quantités de mouvement projetées sur l'axe du canon est nulle. Cette somme des quantités de mouvement projetées doit rester constamment nulle, tant qu'il n'y a pas de forces extérieures qui, en projection sur l'axe de la pièce, donnent lieu à une somme d'impulsions différentes de zéro. L'explosion de la poudre ne développant que des forces intérieures, il s'ensuit nécessairement que le canon et le boulet prennent en même temps des mouvements dirigés en sens contraires l'un de l'autre; de telle manière que la somme des quantités de mouvement du système, en projection sur l'axe de la pièce, conserve sa valeur nulle. S'il était permis de négliger la masse de la poudre, ou des matières dans lesquelles elle se transforme par suite de son inflammation, on pourrait dire que le canon et le boulet prennent, au moment de l'explosion, des vitesses de sens contraires, et inversement proportionnelles à leurs masses; mais les choses ne se passent pas tout à fait ainsi, à cause de la masse de la poudre qui n'est pas négligeable par rapport à celle du boulet :

en réalité le recul de la pièce s'effectue avec une vitesse un peu plus grande que celle que l'on trouverait de cette manière.

L'ascension des fusées s'explique d'une manière analogue. L'inflammation progressive de la poudre qui entre dans la composition d'une fusée fait sortir des quantités de matière de plus en plus grandes, par un orifice pratiqué à sa partie inférieure; le corps de la fusée doit donc reculer, c'est-à-dire se mettre en mouvement de bas en haut. L'action de la pesanteur vient, il est vrai, modifier le résultat; mais elle ne fait que diminuer la vitesse de la fusée, en faisant équilibre à une partie de la force verticale qui produit son mouvement de recul de bas en haut.

§ 226. Troisième théorème général, **ou théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe.** — Reprenons le théorème énoncé à la fin du § 114, et observons que : 1° le moment de la projection d'une quantité de mouvement sur un plan fixe par rapport à un point O de ce plan, peut être regardé comme étant le moment de la quantité de mouvement elle-même par rapport à la droite qui se projette en ce point O (§ 103); 2° de même le moment de l'impulsion élémentaire de la projection d'une force sur le plan fixe, par rapport au point O, peut être regardé comme étant le moment de l'impulsion élémentaire de la force par rapport à la même droite qui se projette en O; 3° enfin, si plusieurs forces sont appliquées à un même point, le moment de chaque impulsion élémentaire de la résultante de ces forces, par rapport à un axe fixe, est égal à la somme des moments des impulsions élémentaires correspondantes des forces composantes, par rapport au même axe (§ 103). D'après cela le théorème dont il s'agit peut s'énoncer autrement, de la manière suivante : lorsqu'un point matériel se meut dans l'espace sous l'action des diverses forces, l'accroissement total qu'éprouve le moment de la quantité de mouvement du point, par rapport à un axe fixe quelconque, et pendant un temps aussi quelconque, est égal à la somme des moments, par rapport à cet axe, des impulsions élémentaires des forces auxquelles il est soumis, correspondant aux divers éléments dont ce temps se compose.

Concevons maintenant que l'on écrive les équations analogues à celle qui résulte de cet énoncé, pour tous les points matériels qui font partie d'un système en mouvement, en considérant un même intervalle de temps pour tous ces points, et prenant les moments des quantités de mouvement et des impulsions par rapport à un même axe fixe. Si l'on ajoute entre elles toutes les équations ainsi obtenues, et que l'on observe que les moments des impulsions élémentaires des forces intérieures se détruiront mutuellement dans la somme, comme étant deux à deux égaux et de signes contraires, on trouvera une équation unique, qui peut s'énoncer ainsi :

L'accroissement total de la somme des moments des quantités de mouvement du système par rapport à un axe fixe quelconque, pendant un temps aussi quelconque, est égal à la somme des moments, par rapport à cet axe, de toutes les impulsions élémentaires des forces extérieures, correspondant aux divers éléments dont ce temps se compose.

C'est en cela que consiste notre troisième théorème général.

§227. **Théorème des aires.** — Supposons que les forces extérieures appliquées aux diverses parties d'un système matériel en mouvement satisfassent à cette condition que la somme de leurs moments, par rapport à un certain axe fixe, soit constamment nulle. La somme des moments des impulsions élémentaires de ces forces, correspondant à un élément de temps quelconque dt, par rapport à l'axe dont il s'agit, s'obtient en multipliant par dt la somme des moments des forces par rapport à cet axe, les forces étant prises avec les grandeurs et les directions qu'elles ont au commencement du temps dt; cette somme des moments des impulsions élémentaires des forces extérieures est donc nulle, pour chaque élément de temps, en vertu de l'hypothèse que nous faisons. Il en résulte que l'accroissement total de la somme des moments des quantités de mouvement du système, par rapport à l'axe fixe que l'on considère, pendant un temps quelconque, est égal à zéro ; ou, en d'autres termes, la somme des moments des quantités de mouvement du système, par rapport à cet axe, conserve constamment la même valeur.

Ce théorème, auquel nous venons de parvenir, peut être énoncé autrement. Imaginons, pour cela, que nous projetions le système en mouvement sur un plan perpendiculaire à l'axe fixe, et soit O le point où l'axe lui-même se projette sur ce plan. La somme des moments des quantités de mouvement du système, par rapport à l'axe, n'est autre chose que la somme des moments des quantités de mouvement projetées sur le plan par rapport au point O ; on peut donc dire que cette dernière somme conserve constamment la même valeur. Mais si v est la vitesse projetée d'un point matériel de masse m, et si p est la distance du point O à la direction de cette vitesse, le moment mvp de la quantité du mouvement projetée de ce point matériel peut s'écrire

$$m \times \tfrac{1}{2}\, vdt.p \times \frac{1}{dt};$$

le théorème dont nous nous occupons consistant en ce que la somme des moments des quantités de mouvement projetées Σmvp, est toujours égale à une même quantité C, on en conclut

$$\Sigma m \times \tfrac{1}{2}\, vdt.p = \frac{Cdt}{2},$$

et, par suite, en intégrant par rapport à t,

$$\Sigma m \int_0^t \tfrac{1}{2}\, vdt.p = \frac{Ct}{2}.$$

Il résulte de cette équation et de la signification géométrique de la quantité $\frac{1}{2}\, vdt.p$ (115), que le théorème dont il s'agit peut être énoncé en disant que : la somme des produits des masses des différents points matériels du système, par les aires que décrivent, pendant un temps quelconque t, les rayons vecteurs menés du point O aux projections de ces points matériels, est proportionnelle au temps t. C'est en cela que consiste le *théorème des aires*, qui a lieu pour la projection du mouvement d'un système matériel quelconque sur un plan, et par rapport à un point O de ce plan, toutes les fois que la somme des moments des forces extérieures, par rapport à l'axe qui se projette en O, est égale à zéro.

L'énoncé de ce théorème des aires se simplifierait, si les masses des divers points matériels du système étaient toutes égales entre elles. On pourrait, en effet, supprimer la masse de chaque point, qui serait un facteur commun à tous les termes de la somme, et le théorème consisterait en ce que la somme des aires décrites, pendant un temps quelconque t, par les rayons vecteurs menés du point O aux projections des divers points matériels, serait proportionnelle au temps t. Pour profiter de cette simplification de l'énoncé, dans le cas général où les masses $m, m', m'', \ldots$ des différents points matériels sont inégales, on conçoit qu'on prenne une petite masse μ qui soit contenue un nombre exact de fois dans chacune des masses $m, m', m'', \ldots\ldots$, de telle sorte qu'on ait

$$m = n\mu, \qquad m' = n'\mu \qquad m'' = n''\mu \ldots,$$

$n, n', n'', \ldots\ldots$ étant des nombres entiers. Ensuite on imagine que le point matériel de masse m soit remplacé par n points matériels de masse μ, coïncidant constamment les uns avec les autres; que le point matériel de masse m' soit remplacé par n' points matériels de masse μ, coïncidant également ensemble, et ainsi de suite : on n'a plus dès lors que des points matériels ayant tous une même masse μ, et, par conséquent, on peut supprimer cette masse commune de l'énoncé, comme nous l'avons indiqué plus haut.

D'après cela, le théorème des aires pourra toujours s'énoncer de la manière suivante : *Si la somme des moments des forces extérieures appliquées à un système matériel en mouvement par rapport à un certain axe fixe, est constamment nulle, la somme des aires décrites, pendant un temps quelconque, par les rayons vecteurs qui joignent le pied de l'axe sur un plan perpendiculaire à sa direction aux projections des divers points matériels du système sur ce plan, est proportionnelle au temps dont il s'agit.* C'est habituellement sous cette forme que nous considérons l'énoncé du théorème

des aires; mais nous devrons nous rappeler que, en réalité, au lieu de la somme d'aires qui y entre, il faut toujours prendre la somme des produits des aires qui correspondent aux divers points matériels du système par les masses de ces points matériels.

Pour reconnaître si la somme des moments des forces extérieures appliquées à un système matériel, par rapport à un certain axe, est égale à zéro, il suffit d'opérer sur ces forces comme si elles agissaient sur un solide invariable, et de chercher à les réduire à deux forces, dont l'une ait son point d'application sur l'axe même : le moment de la seconde de ces deux forces, par rapport à l'axe, est égal à la somme des moments des forces données, par rapport au même axe, et, par conséquent, pour que cette somme de moments soit nulle, il faut que la seconde force dont il s'agit rencontre l'axe, ou lui soit parallèle.

§ 228. Considérons, en particulier, le cas où les forces extérieures, composées entre elles comme si elles agissaient sur un solide invariable, ont une résultante unique, passant constamment par un même point O de l'espace. Si l'on fait passer une droite quelconque par le point O, la somme des moments des forces extérieures par rapport à cette droite sera nulle; le théorème des aires sera donc applicable à la projection du mouvement du système sur un plan quelconque, mené par le point O, en prenant ce point pour origine des rayons vecteurs aboutissant aux projections des divers points du système. Cette existence du théorème des aires, pour tous les plans qu'on peut faire passer par le point O, peut être énoncé d'une manière très simple, à l'aide des considérations suivantes.

Un système quelconque étant en mouvement, concevons que nous joignions les divers points qui le composent à un même point fixe O de l'espace par des lignes droites, et que nous déterminions les aires élémentaires décrites simultanément par ces rayons vecteurs, dans l'espace, pendant un élément quelconque du temps; les projections de ces aires élémentaires sur un plan quelconque mené par le point O seront précisément les aires décrites dans le même temps par les rayons vecteurs menés du point O aux projections des points du système sur ce plan. Cela posé, rapportons le système à trois axes coordonnés rectangulaires ayant le point O pour origine, et projetons sur les plans coordonnés les aires élémentaires décrites dans l'espace par les rayons vecteurs qui joignent le point O aux différents points du système. Si ω, ω', ω'' sont les trois projections d'une de ces aires élémentaires, la projection de cette même aire élémentaire sur un plan P faisant des angles α, β, γ avec les plans coordonnés, aura, comme on sait, pour valeur :

$$\omega \cos\alpha + \omega' \cos\beta + \omega'' \cos\gamma.$$

La somme des projections des aires élémentaires correspondant à tous les points du système, sur ce même plan P, sera donc égale à

$$\Sigma(\omega \cos\alpha + \omega' \cos\beta + \omega'' \cos\gamma),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\cos\alpha \,.\, \Sigma\omega + \cos\beta \,.\, \Sigma\omega' + \cos\gamma \,.\, \Sigma\omega''.$$

Soit Ω une aire plane dont les projections sur les trois plans coordonnés aient pour valeur $\Sigma\omega$, $\Sigma\omega'$, $\Sigma\omega''$. Si nous désignons par A, B, C les angles que le plan de cette aire fait avec ces trois plans coordonnés, nous aurons

$$\Sigma\omega = \Omega \cos A, \qquad \Sigma\omega' = \Omega \cos B, \qquad \Sigma\omega'' = \Omega \cos C,$$

et par suite la somme des projections des aires élémentaires de l'espace sur un plan P sera égale à

$$\Omega(\cos A \cos\alpha + \cos B \cos\beta + \cos C \cos\gamma).$$

La quantité entre parenthèses n'étant autre chose que le cosinus de l'angle compris entre le plan P et le plan de Ω, il en résulte que la somme des projections des aires élémentaires de l'espace sur le plan P est égale à la projection de l'aire Ω elle-même sur ce plan P. On voit, d'après cela, comment varie la somme des projections des aires élémentaires décrites par les rayons vecteurs qui joignent le point fixe O aux divers points d'un système, suivant qu'on projette ces aires sur tel ou tel plan mené par le point O : la somme des aires projetées est un maximum lorsqu'on prend le plan de Ω pour plan de projection ; elle diminue à mesure que l'angle aigu compris entre le plan de projection et le plan de Ω va en augmentant ; elle est nulle lorsque le plan de projection est perpendiculaire au plan de Ω. Ce plan de l'aire Ω se nomme, pour cette raison, *plan du maximum des aires*. Nous allons nous servir de la notion du plan du maximum des aires pour énoncer autrement le résultat auquel nous sommes parvenus au commencement de ce paragraphe ; mais nous ne devrons pas oublier que ce plan existe indépendamment du théorème des aires : quel que soit le système en mouvement que l'on considère, quel que soit le point de l'espace d'où l'on mène des rayons vecteurs aux différents points de ce système, et quel que soit l'élément de temps pendant lequel on considère les aires décrites dans l'espace par ces rayons vecteurs, il y a toujours un plan passant par l'origine des rayons vecteurs qui jouit de la propriété du plan du maximum des aires. Il est aisé de voir, d'ailleurs, que ce plan n'est autre chose que le plan du moment résultant des quantités de mouvement par rapport au point d'où l'on fait partir les rayons vecteurs, les quantités de mouvement étant traitées comme des forces qui agiraient sur un solide invariable (§ 161).

Revenons maintenant à la question qui fait l'objet spécial de ce paragraphe. Nous avons dit que, dans le cas où les forces extérieures d'un système matériel, composées entre elles comme si elles agissaient sur un solide invariable, ont une résultante unique passant constamment par un même point O de l'espace, le théorème des aires est applicable à la projection du mouvement du système sur un plan quelconque mené par le point O, en prenant ce point pour origine des rayons vecteurs aboutissant aux projections des divers points du système. Il s'ensuit que, si l'on considère les aires décrites dans l'espace et pendant un élément quelconque dt du temps, par les rayons vecteurs qui joignent le point O aux divers points matériels de même masse dont on conçoit que le système soit composé (§ 227), et que l'on projette ces aires élémentaires sur trois plans coordonnés rectangulaires menés par le point O, les sommes

$$\Sigma\omega, \quad \Sigma\omega', \quad \Sigma\omega'',$$

des projections ainsi obtenues, sur chacun de ses trois plans, conserveront constamment les mêmes valeurs pendant les divers éléments de temps égaux à dt qui se succèdent : donc l'aire plane Ω, dont les projections sur les trois plans coordonnés sont respectivement égales à

$$\Sigma\omega, \quad \Sigma\omega', \quad \Sigma\omega'',$$

conservera aussi toujours la même valeur, et les angles A, B, C, que le plan de Ω fait avec ces plans coordonnés, ne changeront pas. On peut donc dire que, dans l'hypothèse que nous adoptons, le plan du maximum des aires du système, relatif au point O, conserve une direction invariable dans l'espace ; et que, en outre, la somme des aires décrites, en projection sur ce plan, par les rayons vecteurs qui émanent du point O, est proportionnelle au temps employé à les décrire.

Ce que nous venons de dire pour un point particulier O de l'espace, par lequel nous avons supposé que passait constamment la résultante des forces extérieures composées comme si elles agissaient sur un solide invariable, pourra se dire pour un point quelconque de l'espace, lorsque cette résultante des forces extérieures sera nulle, c'est-à-dire lorsque ces forces satisferont aux six conditions d'équilibre des forces appliquées à un solide invariable (§ 178).

§ 229. Donnons quelques exemples de l'application du théorème des aires.

Si nous supposons, comme nous l'avons déjà fait (§ 223), qu'un être animé soit isolé au milieu de l'espace, qu'aucune force extérieure ne lui soit appliquée, et qu'il soit primitivement immobile, non seulement cet être animé ne pourra pas déplacer son centre de gravité, mais encore il ne lui sera pas possible de se donner un mouvement de rotation autour de ce point. En

effet, de quelque manière qu'il fasse jouer ses muscles, il ne peut développer que des forces intérieures ; l'absence de toute force extérieure entraîne donc comme conséquence que la somme des aires décrites, en projection sur un plan quelconque passant par son centre de gravité, par les rayons vecteurs émanés de ce point, conserve constamment la même valeur : donc cette somme d'aires doit rester constamment nulle, puisqu'elle l'était tout d'abord en vertu de l'hypothèse que nous faisons que l'être animé dont il s'agit était primitivement immobile. Ainsi, lorsqu'il fait mouvoir certaines parties de son corps de telle manière que la somme des aires qui leur correspondent, en projection sur un certain plan, ait une valeur positive, il y a nécessairement d'autres parties du corps qui se meuvent en même temps dans un autre sens, de manière à fournir une somme d'aires négative sur le même plan, afin que la somme totale des aires relative à toutes les parties du corps soit égale à zéro. S'il s'agit d'un homme, par exemple, et qu'il tourne sa tête à droite, le reste de son corps tournera nécessairement vers la gauche ; s'il porte une jambe en avant, comme pour marcher, le reste de son corps s'inclinera en sens contraire, c'est-à-dire que la tête se portera également en avant et le milieu du corps en arrière.

Lorsqu'un homme est debout sur le sol, et que, primitivement en repos dans cette position, il commence à marcher devant lui, il fait passer son centre de gravité de l'état de repos à l'état de mouvement. Cherchons à nous rendre compte de ce qui se passe dans ce cas, où le résultat paraît en contradiction avec les théorèmes que nous avons établis. Pendant que cet homme est en repos, il est soumis à des forces extérieures qui sont, d'une part, l'action de la pesanteur sur les diverses molécules de son corps, d'une autre part, les pressions qu'il éprouve de la part du sol aux différents points par lesquels il le touche : ces forces extérieures se font équilibre. Lorsque l'homme veut commencer à marcher, et qu'il porte une jambe en avant, il ne développe en lui que des forces intérieures qui ne peuvent pas déplacer son centre de gravité. Mais, en vertu du théorème des aires, et conformément à ce que nous avons dit, il n'y a qu'un instant, en forces qui se feront équilibre : puisque la force d'inertie, que l'on joint aux forces réelles, est égale et directement opposée à la résultante de ces forces réelles. D'après cela, si, à un instant quelconque, on joint les forces d'inertie des différents points d'un système matériel en mouvement aux diverses forces qui agissent réellement sur ces points, on obtiendra un système total de forces qui se feront équilibre sur le système, puisqu'il y aura équilibre entre les forces appliquées à chacun des points matériels dont le système se compose.

Il est aisé de reconnaître en outre qu'il suffit d'exprimer l'équilibre dont il vient d'être question, pour en conclure toutes les circonstances du mouvement du système. En effet, dire que les forces qui agissent réellement sur le système matériel, jointes aux forces d'inertie de ses différents points, se font équilibre à chaque instant sur ce système, c'est dire que cet équilibre a lieu pour un quelconque des points matériels dont le système se compose ; c'est donc dire que, pour chacun de ces points, et à chaque instant, la force d'inertie est égale et directement opposée à la résultante des forces qui agissent réellement sur ce point ; ou, en d'autres termes, c'est dire que l'accélération totale du mouvement d'un point quelconque du système est précisément celle que cette résultante des forces réellement appliquées au point est capable de lui communiquer. Exprimer qu'il y a équilibre, à chaque instant, entre les forces qui agissent sur les différents points matériels du système et les forces d'inertie de ces points, ou bien écrire les équations différentielles du mouvement de ces divers points matériels du système, ce sont deux choses équivalentes. Tel est le fameux théorème dû à d'Alembert, au moyen duquel toute question de mouvement se ramène immédiatement à une question d'équilibre.

Le théorème de d'Alembert ne présente pas d'utilité réelle, tant que le système matériel dont on s'occupe n'est qu'un assemblage de points matériels isolés pouvant se mouvoir d'une manière quelconque, les uns par rapport aux autres, sous l'action des forces qui lui sont appliquées ; puisque, pour exprimer l'équilibre des forces réelles jointes aux forces d'inertie,

il faut exprimer que cet équilibre a lieu pour chacun des points matériels du système, et que, par conséquent, il est tout aussi simple d'écrire immédiatement les équations différentielles du mouvement de chacun de ses poinst. Mais il n'en est plus de même lorsqu'il s'agit d'un système matériel dans lequel on imagine des liaisons (§ 186). Dans ce cas, le théorème de d'Alembert, en ramenant la question du mouvement du système à une question d'équilibre entre les forces qui lui sont réellement appliquées et les forces d'inertie de ses différents points, permet de profiter des simplifications que les liaisons introduisent dans l'ensemble des équations d'équilibre des forces appliquées à un système matériel. Ainsi, pour en donner un exemple, les équations d'équilibre des forces appliquées à un solide invariable se réduisant à six (§§ 182 et 178), le théorème de d'Alembert conduit immédiatement à six équations qui suffisent pour faire connaître le mouvement d'un pareil corps.

§ 222. Premier théorème général, **ou théorème du mouvement du centre de gravité.** — Le théorème de d'Alembert ne fait connaître aucune propriété du mouvement du système matériel auquel on l'applique ; il ne fait que fournir une méthode particulière pour écrire les équations différentielles du mouvement du système, équations que l'on pourrait d'ailleurs écrire directement, sans avoir recours à ce théorème. Il n'en est pas de même des *théorèmes généraux*, dont nous allons nous occuper ; chacun de ces théorèmes, qui sont au nombre de quatre, fait connaître une propriété du mouvement. Nous commencerons par celui qui se rapporte au mouvement du centre de gravité du système.

Désignons par m la masse d'un quelconque des points matériels du système ; par x, y, z les coordonnées de ce point rapportées à trois axes rectangulaires ; et par X, Y, Z les forces parallèles aux axes, dans lesquelles se décompose une quelconque des forces appliquées à ce point matériel. Si nous observons que la projection de la résultante de plusieurs forces appliquées à un point, sur un axe quelconque, est égale à la somme des projections des composantes sur le même axe, nous