pose au mouvement dont il s'agit, il faut que le moment de cette force par rapport à l'arête A ait une même valeur : donc, lorsque cette force agit suivant CC', elle doit être double de ce qu'elle est lorsqu'elle agit suivant BB', puisque la distance de sa direction à l'arête A est deux fois plus petite que dans ce dernier cas.

Si l'on examine de près ce qui se passe dans l'expérience qui vient d'être indiquée, on verra que ce n'est pas seulement une force, mais bien un couple que l'on applique au cylindre pour vaincre la résistance au roulement. Considérons, par exemple, le cas où l'on exerce une force de traction F suivant CC'. Tant que cette force F n'est pas suffisamment grande, le cylindre reste immobile; mais il est clair que la pression totale qu'il exerce sur le plan HH est égale à son poids P augmenté de F, et que par conséquent il éprouve de la part du plan HH une réaction égale à P + F dirigée verticalement et de bas en haut, tandis que cette réaction était simplement égale à P, quand la force F n'agissait pas. L'application de la force F au point C, suivant la direction CC', détermine donc en même temps l'action d'une autre force égale à F agissant en A verticalement et de bas en haut; c'est-à-dire que, en exerçant la force de traction F sur le point C, on applique réellement au cylindre un couple ayant pour force F et pour bras de levier le rayon du cylindre. On arrive facilement à une conséquence analogue, en considérant le cas où l'on cherche à mettre le cylindre en mouvement au moyen d'une force appliquée suivant BB'. Ainsi c'est au moyen d'un couple qu'on parvient à vaincre la résistance au roulement, et par conséquent on peut regarder cette résistance comme étant elle-même un couple qui agit dans un plan perpendiculaire à l'arête A, en sens contraire du roulement qu'on tend à produire.

La force de traction qu'il faut appliquer en B, pour déterminer le roulement du cylindre, étant égale à

$$k\frac{P}{D},$$

comme nous l'avons dit, et par conséquent celle qu'on doit

appliquer en C pour produire le même effet ayant pour valeur

$$2k\frac{P}{D},$$

le moment du couple à l'aide duquel on parvient à vaincre la résistance au roulement est exprimé par

$$2k\frac{P}{D}\times\frac{D}{2}=kP.$$

On peut donc dire que la résistance au roulement est un couple dont le moment a pour valeur kP; c'est-à-dire que cette résistance est proportionnelle au poids P du cylindre et indépendante de son diamètre D.

Les expériences, que nous venons de rappeler et d'analyser ne font connaître que la résistance qui se développe lorsque l'on cherche à faire rouler un cylindre pesant sur un plan sur lequel il repose; elles ne se rapportent en aucune manière à la résistance analogue qui se développe lorsque le cylindre est déjà en mouvement depuis un certain temps, et qu'il continue à rouler; mais on peut admettre que, dans le second cas, la résistance au roulement suit les mêmes lois que dans le premier cas. Seulement le coefficient k, qui entre dans l'expression du moment de cette résistance au roulement, devra être regardé comme n'ayant généralement pas la même valeur, pour les mêmes corps, suivant qu'il se rapporte à la résistance qui se développe au commencement du roulement ou bien à celle qui se développe pendant le roulement.

D'après cela, lorsque deux solides naturels rouleront l'un sur l'autre, nous pourrons regarder chacun des deux solides comme soumis à l'action d'un couple résistant, dont le moment, proportionnel à la pression normale N qu'ils exercent l'un sur l'autre, et indépendant de la courbure de leurs surfaces, sera exprimé par

$$kN,$$

k étant un coefficient qui dépend uniquement de la nature des

$$mg\cos\varphi,\qquad F\sin\beta;$$

et leur différence

$$mg\cos\varphi - F\sin\beta,$$

qui sera nécessairement positive si le corps reste en contact avec le plan, sera la pression normale du corps sur le plan : le frottement aura donc pour valeur

$$f(mg\cos\varphi - F\sin\beta).$$

La projection de la force F suivant la direction du mouvement sera égale à

$$F\cos\beta;$$

si l'on en retranche la projection

$$mg\sin\varphi$$

du poids du corps sur la même direction, ainsi que le frottement dont on vient de trouver l'expression, on aura

$$F\cos\beta - mg\sin\varphi - f(mg\cos\varphi - F\sin\beta)$$

pour la force qui agit sur le mobile suivant la direction de son mouvement rectiligne, et qui tend constamment à modifier sa vitesse. Cette force étant constante, il s'ensuit que le mouvement du corps est uniformément varié. Son mouvement sera uniforme, si l'on a

$$F\cos\beta - mg\sin\varphi - f(mg\cos\varphi - F\sin\beta) = 0,$$

d'où l'on tire

$$F = mg\frac{\sin\varphi + f\cos\varphi}{\cos\beta + f\sin\beta} = mg\frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)},$$

α étant l'angle de frottement. On voit, par ce dernier résultat, que la force F, capable de faire remonter uniformément le corps sur le plan, varie de grandeur avec l'angle β que sa direction fait avec le plan ; cette force F est un minimum lorsque $\beta = \alpha$. C'est ce qu'on peut reconnaître facilement par des considérations géométriques, si l'on remarque que la réaction totale du plan

sur le corps (résultante de la pression et du frottement) est dirigée suivant une ligne MR′ faisant l'angle α avec la normale MN′ (§ 254), et qu'en conséquence, pour que la vitesse du corps ne change pas, il faut que la résultante des forces F et mg soit égale et directement opposée à cette réaction totale ; en sorte que, si l'on mène par l'extrémité P de la droite qui représente la force mg une ligne PS parallèle à la direction de F, jusqu'à la rencontre de MR, prolongement de MR′, la longueur PS fera connaître la grandeur de la force F : donc, pour que F soit un minimum, il faut que la parallèle à sa direction menée du point P à la ligne MR soit la perpendiculaire PU abaissée de P sur MR, et par suite, il faut que cette direction de F, perpendiculaire à MR, fasse avec le plan un angle β égal à α.

§ 257. *Mouvement d'une bille de billard.* — Cherchons à nous rendre compte des circonstances que présente le mouvement d'une bille sur un billard, en supposant que cette bille ait été animée tout d'abord d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation autour de son centre, et que l'axe de la rotation initiale soit dirigé perpendiculairement au plan vertical mené par la direction de la vitesse initiale de son centre. Il est aisé de voir d'abord que, en raison de la symétrie, le centre de la bille ne sortira pas du plan vertical dont on vient de parler, et que, par conséquent, ce point se mouvra en ligne droite, suivant la direction de la vitesse qu'il avait au commencement du mouvement ; de plus, par la même raison, l'axe de rotation de la bille, dans son mouvement autour de son centre, restera toujours parallèle à sa direction primitive. Si les sens de la translation et de la rotation initiales de la bille sont ceux qu'indiquent les flèches ci-contre, *fig.* 118, il est aisé de voir qu'il se développe au point A un frottement dirigé en sens contraire du mouvement de translation. Ce frottement, égal à fMg, si M est la masse de la bille, tend à ralentir à la fois le mouvement du centre C, et le mouvement de rotation autour de ce point : en sorte que si l'on désigne par v la vitesse du point C,

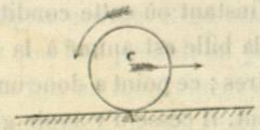

Fig. 118.

et par ω la vitesse angulaire de la bille dans sa rotation autour de ce point, on aura

$$\frac{dv}{dt} = -fg, \qquad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{f\mathrm{M}g\mathrm{R}}{\Sigma mr^2},$$

R étant le rayon de la bille, et Σmr^2 son moment d'inertie pris par rapport à un de ses diamètres. Or on sait (§ 238) que l'on a dans ce cas

$$\Sigma mr^2 = \mathrm{M}.\frac{2}{5}\mathrm{R}^2:$$

la valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ se réduit donc à

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2}{5}\frac{fg}{\mathrm{R}}.$$

En intégrant, on trouve

$$v = v_0 - fgt, \qquad \omega = \omega_0 - \frac{2}{5}\frac{fg}{\mathrm{R}}t,$$

v_0 et ω_0 étant les valeurs initiales de v et de ω. La vitesse v du centre de la bille et sa vitesse angulaire ω autour de ce point vont continuellement en diminuant. Bientôt une de ces deux quantités devient égale à zéro ; comme le glissement de la bille sur le billard ne cesse pas encore d'exister à cet instant, cette quantité qui s'est annulée la première devient négative, et augmente dès lors de plus en plus en valeur absolue, pendant que l'autre quantité continue à décroître : il arrive donc, au bout de quelque temps, que l'on a

$$v + \mathrm{R}\omega = 0.$$

A l'instant où cette condition est remplie, le point le plus bas de la bille est animé à la fois de deux vitesses égales et contraires ; ce point a donc une vitesse absolue nulle, et par conséquent, il cesse d'y avoir glissement de la bille sur le billard ; dès lors le frottement n'agit plus, la bille roule sur le billard, et ce roulement s'effectue uniformément, si toutefois on néglige la résistance au roulement dont l'effet consiste à diminuer peu à peu la vitesse de la bille dans cette dernière partie de son mouvement.

D'après cela, si nous nous reportons aux valeurs de v et de ω en fonctions de t, c'est lorsque l'on aura

$$t = \frac{2}{7}\frac{v_0 + \mathrm{R}\omega_0}{fg}$$

que la bille cessera de glisser pour commencer à rouler. Cette valeur de t est comprise entre les valeurs

$$t = \frac{v_0}{fg}, \qquad t = \frac{2}{5}\frac{\mathrm{R}\omega_0}{fg},$$

pour lesquelles on a $v = 0$ ou $\omega = 0$. Si $\frac{v_0}{fg}$ est plus grand que $\frac{2}{5}\frac{\mathrm{R}\omega_0}{fg}$, ω s'annulera avant v, et le roulement qui succédera au glissement se fera dans le sens de la vitesse v_0. Si, au contraire, $\frac{v_0}{fg}$ est plus petit que $\frac{2}{5}\frac{\mathrm{R}\omega_0}{fg}$, v s'annulera avant ω, et la bille roulera, en revenant vers son point de départ. Enfin, si $\frac{v_0}{fg}$ est égal à $\frac{2}{5}\frac{\mathrm{R}\omega_0}{fg}$, v et ω s'annuleront en même temps, et la bille, au lieu de rouler dans un sens ou dans l'autre, restera immobile sur le billard.

Dans le cas général où l'axe autour duquel s'effectue la rotation initiale de la bille n'est pas perpendiculaire à la direction du mouvement de son centre, le frottement qu'elle éprouve change à chaque instant la direction de ce dernier mouvement, c'est-à-dire que la bille se meut en ligne courbe. C'est ainsi qu'on peut se rendre compte des *effets* que l'on produit au jeu de billard, en donnant à une bille à la fois un mouvement de translation et un mouvement de rotation autour de son centre.

§ 258. *Roulement d'un cylindre pesant sur un plan incliné.* — Supposons qu'un cylindre homogène descende en roulant sur un plan incliné, sous la seule action de la pesanteur, de telle manière que son axe de figure reste toujours parallèle à la trace horizontale du plan. La vitesse angulaire du corps, dans son mouvement de rotation autour de son axe, va en s'accélérant, de même que la vitesse de son centre de gravité ; et cela ne peut avoir lieu qu'autant que ce corps éprouve de la part du plan une réaction tangentielle F dirigée en sens contraire du mouvement de son centre de gravité. Si nous désignons par M la masse du cylindre, par R son rayon, par v la vitesse de son centre de gravité, par ω la vitesse angulaire avec laquelle il tourne autour de ce point, et par φ l'angle que le plan incliné fait avec l'horizon, nous aurons

$$Mg \sin \varphi - F$$

pour la somme des projections des forces extérieures sur la direction du mouvement du centre de gravité, et par suite ce mouvement sera déterminé par l'équation

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \varphi - \frac{F}{M};$$

nous aurons aussi FR pour la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe du cylindre, de sorte que le mouvement de rotation autour de cet axe sera déterminé par l'équation

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{FR}{\Sigma mr^2},$$

ou bien, en remplaçant le moment d'inertie Σmr^2 par sa valeur $\frac{1}{2} MR^2$ (§ 238),

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2F}{MR}.$$

Mais v doit être égal à $R\omega$, puisqu'il y a roulement du cylindre sur le plan : on en déduit

$$g \sin \varphi - \frac{F}{M} = \frac{2F}{M},$$

d'où

$$F = \frac{Mg \sin \varphi}{3}.$$

Le frottement que le cylindre éprouverait de la part du plan, s'il glissait au lieu de rouler, serait égal à $fMg \cos \varphi$, en désignant par f le coefficient de frottement ; la réaction F que le plan exerce sur le cylindre, quand il y a simplement roulement, ne pouvant pas être supérieure à ce frottement, il faut qu'on ait

$$\frac{Mg \sin \varphi}{3} < fMg \cos \varphi,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang} \varphi < 3f.$$

Lorsque cette condition est remplie, le cylindre roule sur le plan, et l'on trouve les valeurs de v et de ω au moyen des relations établies précédemment, dans lesquelles on remplace F par sa valeur $\frac{Mg \sin \varphi}{3}$.

Si l'on avait

$$\operatorname{tang} \varphi > 3f,$$

le cylindre ne roulerait pas sur le plan ; mais il glisserait, et le frottement qu'il éprouverait le ferait également tourner autour de son axe. En désignant par F ce frottement, on aurait encore pour déterminer v et ω, les équations

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \varphi - \frac{F}{M}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{2F}{MR};$$

seulement, au lieu de chercher la valeur de F de manière que l'on ait $v = R\omega$, on devrait supposer

$$F = fMg \cos \varphi.$$

Dans ce qui précède, nous avons négligé la résistance au roulement à laquelle le cylindre est soumis pendant qu'il roule sur le plan. Voici comment on pourrait en tenir compte. Cette résistance au roulement, que nous pouvons assimiler à un couple (§ 235), n'influe pas directement sur le mouvement du centre de gravité du cylindre ; en sorte que, si la réaction tangentielle du plan sur le cylindre est toujours désignée par F, on aura encore

$$\frac{dv}{dt} = g \sin\varphi - \frac{F}{M}.$$

Pour trouver l'équation du mouvement de rotation du cylindre autour de son axe, nous observerons que le moment du couple dont il vient d'être question peut être représenté par $kMg \cos\varphi$, k étant une quantité qui dépend uniquement de la nature des surfaces qui se touchent ; la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe du cylindre est donc égale à

$$FR - rMg \cos\varphi ;$$

et, par suite, on a

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{FR - kMg\cos\varphi}{\Sigma mr^2} = \frac{2F}{MR} - \frac{2kg\cos\varphi}{R^2}.$$

En exprimant ensuite que v est égal à $R\omega$, on trouve pour F la valeur

$$F = \frac{Mg}{3}\left(\sin\varphi \times \frac{2k}{R}\cos\varphi\right);$$

et, par conséquent, en tenant compte de cette valeur de F, on peut déterminer complètement v et ω. On voit que, si la résistance au roulement n'agit pas directement pour modifier le mouvement du centre de gravité, elle n'en influe pas moins sur ce mouvement en raison de l'augmentation qu'elle fait subir à la réaction tangentielle F du plan sur le cylindre.

On voit que, lorsqu'un cylindre roule sur un plan incliné, dans les circonstances que nous venons d'indiquer, l'accélération du mouvement de son centre de gravité est plus petite que celle du mouvement d'un point matériel pesant, qui glisserait le long de ce plan sans en éprouver de frottement, et cela lors même que l'on ne tient pas compte de la résistance au roule-

ment. Cela tient à ce que la pesanteur détermine en même temps le mouvement de translation du cylindre le long du plan, et son mouvement de rotation sur lui-même. Le travail développé par la pesanteur, pendant que le centre de gravité du cylindre descend d'une certaine hauteur, doit produire non seulement l'accroissement de force vive de la masse entière du corps supposé concentré à son centre de gravité, mais encore l'accroissement de la force vive de ce corps dans son mouvement autour de son centre de gravité (§§ 230 et 235).

---

surfaces des deux solides dans le voisinage de leurs points de contact. Ce couple résistant sera dirigé dans un plan perpendiculaire à l'axe instantané autour duquel s'effectuera le roulement élémentaire absolu ou relatif d'un des solides sur l'autre, et dans un sens tel qu'il tende à s'opposer à la continuation du roulement. Le couple résistant appliqué à l'un des deux solides sera d'ailleurs égal et directement contraire au couple résistant appliqué à l'autre solide. Si l'un des deux solides reste immobile, et si la vitesse angulaire de l'autre solide dans son roulement instantané sur le premier est ω, il est aisé de voir que la somme des travaux développés pendant le temps dt, par les deux forces du couple résistant appliqué à ce second solide, a pour valeur

$$-k\mathrm{N}\omega dt.$$

Dans le cas où les deux solides sont l'un et l'autre en mouvement, cette expression représente encore la somme des travaux dus aux forces des deux couples résistants égaux et contraires que nous regardons comme appliqués aux deux solides, ω étant la vitesse angulaire dans le roulement relatif de l'un des deux solides sur l'autre; car on sait que la somme des travaux dus à des forces qui sont deux à deux égales et directement opposées ne dépend que du mouvement relatif des points d'application de ces forces (§ 175), et par conséquent, dans le cas qui nous occupe, la somme des travaux dus aux forces des deux couples résistants est la même que si le roulement relatif d'un des deux solides sur l'autre était un roulement absolu.

§ 256. **Exemples du mouvement des solides naturels.** — *Glissement d'un corps pesant sur un plan incliné.* — Si un corps solide, posé sur un plan incliné, et soumis à la seule action de la pesanteur, cède à cette action et se met à glisser parallèlement à la ligne de plus grande pente du plan, il éprouve de la part du plan un frottement qui agit en sens contraire de son mouvement. Soient m la masse du corps, et φ l'angle que le plan incliné fait avec l'horizon. Si l'on décompose le poids mg du corps en deux composantes, dont l'une $mg\cos\varphi$ agisse perpendiculairement au plan, et l'autre $mg\sin\varphi$ agisse

parallèlement à ce plan, $mg\cos\varphi$ sera la pression exercée par le corps sur le plan pendant son mouvement (§ 131); et par suite le frottement qu'il éprouve de la part du plan aura pour expression

$$fmg\cos\varphi,$$

f étant le coefficient de frottement. Ce frottement agit en sens contraire du mouvement, et, par conséquent, en sens contraire de la composante $mg\sin\varphi$ du poids du corps; donc on peut dire que le corps se meut en ligne droite sous l'action d'une force égale à

$$mg\sin\varphi - fmg\cos\varphi.$$

Cette force étant constante, le mouvement du corps est uniformément varié, et l'accélération de ce mouvement est égale à

$$g(\sin\varphi - f\cos\varphi).$$

Si nous remplaçons f par tang α, cette expression deviendra

$$g\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha};$$

donc le mouvement du corps sera accéléré ou retardé, suivant que l'angle φ sera plus grand ou plus petit que l'angle de frottement α.

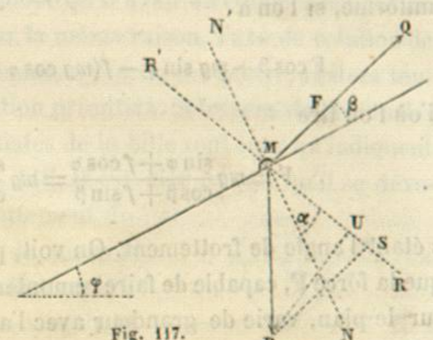

Fig. 117.

Supposons que l'on fasse remonter le corps pesant le long de la ligne de plus grande pente du plan, en lui appliquant une force constante F dont la direction fasse un angle β avec cette ligne de plus grande pente, *fig.* 117. Les projections du poids mg et de la force F sur la perpendiculaire au plan auront pour valeurs