CHAPITRE II

MOUVEMENT D'UN SOLIDE INVARIABLE.

§ 238. **Théorie des moments d'inertie.** — Si l'on multiplie la masse m d'un quelconque des points matériels qui composent un solide invariable par le carré de la distance r de ce point à une droite quelconque D, et qu'on ajoute tous les produits ainsi obtenus pour les divers points du solide, on trouve une somme Σmr^2 qui joue un rôle très important dans le mouvement d'un pareil solide, ainsi que nous le verrons bientôt. On donne à cette quantité le nom de *moment d'inertie* du solide par rapport à la droite D.

Le moment d'inertie Σmr^2 d'un solide par rapport à une droite D étant calculé, supposons que l'on détermine une ligne k par la condition que l'on ait

$$\Sigma mr^2 = \mathrm{M}k^2,$$

M étant la masse du solide tout entier : cette ligne k est ce qu'on nomme le *rayon de giration* du solide par rapport à la droite D. Il est aisé de voir que ce n'est autre chose que le rayon d'une surface cylindrique de révolution, qui aurait la droite D pour axe, et sur laquelle on pourrait répartir la masse tout entière du solide sans que son moment d'inertie par rapport à cette droite D changeât de valeur.

Pour calculer la valeur du moment d'inertie d'un solide invariable par rapport à une droite donnée, concevons que nous

rapportions le solide à trois axes coordonnés rectangulaires, dont l'un, l'axe des x, coïncide avec la droite dont il s'agit ; et que nous le décomposions en éléments rectangulaires, comme nous l'avons déjà fait pour la recherche du centre de gravité (§ 164). Si nous désignons par ρ la masse spécifique du solide au point dont les coordonnées sont x, y, z, nous aurons $\rho dxdydz$ pour la masse d'un élément situé en ce point ; d'un autre côté, le carré de la distance de ce point à l'axe des x est égal à y^2+z^2 ; de sorte que le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe a pour valeur

$$\iiint \rho(y^2+z^2)\,dxdydz,$$

l'intégrale triple s'étendant à tous les éléments dont le solide se compose. On pourra souvent simplifier la détermination de cette intégrale, en remarquant qu'elle est la somme des deux suivantes :

$$\iiint \rho y^2 dxdydz, \qquad \iiint \rho z^2 dxdydz.$$

La masse totale du solide a de même pour valeur

$$\iiint \rho dxdyxz ;$$

on en conclut que le rayon de giration k sera donné par la formule

$$k^2 = \frac{\iiint \rho(y^2+z^2)\,dxdydz}{\iiint \rho dxdydz}.$$

On peut observer que, si le solide est homogène, ρ est une constante qu'on peut supprimer comme facteur commun aux deux termes de la valeur de k^2 ; ce qui montre que, dans ce cas, le rayon de giration ne dépend que de la forme qu'affecte le solide, et est entièrement indépendant de sa densité.

Voici quelques résultats auxquels on parvient facilement en suivant la marche qui vient d'être indiquée. Ils se rapportent exclusivement à des solides homogènes.

1° *Cylindre droit à base circulaire.* — Le rayon de giration k d'un cylindre droit à base circulaire de rayon R par rapport à l'axe de figure de ce cylindre, est donné par la formule

$$k^2 = \tfrac{1}{2}R^2.$$

2° *Couche cylindrique de révolution.* — Pour une couche cylindrique de révolution dont les rayons intérieur et extérieur sont R et R', on a, pour déterminer le rayon de giration relatif à l'axe de figure,

$$k^2 = \tfrac{1}{2}(R^2 + R'^2).$$

Si l'on nomme R_1 le rayon moyen de cette couche, et e son épaisseur, on peut remplacer la formule qui précède par celle-ci :

$$k^2 = R_1^2 + \tfrac{1}{4}e^2.$$

3° *Sphère.* — Le rayon de giration d'une sphère de rayon R, par rapport à un de ses diamètres, est fourni par la relation

$$k^2 = \tfrac{2}{5}R^2.$$

4° *Parallélipipède rectangle.* — Dans le cas d'un parallélipipède rectangle dont les trois arêtes sont a, b, c, si l'on détermine le rayon de giration par rapport à une parallèle aux arêtes a menée par le centre du solide, on trouve

$$k^2 = \tfrac{1}{12}(b^2 + c^2).$$

Après avoir défini le moment d'inertie d'un solide par rapport à une droite, ainsi que le rayon de giration qui en dépend, et avoir indiqué la marche à suivre pour en déterminer les valeurs, nous allons nous occuper de comparer entre eux les moments d'inertie d'un même solide par rapport aux diverses droites qu'on peut imaginer dans l'espace.

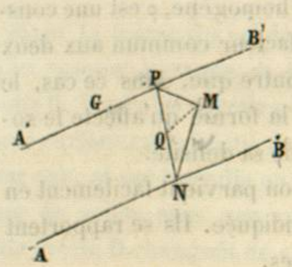

Fig. 113.

§ 239. Prenons d'abord deux droites parallèles AB, A'B',

fig. 113, dont l'une A'B' passe par le centre de gravité G du solide. Soit M un point quelconque du solide, situé à des distances $MN = r$, et $MP = r'$ de ces deux droites. Si nous désignons par a la distance NP des deux droites, et par z la distance PQ du point P au pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur PN, nous aurons

$$r^2 = a^2 + r'^2 - 2az.$$

Multiplions tous les termes par la masse m du point M, et ajoutons ensuite membre à membre toutes les équations de même forme relatives aux différents points matériels dont le solide est composé : nous trouverons ainsi

$$\Sigma mr^2 = \Sigma ma^2 + \Sigma mr'^2 - 2\Sigma maz.$$

Mais a est une constante qui peut être mise en dehors du signe Σ; d'ailleurs z étant évidemment la distance du point M à un plan mené par A'B' perpendiculairement au plan ABA'B', on a

$$\Sigma mz = 0,$$

puisque le centre de gravité G est situé dans le plan dont il s'agit (§ 163) : donc, si l'on désigne par M la masse totale Σm du solide, la relation précédente se réduit à

$$\Sigma mr^2 = Ma^2 + \Sigma mr'^2.$$

Ainsi le moment d'inertie du solide par rapport à la droite AB, est égal au moment d'inertie du même solide par rapport à une parallèle à AB menée par son centre de gravité, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance de son centre de gravité à la droite AB. On voit par là que la connaissance du moment d'inertie du solide, par rapport à une droite menée par son centre de gravité, suffit pour qu'on puisse en déduire immédiatement le moment d'inertie de ce solide par rapport à une droite quelconque parallèle à la première.

§ 240. Comparons maintenant les moments d'inertie du solide par rapport aux diverses droites qui passent par un même point

O de l'espace. Nous ferons passer par ce point O, *fig.* 114, trois axes rectangulaires OX, OY, OZ. Soit OA la droite par rapport à laquelle nous allons prendre le moment d'inertie du solide ; désignons par α, β, γ les angles que cette droite fait avec les axes OX, OY, OZ. Pour un point quelconque M dont les coordonnées sont x, y, z, et dont la projection sur la droite OA est en P, on a

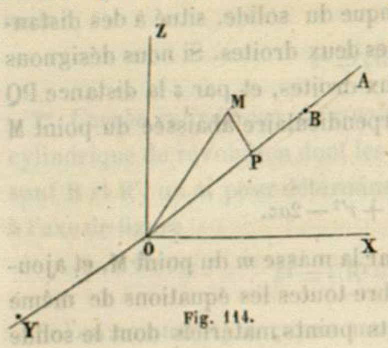

Fig. 114.

$$\mathrm{MP}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{OP}^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} x^2 (1 - \cos^2 \alpha) + y^2 (1 - \cos \beta) + z^2 (1 - \cos^2 \gamma) \\ - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma \end{array} \right\}.$$

Si l'on observe qu'on a

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

on verra que les trois quantités

$$1 - \cos^2 \alpha, \qquad 1 - \cos^2 \beta, \qquad 1 - \cos^2 \gamma,$$

peuvent être remplacées respectivement par

$$\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma, \qquad \cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma, \qquad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta.$$

En faisant cette substitution, et groupant ensuite les termes convenablement, on trouve

$$\mathrm{MP}^2 = \left\{ \begin{array}{l} (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (x^2 + z^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma \\ - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta \end{array} \right\}.$$

Multiplions tous les termes de cette équation par la masse m du point M, puis ajoutons membre à membre toutes les équations analogues relatives aux différents points matériels du solide : nous aurons ainsi la valeur du moment d'inertie Σmr^2 du solide par rapport à la droite OA, valeur qui peut s'écrire de cette manière :

$$\Sigma mr^2 = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A} \cos \alpha + \mathrm{B} \cos^2 \beta + \mathrm{C} \cos^2 \gamma \\ - 2\mathrm{D} \cos \beta \cos \gamma - 2\mathrm{E} \cos \alpha \cos \gamma - 2\mathrm{F} \cos \alpha \cos \gamma \end{array} \right\},$$

en posant

$$\Sigma m (y^2 + z^2) = \mathrm{A}, \qquad \Sigma m (x^2 + z^2) = \mathrm{B}, \qquad \Sigma m (x^2 + y^2) = \mathrm{C},$$
$$\Sigma myz = \mathrm{D}. \qquad \Sigma mxz = \mathrm{E}, \qquad \Sigma mxy = \mathrm{F}.$$

Il est aisé de reconnaître que les lettres A, B, C désignent respectivement les moments d'inertie du solide par rapport aux axes OX, OY, OZ. Pour voir comment varie le moment d'inertie Σmr^2 relatif à la droite OA, lorsque cette droite prend successivement diverses positions autour du point O, portons sur sa direction, et à partir du point O, une longueur OB égale à $\dfrac{1}{\sqrt{\Sigma mr^2}}$; nous allons chercher le lieu géométrique du point B ainsi obtenu. Si nous désignons par X, Y, Z les coordonnées de ce point B, nous aurons

$$\cos \alpha = \mathrm{X} \sqrt{\Sigma mr^2}, \qquad \cos \beta = \mathrm{Y} \sqrt{\Sigma mr^2}, \qquad \cos \gamma = \mathrm{Z} \sqrt{\Sigma mr^2}.$$

En substituant ces valeurs de $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ dans l'expression du moment d'inertie, et supprimant Σm^2 qui est facteur commun, il vient :

$$1 = \mathrm{AX}^2 + \mathrm{BY}^2 + \mathrm{CZ}^2 - 2\mathrm{DYZ} - 2\mathrm{EXZ} - 2\mathrm{FXY}.$$

C'est l'équation de la surface qui renferme tous les points tels que B. Cette surface est du second ordre, et a le point O pour centre : d'ailleurs, le moment d'inertie Σm^2 ne pouvant être nul pour aucune droite menée par le point O, le rayon vecteur OB ne peut pas devenir infini : donc c'est un ellipsoïde. Ce résultat très simple nous donne une image nette des rapports de grandeur qui existent entre les moments d'inertie du solide relatifs aux diverses droites menées par un même point de l'espace.

Les axes de l'ellipsoïde auquel nous venons de parvenir sont ce qu'on nomme les *axes principaux* du solide relativement au point O. Si on les prend pour axes cordonnés, l'équation de l'ellipsoïde se simplifie et se réduit à

$$1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2;$$

c'est-à-dire que, pour ce système particulier d'axes cordonnés, les quantités que nous avons désignées par les lettres D, E, F sont nulles. La valeur de Σmr^2 relative à l'axe OA devient dans ce cas

$$\Sigma mr^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2 6 + C\cos^2\gamma;$$

et les moments d'inertie que représentent les lettres A, B, C, prennent le nom de *moments d'inertie principaux* du solide relatifs au point O.

On voit que les axes principaux que nous venons de définir sont caractérisés par les trois relations

$$\Sigma myz = 0, \qquad \Sigma mxz = 0, \qquad \Sigma mxy = 0,$$

qui ont lieu lorsqu'on prend ces trois axes pour axes coordonnés. Si l'on considère seulement deux de ces trois relations, les deux dernières par exemple, elles expriment que l'équation de l'ellipsoïde ne contient pas la variable X au premier degré; il s'ensuit évidemment que ces deux relations prises ensemble constituent les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'axe des x soit un axe principal du solide relatif au point O.

A chaque point de l'espace correspond un ellipsoïde tel que celui que nous venons de trouver, et qui donne la loi des moments d'inertie du solide considéré par rapport aux divers axes menés par ce point. Celui de ces ellipoïdes qui correspond au centre de gravité du solide est spécialement désigné sous le nom d'*ellipsoïde central*.

Il peut arriver que l'ellipsoïde correspondant à un point soit de révolution; alors les moments d'inertie relatifs à toutes les droites menées par son centre, perpendiculairement à son axe de révolution, sont égaux entre eux : toutes ces droites sont des axes principaux du solide. Si l'ellipsoïde devient une sphère, une droite quelconque menée par le point auquel il se rapporte est un axe principal du solide.

Un axe principal relatif au centre de gravité du solide jouit

de la propriété d'être en même temps axe principal du solide pour un quelconque de ses points. En effet, si l'on rapporte le solide à trois axes coordonnés rectangulaires menés par son centre de gravité, en prenant la droite dont il s'agit pour axe des x, on aura

$$\Sigma mxy = 0, \qquad \Sigma mxz = 0,$$

puisque cette droite est par hypothèse un axe principal du solide par rapport à son centre de gravité. Concevons maintenant que l'on transporte les axes des y et des z, parallèlement à eux-mêmes, en un point situé sur l'axe des x à une distance a de l'origine; on passera des coordonnées relatives aux axes primitifs à celles qui se rapportent aux nouveaux axes en changeant simplement x en $a + x'$. Les deux relations précédentes deviendront donc

$$\Sigma my(a + x') = 0, \qquad \Sigma mz(a + x') = 0;$$

et il est aisé de voir qu'elles se réduisent à

$$\Sigma mx'y = 0, \qquad \Sigma mx'z = 0,$$

car, par une propriété connue du centre de gravité, on a

$$\Sigma my = 0, \qquad \Sigma mz = 0.$$

On voit donc que l'axe des x est un axe principal du solide, par rapport à la nouvelle origine des coordonnées, quelle que soit la distance a de cette nouvelle origine à l'ancienne : c'est ce que nous nous proposions de démontrer. On peut reconnaître facilement d'ailleurs, par des considérations analogues aux précédentes, qu'il n'y a que les axes principaux relatifs au centre de gravité du solide qui jouissent de la propriété dont il s'agit : une droite ne peut être un axe principal du solide relativement à deux de ces points, qu'autant qu'elle passe par le centre de gravité du solide.

Nous avons eu à considérer précédemment le moment d'inertie d'une surface plane, par rapport à une droite tracée dans son plan (§ 197). Ce moment d'inertie rentre évidemment dans ceux que nous venons d'étudier ici ; et il est aisé de voir comment on peut lui appliquer le divers théorèmes que nous avons établis relativement aux moments d'inertie des solides.

§ 241. **Mouvement d'un solide invariable entièrement libre.** — Pour trouver les équations différentielles du mouvement d'un solide invariable entièrement libre, nous pouvons nous servir du théorème de d'Alembert (§ 221). Nous savons par ce théorème que les équations dont il s'agit s'obtiendront en exprimant que les forces appliquées au solide, jointes aux forces d'inertie de ses différents points, satisfont aux six équations (a) du § 177. Le solide étant rapporté à trois axes coordonnés rectangulaires fixes, désignons par X, Y, Z les composantes, suivant les axes, d'une quelconque des forces qui lui sont appliquées. D'un autre côté, les composantes de la force d'inertie d'un point de masse m dont les coordonnées sont x, y, z, ont évidemment pour valeurs

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

En exprimant que toutes ces forces réelles et d'inertie satisfont aux équations (a) du § 177, on trouve facilement les équations suivantes :

$$\begin{gathered}
\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X,\\
\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y,\\
\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z,\\
\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(Zy - Yz),\\
\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(Xz - Zx),\\
\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(Yx - Xy).
\end{gathered}$$

Telles sont les équations différentielles du mouvement d'un solide invariable entièrement libre. Les signes Σ des premiers membres indiquent des sommes s'étendant à tous les points matériels dont le solide est formé ; quant à ceux des seconds membres, ils indiquent des sommes qui s'étendent à toutes les forces appliquées au solide.

Nous pouvons tirer immédiatement de ces équations une conséquence importante. Nous avons vu qu'un système de forces appliquées à un solide invariable en équilibre peut être remplacé par un autre système de forces, sans que l'équilibre soit troublé, pourvu que ce second système satisfasse aux six conditions établies dans le § 180 : dans ce cas, les deux systèmes de forces sont dits *équivalents* l'un à l'autre. Si l'on considère la forme des équations différentielles que nous venons de trouver, ainsi que celles des conditions d'équivalence dont il vient d'être question, on en conclura que le système des forces appliquées à un solide invariable en mouvement peut être remplacé par tout autre système de forces qui lui soit équivalent, sans que le mouvement du solide soit changé. Deux systèmes de forces, qui peuvent être remplacés l'un par l'autre pour agir sur un solide en repos, peuvent donc aussi se remplacer mutuellement pour agir sur un solide en mouvement.

§. 242. Les six équations différentielles que nous venons d'obtenir suffisent bien pour déterminer complètement le mouvement du solide; mais elles ne sont pas sous une forme commode pour effectuer cette détermination : elles renferment comme inconnues les coordonnées x, y, z de tous les points du solide, coordonnées qui sont généralement en très grand nombre. Pour pouvoir se servir de ces équations, il faudrait leur adjoindre celles qui expriment que les distances mutuelles des différents points du solide sont constantes et connues ; à l'aide de ces dernières équations, les coordonnées des divers points s'exprimeraient en fonction de six d'entre elles, qui seraient alors les inconnues dont les six équations différentielles du mouvement devraient fournir les valeurs. Mais il est plus simple d'opérer autrement, pour ramener les équations différentielles à ne contenir que six inconnues.

Nous savons, par le premier théorème général (§ 222), que le centre de gravité du solide se meut comme si toute la masse du solide y était concentrée et que toutes les forces appliquées au solide y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes ; en écrivant les équations différentielles du mouvement du centre de gravité, ainsi transformé en un point matériel, nous aurons déjà trois équations contenant trois inconnues qui seront les coordonnées de ce centre de gravité. Il nous restera à déterminer le mouvement du solide autour de son centre de gravité, au moyen de trois autres équations différentielles ne contenant également que trois inconnues.

Pour trouver ces trois autres équations, nous considérerons le mouvement du solide autour de son centre de gravité, pendant un élément de temps dt; nous supposerons que ce mouvement soit rapporté à des axes coordonnés de direction constante menés par le centre de gravité, tellement choisis qu'ils coïncident avec les axes principaux du solide relatifs à ce point (§ 240) au commencement du temps dt; et nous appliquerons le troisième théorème général (§ 226) à ce mouvement infiniment petit du solide, en prenant les moments des quantités de mouvement et des impulsions par rapport à chacun des trois axes coordonnés. Le mouvement dont il s'agit est nécessairement une rotation autour d'un axe instantané passant par le centre de gravité (§ 27). Cette rotation peut être remplacée par trois rotations simultanées autour des trois axes coordonnés (§§ 35 et 45). Désignons par ω la vitesse angulaire dans la rotation du solide autour de son axe instantané, et par p, q, r les vitesses angulaires dans les rotations composantes autour des axes coordonnés, OX, OY, OZ. Lorsque le solide tourne de l'angle pdt autour de l'axe OY, les coordonnées x, y, z d'un quelconque de ces points s'accroissent respectivement de

$$0, \qquad -pzdt, \qquad +pydt,$$

ainsi qu'il est facile de le reconnaître ; lorsqu'il tourne de qdt autour de OY, ces coordonnées s'accroissent de

$$+qzdt, \qquad 0, \qquad -qxdt,$$

et lorsqu'il tourne de rdt autour de OZ, elles s'accroissent de

$$-rydt, \qquad -rxdt, \qquad 0:$$

donc, lorsque le solide tourne de l'angle ωdt autour de son axe instantané, les mêmes coordonnées s'accroissent de

$$(qz - ry)dt, \qquad (rx - pz)dt, \qquad (py - qx)dt.$$

Il s'ensuit que les composantes de la vitesse du point dont il s'agit, suivant des parallèles aux axes coordonnés, ont pour valeurs

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry, \qquad \frac{dy}{dt} = rx - pz, \qquad \frac{dz}{dt} = py - qx.$$

Or la somme des moments des quantités de mouvement des divers points du solide par rapport à l'axe OX est exprimée (§ 177) par

$$\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right);$$

si l'on remplace dans cette expression $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs, elle devient

$$p\Sigma m(y^2 + z^2) - q\Sigma mxy - r\Sigma mxz,$$

quantité qui se réduit à Ap, si l'on suppose que les axes OX, OY, OZ coïncident avec les axes principaux du solide, et si l'on désigne comme précédemment par A, B, C, les moments d'inertie du solide par rapport à ces axes. On trouverait de même que les sommes des moments des quantités de mouvement du solide par rapport aux axes OY, OZ, ont pour valeurs Bq, Cr.

Ainsi, au commencent du temps dt pour lequel nous voulons appliquer le troisième théorème général, les sommes des moments des quantités de mouvement des divers points du solide, par rapport aux axes coordonnés OX, OY, OZ, qui coïncident à cet instant avec les axes principaux, sont respectivement égales à

$$Ap, \qquad Bq, \qquad Cr.$$

Cherchons ce que deviennent ces sommes de moments, par rapport aux mêmes axes coordonnés, à la fin du temps dt. A ce second instant, p, q, r s'étant accrus des quantités dp, dq, dr pendant le temps dt, les sommes de moments dont il s'agit auraient pour valeurs

$$A(p+dp), \quad B(q+dq), \quad C(r+dr),$$

si les moments étaient encore pris par rapport aux axes principaux du solide; mais il n'en est pas ainsi, parce que les axes principaux qui coïncidaient avec les axes coordonnés au commencement du temps dt, s'en sont écartés pendant cet élément de temps en vertu de la rotation ωdt du solide autour de son axe instantané, ou, ce qui est la même chose, en vertu de ses trois rotations simultanées pdt, qdt, rdt autour des trois axes coordonnés. Pour arriver aux résultats que nous cherchons, considérons l'axe du moment résultant des quantités de mouvement des divers points du solide par rapport à son centre de gravité (§161). D'après ce que nous venons de dire, les projections de cet axe, considéré à la fin du temps dt, sur les positions qu'occupent les axes principaux du solide à cet instant, ont pour valeurs

$$A(p+dp), \quad B(q+dq), \quad C(r+dr);$$

pour avoir la projection du même axe sur l'axe coordonné OX, il faudra projeter chacune des trois projections précédentes sur OX, et faire la somme des trois résultats ainsi obtenus. Or, par suite des rotations pdt, qdt, rdt, autour des trois axes OX, OY, OZ, les axes principaux du solide se sont écartés infiniment peu de ces axes coordonnés OX, OY, OZ; et les angles que ces trois axes principaux font avec OX, après ces rotations, ont évidemment pour valeurs :

$$\sqrt{q^2dt^2+r^2dt^2}, \quad \frac{\pi}{2}+rdt, \quad \frac{\pi}{2}-qdt;$$

si l'on multiplie les quantités $A(p+dp)$, $B(q+dq)$, $C(r+dr)$ par les cosinus de ces trois angles, et que l'on ajoute les trois produits en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, on trouve :

$$A(p+dp)+(C-B)qrdt:$$

cette expression, qui représente la projection de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement sur OX, à la fin du temps dt, est donc la valeur de la somme des moments des quantités de mouvement des divers points du solide par rapport à OX, au même instant.

Si, de cette somme de moments correspondant à la fin du temps dt, nous retranchons la valeur Ap de la somme analogue correspondant au commencement du temps dt, nous trouverons

$$Adp+(C-B)qrdt,$$

qui représentera l'accroissement de la somme des moments des quantités de mouvement du solide par rapport à OX, pendant le temps dt. D'après le troisième théorème général, cet accroissement doit être égal à la somme des moments des impulsions élémentaires des forces appliquées au solide pendant ce temps dt, par rapport au même axe OX. Désignons par L, M, N, les sommes des moments des forces dont il s'agit, par rapport aux trois axes coordonnés OX, OY, OZ. Il est clair que la somme des moments des impulsions élémentaires de ces forces pendant le temps dt, par rapport à l'axe OX, aura pour valeur Ldt; donc, d'après le troisième théorème général, on aura

$$Adp+(C-B)qrdt=Ldt.$$

Des considérations analogues aux précédentes, dans lesquelles l'axe OX serait remplacé par les axes OY, OZ, conduiraient de même aux deux autres relations :

$$Bdq+(A-C)rpdt=Mdt,$$
$$Cdr+(B-A)pqdt=Ndt.$$

Ces trois équations font connaître les variations dp, dq, dr qu'éprouvent les vitesses angulaires p, q, r du solide dans ses rotations autour des trois axes principaux relatifs à son centre de gravité, pendant le temps infiniment petit dt qui s'écoule à partir de l'instant où ces axes principaux coïncident avec les axes de direction constante OX, OY, OZ; mais, comme on pourrait les établir de même pour chacun des éléments de temps *dt* qui se succèdent, en employant à chaque fois comme auxiliaires des axes coordonnés de direction constante qui coïncident avec les axes principaux du solide au commencement de cet élément de temps, il s'ensuit qu'on peut les regarder comme vraies pour tous les éléments dont se compose un temps fini quelconque. En divisant tous les termes par dt, on peut mettre ces trois équations sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + L,\\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + M,\\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + N, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Ce sont les trois autres équations différentielles du mouvement du solide que nous nous proposons de trouver. Mais ces équations, qui ne sont que du premier ordre, ont besoin d'être complétées de la matière suivante.

Les axes coordonnés que nous avons considérés précédemment, pour établir les équations (a), n'étaient que des axes auxiliaires dont nous n'avons plus à nous préoccuper dès le moment que nous sommes arrivés à ces équations où il ne reste absolument rien qui dépende des axes coordonnés dont il s'agit. Concevons maintenant que le mouvement du soleil autour de son centre de gravité soit rapporté pendant un temps quelconque à un système d'axes coordonnés ractangulaires de directions constantes ayant ce point pour origine. Appelons OX, OY, OZ ces trois axes, et désignons en même temps par OX_1, OY_1, OZ_1 les trois axes principaux du solide relatifs à son centre de gravité. Ces derniers axes accompagnent le solide dans son mouvement, et il suffit de connaître leur déplacement progressif par rapport aux axes OX, OY, OZ, pour que le déplacement du solide lui-même par rapport à ces derniers axes soit connu. Le plan X_1OY_1 coupe le plan XOY suivant une droite que nous appellerons OA. Soient φ l'angle que cette droite OA fait avec OX, ψ l'angle que cette même droite OA fait avec OX_1, et θ l'angle que le plan

X_1OY_1 fait avec le plan XOY. Si l'on parvient à déterminer les valeurs des angles φ, ψ, θ en fonction du temps, la position du système d'axes OX_1, OY_1, OZ_1, et par suite celle du solide lui-même, par rapport aux axes OX, OY, OZ, sera connue à chaque instant. Pendant le temps dt, le solide tourne de l'angle ωdt autour de son axe instantané de rotation, et cette rotation infiniment petite peut être regardée comme la résultante des trois rotations pdt, qdt, rdt, autour des trois axes OX_1, OY_1, OZ_1. En même temps les angles φ, ψ, θ, s'accroissent de leurs différentielles $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$, qui peuvent être regardées comme trois rotations infiniment petites autour des axes OZ, OZ_1, OA : $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$ sont donc trois autres composantes de la même rotation résultante ωdt relatives à ces derniers axes. Si nous représentons chacune des rotations infiniment petites dont il s'agit ici, par une droite, comme au § 55, nous pouvons dire que la rotation pdt autour de OX_1, est la projection orthogonale de la rotation résultante ωdt sur OX_1 ; pdt est donc aussi égal à la somme des projections orthogonales des trois composantes $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$ sur ce même axe OX_1. Si nous écrivons cette égalité, et aussi les deux égalités analogues pour les rotations qdt, rdt, relatives aux axes OY_1, OZ_1, puis que nous divisions tous les termes de ces trois égalités par dt, nous trouverons

$$\left.\begin{aligned} p &= \cos\psi\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta\sin\psi\frac{d\varphi}{dt},\\ q &= -\sin\psi\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta\cos\psi\frac{d\varphi}{dt},\\ r &= \cos\theta\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Les deux systèmes (a) et (b), formés chacun de trois équations différentielles du premier ordre, équivalent ensemble à un système de trois équations différentielles du second ordre. L'intégration de ces systèmes d'équations différentielles fera connaître complètement le mouvement du solide autour de son centre de gravité ; car on en déduira les valeurs de φ, ψ et θ en fonction du temps, ce qui suffit, ainsi que nous l'avons dit, pour que la position du solide à un instant quelconque, relativement aux axes de directions constantes menés par ce point, soit entièrement connue.

§ 244. Le cas le plus simple qui se présente, dans l'étude du mouvement d'un solide invariable libre, c'est celui où le solide n'est soumis à l'action d'aucune force, et ne se déplace qu'en vertu du mouvement qu'on lui a imprimé tout d'abord. Nous allons voir que, dans ce cas, on peut se faire une idée très nette des diverses circonstances que présente le mouvement du solide.

Nous savons d'abord (§ 223) que le centre de gravité du solide se meut uniformément et en ligne droite, ou bien qu'il reste immobile. Il ne nous reste donc qu'à voir comment le solide se meut autour de son centre de gravité. Pour y parvenir, nous pourrions nous servir des équations différentielles (a) et (b) qui viennent d'être établies (§ 242) ; mais il sera plus simple d'opérer autrement, en n'employant que des considérations géométriques.

Observons d'abord que le théorème des aires est applicable à ce mouvement du solide autour de son centre de gravité (§§ 234 et 228), puisqu'il n'y a pas de forces extérieures : si l'on considère les aires décrites par les rayons vecteurs menés du centre de gravité aux divers points du solide, dans leur mouvement par rapport à des axes de directions constantes passant par ce point, le plan du maximum des aires doit conserver constamment la même direction, et la somme des aires projetées sur ce plan doit avoir constamment la même valeur. Voyons donc comment on peut trouver le plan du maximum des aires, dont il s'agit, à chaque instant.

Ce plan du maximum des aires n'est autre chose que le plan du moment résultant des quantités de mouvement des différents points du solide par rapport à son centre de gravité (§ 228). Or nous avons vu (§ 242) que les projections de l'axe de ce moment résultant, sur les axes principaux du solide relatifs à son centre de gravité, ont pour valeurs

$$\mathrm{A}p, \quad \mathrm{B}q, \quad \mathrm{C}r,$$

A, B, C, p, q, r ayant les mêmes significations que précédemment, on en conclut tout de suite que, si l'on prend ces axes principaux pour axes coordonnés, le plan du maximum des aires fait avec les trois plans coordonnés des angles dont les cosinus sont

$$\frac{\mathrm{A}p}{\sqrt{\mathrm{A}^2p^2+\mathrm{B}^2q^2+\mathrm{C}^2r^2}}, \quad \frac{\mathrm{B}q}{\sqrt{\mathrm{A}^2p^2+\mathrm{B}^2q^2+\mathrm{C}^2r^2}}, \quad \frac{\mathrm{C}r}{\sqrt{\mathrm{A}^2p^2+\mathrm{B}^2q^2+\mathrm{C}^2r^2}}.$$

L'ellipsoïde central (§ 240), rapporté aux mêmes axes, a pour équation

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}z^2=1.$$

Considérons le point de cet ellipsoïde qui est situé sur l'axe instantané de rotation du solide, et désignons par x', y', z', ses coordonnées et par l la longueur du rayon qui le joint au centre de l'ellipsoïde ; on aura évidemment

$$\frac{x'}{l}=\frac{p}{\omega}, \quad \frac{y'}{l}=\frac{q}{\omega}, \quad \frac{z'}{l}=\frac{r}{\omega},$$

ω étant la vitesse angulaire dont p, q, r sont les trois composantes. Le plan tangent à l'ellipsoïde aux points x', y', z', a pour équation

$$\mathrm{A}xx'+\mathrm{B}yy'+\mathrm{C}zz'=1.$$

La proportionnalité des coordonnées x', y', z' aux quantités p, q, r, montre que le plan du maximum des aires est parallèle à ce plan tangent. Or, on sait que, dans l'ellipsoïde, le plan diamétral conjugué d'un diamètre quelconque est parallèle au plan tangent mené à l'extrémité de ce diamètre : donc on peut dire que, dans la rotation du solide autour d'un axe instantané quelconque passant par son centre de gravité, le plan du maximum des aires relatif à ce point n'est autre chose que le plan diamétral de l'ellipsoïde central qui est conjugué du diamètre dirigé suivant l'axe instantané de rotation.

Ainsi, dans le mouvement que nous étudions, le solide doit tourner, à un instant quelconque, autour du diamètre de son ellipsoïde central qui est conjugué du plan du maximum des aires considéré comme plan diamétral de cet ellipsoïde. Si cet axe de rotation n'est pas un des axes de l'ellipsoïde, son plan diamétral, entraîné par le mouvement du solide, change de direction dans l'espace ; donc le plan du maximum des aires, qui doit conserver toujours la même direction, cesse de coïncider avec ce plan diamétral, et par conséquent aussi l'axe de rotation se déplace à l'intérieur du solide.

Le théorème des forces vives, appliqué au mouvement qui nous occupe, montre que la force vive du solide conserve constamment la même valeur, puisqu'il n'est soumis à l'action d'aucune force. Or la vitesse d'un point situé à la distance R de l'axe instantané de rotation est égale à ωR ; la force vive de ce point est donc égale à $m\omega^2 R^2$, en désignant sa masse par m, et par conséquent la force vive du solide tout entier a pour valeur.

$$\omega^2 \Sigma m R^2.$$

Mais si l'on se reporte à la définition de l'ellipsoïde central (§ 240), on verra que le moment d'inertie $\Sigma m R^2$ qui entre dans cette pression est égal à $\frac{1}{l^2}$, en sorte que la force vive du solide peut se mettre sous la forme

$$\frac{\omega^2}{l^2}$$

Le théorème des forces vives montre donc que $\frac{\omega}{l}$ est constant ; ou, en d'autres termes, à mesure que l'axe de rotation du solide se déplace à son intérieur, sa vitesse angulaire ω varie proportionnellement à la longueur l de la portion de cet axe qui est comprise entre le centre de gravité et la surface de l'ellipsoïde central.

Revenons maintenant au théorème des aires. D'après ce théorème, le moment résultant des quantités de mouvement du solide par rapport à son centre de gravité est constant. Or, ce moment résultant a pour valeur

$$\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2},$$

puisque Ap, Bq, Cr sont les projections de son axe sur les axes coordonnés ; et si l'on y remplace p, q, r par les quantités équivalentes

$$\frac{\omega x'}{l}, \quad \frac{\omega y'}{l}, \quad \frac{\omega z'}{l},$$

il prend la forme simple

$$\frac{\pi}{l\delta},$$

en désignant par δ la distance du centre de gravité du solide au plan tangent de l'ellipsoïde central mené par les points x', y', z'. Cette quantité $\frac{\omega}{l\delta}$ devant conserver constamment la même valeur et $\frac{\omega}{l}$ étant d'ailleurs constant, comme nous venons de le voir, il s'ensuit que δ est constant.

D'après ce qui précède, si l'on considère le plan tangent à l'ellipsoïde central au point où il est percé par l'axe instantané de rotation du solide, ce plan tangent doit conserver une position invariable par rapport aux axes de direction constante menés par le centre de gravité ; puisque, d'une part, il reste toujours parallèle à lui-même, et que, d'une autre part, il est toujours à la même distance du centre de gravité. Le solide se meut donc de telle manière, que son ellipsoïde central touche constamment ce plan, déterminé une fois pour toutes comme nous venons de le dire ; et comme son axe de rotation passe à chaque instant par le point de contact de l'ellipsoïde et du plan, il s'ensuit que cet ellipsoïde *roule* sur le plan dont il s'agit. De plus, la vitesse angulaire avec laquelle s'effectue ce roulement varie d'un instant à un autre, de manière à rester proportionnelle à la longueur du rayon de l'ellipsoïde qui passe par son point de contact avec le plan. Cette image remarquable du mouvement d'un solide invariable autour de son centre de gravité, dans le cas où le solide n'est soumis à aucune force, est due à Poinsot.

Il est aisé de voir que, dans le cas particulier où le solide, à