un instant quelconque, tournerait autour d'un des axes principaux relatifs à son centre de gravité, il devrait continuer indéfiniment à tourner autour du même axe ; c'est ce qui fait qu'on donne souvent aux axes principaux le nom d'*axes permanents de rotation*. Lorsque le solide tourne ainsi autour d'un de ses axes principaux, sa vitesse angulaire reste constante.

La connaissance que nous venons d'acquérir des circonstances que présente le mouvement d'un solide invariable abandonné à lui-même sans qu'aucune force le sollicite, vient compléter la notion que nous avions tout d'abord relativement à l'inertie de la matière. Nous avons admis en principe (§ 83) qu'un point matériel qui n'est soumis à aucune force se meut uniformément et en ligne droite; nous savons maintenant comment les choses se passent, lorsqu'au lieu d'un point matériel on considère un solide invariable qui se trouve dans le même cas, c'est-à-dire qui n'est soumis à l'action d'aucune force : son centre de gravité se meut uniformément et en ligne droite, et en même temps le solide tourne autour de son centre de gravité, conformément aux lois simples qui viennent d'être indiquées d'après Poinsot.

§ 244. Supposons qu'un solide invariable soit soumis aux actions de diverses forces, et que ces forces aient une résultante passant constamment par son centre de gravité ; le mouvement du solide dans l'espace se déterminera encore très facilement. D'abord nous savons que le centre de gravité du solide se meut comme si toute la masse du solide y était concentrée et que les forces qui agissent sur le solide y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes (§ 222) ; en sorte que le mouvement du centre de gravité se détermine comme celui d'un simple point matériel. Ensuite nous observerons que, la résultante des forces appliquées au solide passant constamment par son centre de gravité, le mouvement du solide par rapport à des axes de direction constante menés par ce point s'effectuera absolument de la même manière que si le solide n'était soumis à l'action d'aucune force ; les théorèmes des aires et des forces vives, que nous pourrons appliquer dans ce cas, comme nous l'avons fait



dans le paragraphe précédent, nous conduiront à des résultats qui seront identiquement les mêmes : le solide se meut donc de telle manière que son ellipsoïde central roule sur un plan lié invariablement aux axes de direction constante menés par son centre de gravité, et la vitesse angulaire dans ce roulement est à chaque instant proportionnelle à la longueur du diamètre de l'ellipsoïde central autour duquel s'effectue la rotation instantanée du solide.

Nous pouvons donner comme exemple le mouvement d'un corps solide soumis à la seule action de la pesanteur, et lancé tout d'abord d'une manière quelconque au-dessus de la surface de la terre, en supposant toutefois que ce corps puisse être assimilé à un solide invariable. Son centre de gravité se mouvra suivant une parabole (§ 122), et en même temps il tournera autour de ce point conformément à ce qui vient d'être dit. S'il s'agit d'un boulet sphérique homogène, pour lequel l'ellipsoïde central se réduit évidemment à une sphère, on voit que l'axe de rotation du boulet autour de son centre de gravité restera toujours parallèle à une même direction, et que la vitesse avec laquelle il tournera autour de cet axe ne variera pas. S'il s'agit d'une tige rigide que l'on puisse assimiler à une ligne droite pesante, cette tige tournera autour de son centre de gravité, en restant dans un plan de direction constante mené par ce point.

§ 245. Supposons qu'un solide invariable complètement libre soit en repos, et qu'on vienne lui appliquer une *percussion ;* nous allons nous proposer de déterminer le mouvement qui en résultera pour le solide. Nous entendons, par percussion, un choc brusque, tel qu'un coup de marteau. Ce choc s'effectue dans un intervalle de temps extrêmement court ; mais la force qui agit sur le corps pendant ce temps est habituellement très grande, de sorte que, malgré le peu de durée de son action, elle détermine un mouvement qui peut être très rapide. Quelle que soit la vitesse que prenne un point quelconque du solide à la suite de la percussion, le déplacement que ce point a déjà éprouvé, à l'instant où la percussion cesse, est toujours très petit ; on voit en effet que, lors même que le point dont il s'agit aurait, pendant toute la durée $\theta$ de la percussion la vitesse qu'il possède à la fin, son déplacement total pendant ce temps $\theta$ n'en serait pas moins très petit, puisque ce déplacement serait égal au produit de la vitesse du point par $\theta$, et que $\theta$ est toujours extrêmement petit : il en est encore ainsi, à plus forte raison, dans la réalité, où le point n'acquiert que progressivement la vitesse dont il est animé à la fin de la percussion. Nous pourrons donc supposer, sans commettre d'erreur appréciable, que le solide conserve la même position dans l'espace pendant toute la durée de la percussion ; en faisant cette hypothèse, nous serons d'autant plus près de la réalité que la durée $\theta$ de la percussion sera plus courte, et nous serions exactement dans le vrai, si la percussion était instantanée. Nous admettrons en outre que la force P, qui agit sur le solide en vertu de la percussion, conserve constamment la même direction pendant tout le temps $\theta$.

Cela posé, il va nous être facile de déterminer le mouvement que prend le solide sous l'action de la force P. D'abord, si nous appliquons au mouvement de son centre de gravité le théorème des quantités de mouvement et des impulsions projetées sur un axe, nous aurons évidemment

$$Mv = \int_0^\theta P dt,$$

en désignant par $v$ la vitesse du centre de gravité, et par M la masse totale du solide. Pour trouver le mouvement que prend le solide par rapport à des axes de direction constante menés par son centre de gravité, appliquons le troisième théorème général à ce mouvement relatif (§§ 226 et 234) : nous reconnaîtrons sans peine que le plan du maximum des aires par rapport au centre de gravité dont il s'agit, et à la fin du temps $\theta$, est précisément le plan qui passe par ce centre de gravité et par la direction de la force P. En effet, si nous considérons un axe quelconque mené dans ce dernier plan et par le centre de gravité du solide, la somme des moments des impulsions élémentaires de la force P par rapport à cet axe, pendant tout le temps $\theta$, sera nulle ; l'accroissemeut de la somme des moments des quantités de mouvement des divers points du solide par rapport à cet axe doit donc aussi être nulle ; et comme cette somme des moments des quantités de mouvement est nulle au commencement du temps $\theta$, il s'ensuit qu'elle est également nulle à la fin : donc, le plan du maximun des aires du solide relatif à son centre de gravité, et à la fin du temps $\theta$, passe par l'axe dont il s'agit (§ 228), c'est-à-dire que ce plan passe par le centre de gravité du solide et par la direction de la percussion.



Si l'on se reporte maintenant à ce qui a été démontré précédemment (§ 243), on verra que, à l'instant où la percussion cesse, le solide doit tourner autour du diamètre de son ellipsoïde central qui est conjugué du plan diamétral mené par la direction de la force P. Quant à la vitesse angulaire $\omega$ avec laquelle s'effectue cette rotation, on l'obtiendra en exprimant que le moment de l'impulsion totale $\int_0^\theta P dt$, par rapport au centre de gravité du solide, est égale à $\frac{\omega}{l\delta}$, $l$ et $\delta$ ayant la même signification que précédemment ; ou bien encore, ce qui revient au même, en exprimant que le moment de cette impulsion totale, par rapport à l'axe de rotation, est égal à la somme des moments des quantités de mouvement des divers points du solide par rapport au même axe, somme qui a pour valeur $\omega\Sigma mr^2$, $\Sigma mr^2$ étant le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe.

Si le solide, après avoir été soumis à la percussion dont il s'agit, est ensuite abandonné à lui-même, sans qu'aucune force lui soit appliquée, il se meut conformément à ce qui a été dit dans le § 243 ; et les circonstances initiales de ce mouvement sont précisément celles que nous venons de déterminer comme résultant immédiatement de la percussion.

Dans le cas où l'on appliquerait à un solide invariable en repos deux percussions égales, agissant suivant des directions parallèles, et en sens contraire l'une de l'autre, il est aisé de voir quel mouvement ce *couple de percussions* lui communiquerait. D'une part, il est clair que le centre de gravité du solide resterait immobile, puisque les forces appliquées au solide, étant transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point, s'y détruiraient constamment. D'une autre part, le couple de percussions pouvant être transporté parallèlement à lui-même, sans que son effet soit changé (§§ 241 et 181), si on le transporte ainsi de manière que l'une des deux percussions agisse sur le centre de gravité même, l'autre percussion produira seule le mouvement du solide autour de ce point ; donc le point du maximum des aires, par rapport au centre de gravité, dans le mouvement que le couple de percussions communique au solide, est parallèle au plan de ce couple. On voit donc que, par suite de l'action du couple de percussions, le solide commence à tourner autour du diamètre de son ellipsoïde central qui est conjugué du plan diamétral parallèle au plan du couple. Cet axe, autour duquel le solide commence à tourner, n'est perpendiculaire au plan du couple de percussions, qu'autant que ce plan du couple est parallèle à l'un des plans principaux de l'ellipsoïde central du solide.

§ 246. **Mouvement d'un solide invariable assujetti à tourner autour d'un point fixe.** — Lorqu'un solide invariable est assujetti à tourner autour d'un point fixe, on peut trouver les équations différentielles de son mouvement rapporté à trois axes menés par ce point, en prenant la somme des moments des forces qui agissent sur lui, et des forces d'inertie de ses différents points, par rapport à chacun de ces trois axes, et exprimant que chacune des trois sommes ainsi obtenues est nulle (§ 221). Mais on peut aussi établir ces équations différentielles, en raisonnant, pour le mouvement absolu dont il s'agit, comme nous avons raisonné précédemment (§ 242) pour le mouvement d'un solide libre autour de son centre de gravité. Si l'on reprend tout ce qui a été dit à cette occasion, on verra que les équations différentielles ($a$) et ($b$), auxquelles nous sommes parvenus, conviennent également, sans aucune modification, pour déterminer le mouvement d'un solide invariable assujetti à tourner autour d'un point fixe. Seulement les moments d'inertie A, B, C, les vitesses angulaires composantes $p$, $q$, $r$, et les



sommes de moments L, M, N, au lieu de se rapporter aux axes principaux du solide correspondant à son centre de gravité, se rapportent à ses axes principaux correspondant au point fixe autour duquel s'effectue le mouvement.

Si l'on suppose que le solide ne soit soumis à l'action d'aucune force, et qu'il ne se déplace qu'en vertu du mouvement qu'on lui a imprimé tout d'abord, il est aisé de voir qu'on pourra encore lui appliquer tout ce qui a été dit (§ 243) relativement au mouvement d'un solide libre autour de son centre de gravité, dans le cas où aucune force n'agit sur ce solide. Ainsi l'on peut dire que, si l'on considère l'ellipsoïde qui fait connaître la loi des moments d'inertie du solide par rapport aux diverses droites menées par le point fixe, cet ellipsoïde, entraîné par le solide dans son mouvement autour de ce point, ne fait que rouler sur un plan fixe, et cela avec une vitesse angulaire qui varie proportionnellement à la longueur du rayon de l'ellipsoïde passant par son point de contact avec ce plan fixe.

Enfin on verra encore facilement que, si un solide, assujetti à tourner autour d'un point fixe et primitivement en repos, vient à être soumis à une percussion, il commencera à tourner autour d'une droite qui, dans l'ellipsoïde dont il vient d'être question, sera le diamètre conjugué du plan diamétral passant par la direction de la percussion. La vitesse $\omega$, dont il sera animé dans cette rotation, s'obtiendra de même en égalant $\frac{\omega}{l\delta}$ au moment de l'impulsion totale due à la percussion par rapport au point fixe, $l$ et $\delta$ ayant la signification qui a déjà été indiquée ; ou bien encore en égalant $\omega\Sigma mr^2$ au moment de cette impulsion totale par rapport à l'axe de rotation, $\Sigma mr^2$ étant le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe.

§ 247. **Mouvement d'un solide invariable assujetti à tourner autour d'un axe fixe.** — Lorsqu'un solide invariable ne peut que tourner autour d'un axe fixe, une seule équation différentielle suffit pour déterminer son mouvement. Cette équation peut s'obtenir à l'aide du théorème de d'Alembert (§ 221), en exprimant que la somme des moments des forces réelles et des forces d'inertie par rapport à l'axe fixe est égale à zéro. Concevons que la force d'inertie de chaque point soit décomposée en deux forces, dirigées, l'une suivant la tangente au cercle que le point décrit, et l'autre suivant le prolongement du rayon de ce cercle (§ 138); le moment de cette force d'inertie par rapport à l'axe sera égal au moment de sa composante tangentielle par rapport au même axe, puisque le moment de sa composante centrifuge par rapport à cet axe est nul. Ce moment de la force d'inertie aura donc pour expression $mr\frac{d\omega}{dt}.\,r$, en désignant par $m$ la masse du point considéré, par $r$ sa distance à l'axe, et par $\omega$ la vitesse angulaire du solide. Il s'ensuit que la somme des moments des forces d'inertie des divers points du solide par rapport à l'axe a pour valeur

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2.$$

D'après cela, si l'on représente par P la projection d'une quelconque des forces appliquées au solide sur un plan perpendiculaire à l'axe fixe, et par $p$ la plus courte distance de la direction de cette force et de l'axe, et si l'on regarde comme positifs les moments des forces qui tendent à faire tourner le solide dans le sens de la vitesse angulaire $\omega$ supposée positive, on aura

$$\Sigma\mathrm{P}p-\frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2$$

pour la somme des moments des forces réelles et des forces d'inertie par rapport à l'axe fixe. En l'égalant à zéro, on en tire

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\Sigma\mathrm{P}p}{\Sigma mr^2},$$

qui est l'équation différentielle du mouvement de rotation du solide autour de l'axe. L'intégration de cette équation différentielle fera connaître $\omega$ en fonction de $t$; et si l'on observe que, $\theta$ étant l'angle dont le solide a tourné à partir de sa position initiale, on a

$$\omega=\frac{d\theta}{dt},$$



on voit qu'une nouvelle intégration fournira la valeur de cet angle $\theta$ en fonction de $t$. Les constantes introduites par ces deux intégrations se termineront d'après les valeurs de $\omega$ et de $\theta$ correspondant à $t=0$.

Si l'on compare l'équation différentielle qui vient d'être établie avec celle qui détermine le mouvement rectiligne d'un point matériel sous l'action d'une force donnée (§ 105), on voit que ces équations ont des formes analogues. On en conclut tout de suite que le moment d'inertie $\Sigma mr^2$ du solide par rapport à l'axe fixe joue, dans le mouvement de rotation du solide autour de cet axe, le même rôle que la masse d'un point matériel dans le mouvement rectiligne de ce point : toutes choses égales d'ailleurs, l'*accélération angulaire* $\frac{d\omega}{dt}$ est d'autant plus petite que le moment d'inertie $\Sigma mr^2$ est plus grand.

§ 248. Lorsque les forces appliquées au solide sont telles que la somme de leurs moments par rapport à l'axe fixe, est nulle, $\omega$ est constant, et le mouvement de rotation du solide est uniforme. C'est ce qui a lieu en particulier lorsque le solide n'est soumis à l'action d'aucune force.

Considérons spécialement ce cas particulier d'un solide qui tourne autour d'un axe en vertu d'une vitesse initiale, sans qu'aucune force lui soit appliquée, et cherchons à nous rendre compte des pressions que l'axe doit avoir à supporter de la part du solide. Si nous imaginons un système d'axes coordonnés liés invariablement au solide, et entraîné par lui dans sa rotation autour de l'axe fixe, nous pouvons regarder le solide comme étant en équilibre par rapport à ces axes coordonnés mobiles; les pressions qu'il exerce sur l'axe fixe peuvent donc être considérées comme dues aux forces, tant apparentes que réelles (§ 188), qui sont appliquées à ses différents points, dans cet équilibre relatif. Mais nous admettons qu'il n'y a pas de forces réelles; et d'un autre côté, le mouvement de rotation du solide étant uniforme, la force d'inertie de chacun de ces points se réduit à la force centrifuge : ce sont donc les forces centrifuges des différents points du solide qui déterminent seules les pressions que le solide exerce sur l'axe. Nous allons voir comment ces forces centrifuges peuvent se composer entre elles, de manière à simplifier la recherche des pressions dont il s'agit, dans chaque cas particulier.

La force centrifuge d'un point de masse $m$, situé à une distance $r$ de l'axe de rotation, a pour expression

$$m\omega^2 r;$$

on peut la supposer appliquée au point où sa direction rencontre l'axe fixe. Si les axes coordonnés, que nous imaginons liés au solide, sont choisis de manière que l'axe des $x$ coïncide avec l'axe fixe, et si $x$, $y$, $z$ désignent les coordonnées du point que nous considérons, il est aisé de voir que la force centrifuge de ce point, après avoir été transportée sur l'axe des $x$ comme nous venons de le dire, peut s'y décomposer en deux forces dirigées parallèlement aux axes des $y$ et des $z$, et ayant respectivement pour valeurs

$$m\omega^2 y, \qquad m\omega^2 z.$$

Cela posé, concevons que nous considérions tous les points matériels qui font partie d'une tranche du solide comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe des $x$ et distants l'un de l'autre d'une quantité infiniment petite. Si nous remplaçons la force centrifuge de chacun de ces points par deux forces parallèles aux axes des $y$ et des $z$ appliquées au point de la tranche qui est sur l'axe des $x$, nous aurons en ce dernier point une série de forces parallèles à l'axe des $y$ qui pourront être remplacées par une force unique, égale à leur somme $\Sigma m\omega^2 y$, et aussi une autre série de forces parallèles à l'axe des $z$ qui pourront être remplacées par une force unique égale à $\Sigma m\omega^2 z$ : la résultante des deux forces ainsi obtenues sera la résultante des forces centrifuges de tous les points qui composent la tranche considérée. Mais si M est la masse de cette tranche, et si $y_1, z_1$, sont les distances de son centre de gravité aux plans des $xz$ et des $xy$, on a

$$\Sigma m\omega^2 y = M\omega^2 y_1 \qquad \Sigma m\omega^2 z = M\omega^2 z_1,$$

puisque $\omega$ est le même pour tous les points de la tranche ; d'ailleurs $M\omega^2 y_1$, $M\omega^2 z_1$, peuvent être regardés comme des composantes de la force centrifuge d'un point matériel de masse M qui serait placé au centre de gravité de la tranche : donc on peut dire que les forces centrifuges des différents points de la tranche infiniment mince dont il s'agit, se composent en une seule force, qui est précisément la force centrifuge unique qui se développerait, si toute la masse de la tranche était concentrée en son centre de gravité.

Si toutes les tranches infiniment minces, dans lesquelles le solide tout entier peut être divisé par des plans perpendiculaires à l'axe fixe, ont leurs centres de gravité situés sur une droite parallèle à cet axe, les forces centrifuges résultantes qui correspondent à ces diverses tranches, conformément à ce qui précède, sont toutes parallèles entre elles ; d'ailleurs elles sont proportionnelles aux masses de ces tranches, et sont appliquées à leurs centres de gravité : donc elles ont une résultante qui est égale à leur somme, et qui est appliquée au centre de gravité du solide tout entier. Ainsi, dans ce cas, toutes les forces centrifuges correspondant aux différents points du solide ont pour résultante unique la force centrifuge qui se développerait si la masse totale du solide était concentrée en son centre de gravité.

Lorsque les centres de gravité des diverses tranches infiniment minces, dans lesquelles le solide peut être décomposé par des plans perpendiculaires à l'axe fixe, ne sont pas tous situés sur une droite parallèle à cet axe, il n'arrive plus en général que les forces centrifuges des différents points du solide aient une résultante unique. Si nous reprenons la force centrifuge de chaque point en particulier, et que nous la remplacions par deux forces $m\omega^2 y$, $m\omega^2 z$, dirigées parallèlement aux axes des $y$ et des $z$, et appliquées en un point de l'axe des $x$, l'ensemble de toutes les forces analogues nous donnera un système de forces parallèles à l'axe des $y$ dirigées dans le plan des $xy$, et un autre système de forces parallèles à l'axe des $z$ dirigées dans le plan des $xz$. Chacun de ces deux systèmes de forces donnera lieu soit à une résultante unique, soit à un couple résultant; la connaissance de la résultante ou du couple résultant correspondant à chacun des plans des $xy$ et des $xz$, pourra dès lors servir à la détermination des pressions exercées par le solide sur son axe.

Supposons que l'on veuille trouver les conditions qui doivent être remplies pour que l'axe n'ait à supporter aucune pression; les composantes des forces centrifuges qui sont dirigées dans le plans de $xy$ devront se faire équilibre mutuellement, et il devra en être de même des composantes dirigées dans le plan des $xz$. Il faudra donc d'abord que la somme des composantes parallèles à l'axe des $y$ soit nulle, ce qui fournit la condition

$$\Sigma my = 0,$$

et que la somme des moments de ces forces par rapport à l'origine des coordonnées soit nulle, ce qui fournit la condition

$$\Sigma mxy = 0\,;$$

et ensuite qu'il en soit de même pour les composantes parallèles à l'axe des $z$, ce qui donne lieu aux deux autres conditions analogues :

$$\Sigma mz = 0, \qquad \Sigma mxz = 0.$$

Ces quatre conditions expriment : 1° que le centre de gravité du solide doit être situé sur l'axe fixe; 2° que cet axe doit être un des axes principaux du solide correspondant à son centre de gravité.

Tout ce que nous venons de dire, sur la composition des forces centrifuges des divers points d'un solide qui tourne uniformément autour d'un axe fixe, peut évidemment s'appliquer à la composition des forces centrifuges de ces points, dans le cas où le mouvement de rotation du solide est varié, puisque l'expression de ces forces est la même dans les deux cas. Seulement, dans le cas général, les forces centrifuges ne doivent plus être considérées seules, pour arriver à la détermination des pressions du solide sur l'axe : on doit tenir compte, en même temps, des forces réelles qui agissent sur le solide, et des forces d'inertie tangentielles de ces différents points.



§ 249. **Pendule composé.** — Un solide pesant, assujetti à tourner autour d'un axe horizontal qui ne passe pas par son centre de gravité, prend sous la seule action de la pesanteur une position d'équilibre dans laquelle son centre de gravité se trouve dans le plan vertical mené par l'axe. Si on le dérange de cette position d'équilibre, et qu'ensuite on l'abandonne à lui-même, il tend à y revenir en effectuant une série d'oscillations. Un solide pesant qui se trouve dans ces conditions, constitue ce qu'on nomme un *pendule composé*. Par opposition, on désigne sous le nom de *pendule simple* le pendule dont nous avons déjà étudié le mouvement (§ 132), et qui est formé d'un seul point matériel pesant attaché à l'une des extrémités d'un fil inextensible et sans masse dont l'autre extrémité est fixe. Nous allons voir comment on peut trouver les diverses circonstances du mouvement du pendule composé.

Désignons par M la masse totale du solide, par $a$ la distance de son centre de gravité à l'axe fixe, par $k$ son rayon de giration (§ 238) par rapport à une parallèle à cet axe menée par son centre de gravité, par $\theta$ l'angle que le plan mené par le centre de gravité et l'axe fixe fait avec le plan vertical dans une position quelconque du pendule, et par $\omega$ la vitesse angulaire dont le pendule est animé dans cette position. Le moment d'inertie du solide, par rapport à l'axe fixe, a pour valeur (239)

$$M(a^2 + k^2)\,;$$

la somme des moments des poids des différents points matériels de ce solide, par rapport à l'axe fixe, dans la position quelconque que l'on considère, est d'ailleurs égale au moment du poids total du solide appliqué à son centre de gravité, et a par conséquent pour valeur

$$Mga \sin\theta\,;$$

donc l'équation différentielle du mouvement de rotation de ce solide autour de l'axe fixe est

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{ga\sin\theta}{a^2+k^2}.$$

Le pendule simple n'est qu'un cas particulier du pendule composé ; cette équation différentielle pourra donc s'appliquer au mouvement d'un pendule simple de longueur $l$, et pour cela il suffira d'y supposer que $k$ est nul et d'y remplacer $a$ par $l$ : ainsi l'équation différentielle du mouvement de ce pendule simple est

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{g\sin\theta}{l}.$$

Ces deux équations, dont l'une se rapporte au mouvement du pendule composé, et l'autre au mouvement du pendule simple, deviennent identiques si l'on suppose

$$l=a+\frac{k^2}{a}:$$

donc, si la longueur $l$ du pendule simple satisfait à cette condition, les mouvements des deux pendules s'effectueront exactement de la même manière, pourvu toutefois que les circonstances initiales du mouvement soient les mêmes de part et d'autre. Ainsi les lois du mouvement du pendule composé sont les mêmes que celles que nous avons trouvées (§ 132) dans le cas du pendule simple.

Le pendule simple, dont les oscillations s'effectuent de la même manière que celles d'un pendule composé, est dit *équivalent* à ce dernier pendule.

Si l'on mène une droite parallèle à l'axe de suspension du pendule composé, à une distance de cet axe égale à $a+\frac{k^2}{a}$ et dans le plan qui passe par cet axe et par le centre de gravité du pendule, tous les points du solide qui se trouvent sur cette droite se meuvent absolument de la même manière que si chacun d'eux était isolé et qu'il fût lié directement à l'axe de suspension par un fil inextensible et sans masse dirigé suivant la perpendiculaire qui mesure sa distance à l'axe : cette droite se nomme l'*axe d'oscillation* du pendule, et l'on donne le nom de *centre d'oscillation* au point où elle perce le plan perpendiculaire à l'axe de suspension mené par le centre de gravité du solide. Il est aisé de voir que les axes de suspension et d'oscillation sont réciproques l'un de l'autre ; c'est-à-dire que, si l'on prend l'axe d'oscillation pour en faire un axe de suspension du solide, l'axe de suspension primitif deviendra l'axe d'oscillation : en effet, la distance $a'$ du centre de gravité du solide à son nouvel axe de suspension étant égale à $\frac{k^2}{a}$, la distance $a'+\frac{k^2}{a'}$ de ce nouvel axe de suspension à l'axe d'oscillation correspondant sera égale à $\frac{k^2}{a}+a$, ce qui démontre la proposition énoncée.



Si l'on cherche, parmi tous les axes de suspension d'un solide pesant, qui sont parallèles à une même droite menée par son centre de gravité, quels sont ceux pour lesquels la durée des petites oscillations du pendule formé par ce solide a une même valeur, on trouve évidemment que ces axes sont les génératrices de deux surfaces cylindriques de révolution ayant la droite donnée pour axe commun de figure, et que les rayons $a$, $a'$ de ces deux surfaces cylindriques satisfont à la condition

$$aa'=k^2,$$

$k$ étant le rayon de giration du solide par rapport à la droite dont il s'agit ; pour toutes les génératrices de ces deux surfaces, prises comme axes de suspension, la durée des petites oscillations du pendule sera égale à celle des petites oscillations d'un pendule simple ayant pour longueur $a+\frac{k^2}{a}$. Parmi tous les axes de suspension parallèles à la droite donnée, ceux qui fourniront la plus courte durée pour les petites oscillations du pendule, seront les génératrices d'un cylindre de révolution autour de cette droite ayant $k$ pour rayon : car, pour que l'expression $a + \frac{k^2}{a}$, dans laquelle $a$ est variable, devienne un minimum, il faut que l'on ait $a = k$.

§ 250. **Centre de percussion.** — Lorsqu'un solide, assujetti à tourner autour d'un axe fixe et d'abord en repos, vient à être soumis à une percussion brusque dont la direction ne rencontre pas l'axe fixe, il se met immédiatement en mouvement. La vitesse angulaire dont il est animé, à l'instant où la percussion cesse, se détermine facilement par ce qui précède : car on a

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathrm{P}p}{\Sigma mr^2},$$

P étant la projection de la force de percussion à un instant quelconque sur un plan perpendiculaire à l'axe, et $p$ la distance de la direction de cette force à l'axe, distance que nous regarderons comme constante pendant toute la durée $\theta$ de la percussion ; et si l'on multiplie par $dt$, pour intégrer ensuite entre les limites 0 et $\theta$ de la variable $t$, on trouve pour la vitesse angulaire $\omega$ du solide à la fin de la percussion

$$\omega = \frac{p \int_0^\theta \mathrm{P}dt}{\Sigma mr^2}.$$

Cette équation aurait pu d'ailleurs être obtenue immédiatement, en appliquant le troisième théorème général (§ 226) au mouvement dont il s'agit, et prenant les moments des quantités de mouvement et des impulsions par rapport à l'axe fixe ; il est aisé de voir en effet que ce théorème peut être appliqué sans qu'on tienne compte des réactions de l'axe fixe sur le solide (§ 236), puisque les moments de ces réactions par rapport à l'axe sont nuls.

Pendant que le solide est soumis à la percussion qui le met ainsi brusquement en mouvement, l'axe supporte habituellement des pressions considérables. On peut se demander de quelle manière la percussion doit être appliquée au solide, pour



que ces pressions sur l'axe soient nulles. Pour cela, il faut évidemment que l'axe autour duquel le solide commencerait à tourner, s'il était entièrement libre et qu'il fût soumis à la même percussion, soit précisément l'axe autour duquel nous le supposons assujetti à tourner. S'il en est ainsi, la fixité de l'axe ne gêne en aucune manière le mouvement que la percussion tend à faire prendre au solide, et par conséquent le solide ne doit exercer aucune pression sur cet axe ; tandis que si l'axe fixe n'est pas celui autour duquel la percussion ferait tourner le solide, dans le cas où il serait entièrement libre, l'existence de cet axe fixe oblige le solide à prendre un mouvement différent de celui qu'il prendrait sans cela, et il en résulte nécessairement une réaction du solide sur l'axe qui le gêne dans son mouvement.

Si le solide était libre, la percussion qui lui est appliquée déterminerait à la fois un mouvement de son centre de gravité, et un mouvement de rotation du solide autour d'une droite passant par ce point (§ 245). Pour que ces deux mouvements se composent en une seule rotation autour de l'axe AB, *fig.* 115, il faut que l'axe de la rotation composante soit une parallèle A'B' à l'axe AB, menée par le centre de gravité G ; il faut de plus que la direction du mouvement du centre de gravité, c'est-à-dire la direction de la percussion, soit perpendiculaire au plan AB A'B' (§ 53). Mais pour que la rotation du solide s'effectue d'abord autour de l'axe A'B', il faut que le plan mené par la direction de la percussion et par le point G soit le plan diamétral de l'ellipsoïde central qui est conjugué du diamètre dirigé suivant la droite A'B' ; donc ce plan diamétral conjugué du diamètre A'B' doit être perpendiculaire au plan AB A'B'. et en outre le point C où la direction de la percussion rencontre le plan AB A'B' doit être sur la ligne d'intersection du plan AB A'B' avec le plan diamétral dont il s'agit. Enfin la vitesse $v$ du centre de gravité doit être égale à la vitesse angulaire

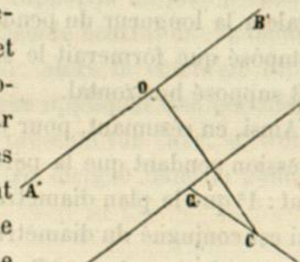

Fig. 115.

$\omega$ autour de l'axe A'B' multipliée par la distance $a$ du centre de gravité G à l'axe AB (§ 53). Or, il résulte de ce qui a été dit dans le § 245, que l'on a

$$v = \frac{\int_0^\theta \mathrm{P}dt}{\mathrm{M}}, \qquad \omega = \frac{z' \int_0^\theta \mathrm{P}dt}{\mathrm{M}k^2},$$

en désignant par M la masse du solide tout entier, par $k$ le rayon de giration de ce solide par rapport à la droite A'B', et par $z$ la distance du point C à cette droite : il s'ensuit qu'on doit avoir

$$z = \frac{k^2}{a},$$

c'est-à-dire que la distance CO du point C l'axe AB doit être égale à la longueur du pendule simple équivalent au pendule composé que formerait le solide en oscillant autour de l'axe AB supposé horizontal.

Ainsi, en résumant, pour que l'axe fixe AB n'éprouve pas de pression pendant que la percussion est appliquée au solide, il faut : 1° que le plan diamétral de l'ellipsoïde central du solide, qui est conjugué du diamètre parallèle à AB, soit perpendiculaire au plan mené par AB et par le centre de gravité G ; 2° que la direction de la percussion soit perpendiculaire à ce plan mené par le point G et la ligne AB ; 3° enfin que le point où cette direction perce le plan GAB soit à la rencontre du plan diamétral, dont il vient d'être question, avec l'axe d'oscillation correspondant à la ligne AB considérée comme axe de suspension (§ 249).

La première de ces conditions, à laquelle le solide doit satisfaire, est nécessaire et suffisante pour qu'il soit possible de trouver une direction suivant laquelle on puisse appliquer une percussion au solide, sans que l'axe AB éprouve des pressions pendant la durée de cette percussion. Lorsque cette première condition est remplie, le point C déterminé par la troisième condition se nomme le *centre de percussion*.

Si l'on supposait que le point O, pied de la perpendiculaire



abaissée du point C sur l'axe AB, fût seul fixe dans le solide, la percussion devrait encore faire tourner ce solide autour de l'axe AB : donc AB doit être un des axes principaux du solide, relativement au point O (§ 246). Si à cette condition on en ajoute deux autres, savoir : 1° que la percussion doit être dirigée perpendiculairement au plan GAB ; 2° que la distance CO doit être égale à la longueur du pendule simple équivalent au pendule composé que formerait le solide en oscillant autour de l'axe AB supposé horizontal, on aura un système de trois conditions équivalent à celui auquel on était d'abord parvenu. On sait d'ailleurs qu'une droite AB, qui ne passe pas par le centre de gravité G du solide, ne peut être un axe principal de ce solide que pour un seul de ses points.

Si le solide est symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe fixe AB, son ellipsoïde central est également symétrique par rapport à ce plan ; alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse appliquer une percussion au solide sans qu'il en résulte de pression sur l'axe, se trouve remplie, et la percussion doit être dirigée dans le plan de symétrie.

---